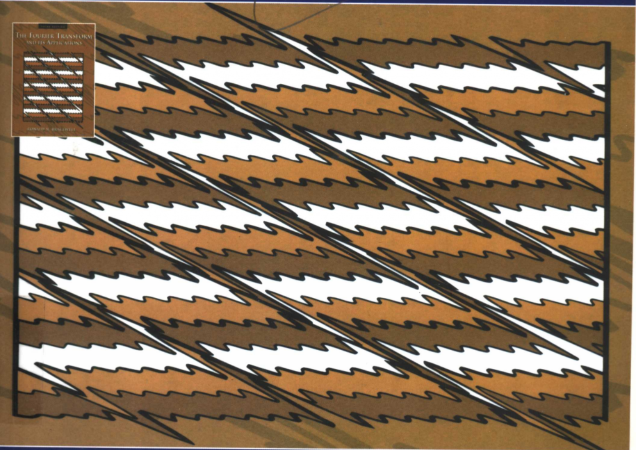
McGraw Hill Education 国外名校最新教材精选

傅里叶变换及其应用

The Fourier Transform and Its Applications

（第3版）

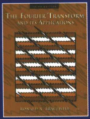
〔美〕罗纳德·N·布雷斯韦尔 著
殷勤业 张建国 译



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

McGraw Hill

McGraw Hill Education 国外名校最新教材精选



本科高年级学生及研究生用书

本书是一本深受欢迎的电子电气工程类教材和专业参考书，它阐述了变换方法以及如何把这些变换方法应用于电路、天线、信号处理器等电气子系统，也说明了如何把这些变换方法应用于相互联系的连续时间信号，脉冲序列和离散时间信号。

一旦我们掌握了这些变换方法，它们就会成为通向各种领域的钥匙，会使我们在进入每一个新的领域时付出较小的努力，而不需要学习那些不熟悉的符号和术语。光衍射，热传导，半导体中载荷的扩散，概率，随机信号以及噪声是当今的一些工程应用领域。

傅里叶变换已经成为理解诸多技术的必不可少的工具，例如医学成像（X-光、核磁共振和超声波）、地球物理及民用测绘、遥感、生物医学及化学中的光谱学和结晶学，以及任何超出其电气领域的电子仪器。

本书的主要特点包括：

- ⋆用图形阐明所有的数学公式。
- ⋆统一连续和离散信号处理。
- ⋆自制的计算机程序代码和MATLAB例子。
- ⋆应用：基本理论如何用于光学、天线、干涉、统计、噪声、热和半导体扩散等领域。
- ⋆广泛的参考表。
- ⋆权威的论述——作者对本领域作出了许多基本的和重要的贡献。

"虽然我不时地在考虑替代的教材……我最终还是回到布雷斯韦尔的这本书，因为它带给了本学科令人惊奇的观点……。我特别强调技能开发，比方说，我经常收到同学们热忱的感谢，他们已经知道卷积许多年了，但却没有真正地了解如何进行卷积。正是由于对技能的这种强调，我确信布雷斯韦尔的这本教材是最好的选择。"

威廉·T·罗德斯博士
乔治亚理工学院电气与计算机工程学院

责任编辑／宗立文　赵丽平
封面设计／阎　亮
版式设计／程文卫

ISBN 7-5605-2061-8

ISBN 7-5605-2061-8/O·228
定价：56.00元

国外名校最新教材精选

The Fourier Transform and Its Applications

傅里叶变换及其应用

（第 3 版）

Ronald N. Bracewell
Lewis M. Terman Professor of Electrical Engineering Emeritus
Stanford University

〔美〕罗纳德·N·布雷斯韦尔　著

殷勤业 张建国　译

西安交通大学出版社
Xi'an Jiaotong University Press

内容提要

本书是美国著名学者罗纳德·N·布雷斯韦尔教授编著的一本经典教材，它有两大特色：一是擅于借助图形以及对图形的解释来说明复杂的问题；二是与工程应用联系紧密。本书不仅有5章的内容与实际应用紧密相关，而且在各章的内容及习题中，与实际应用有关的例子也随处可见。

本书共23章，其中前11章对傅里叶变换理论做了全面的论述，12到14章讲述了与傅里叶变换相关的一些变换，15到19章是傅里叶变换在各学科中的应用，20章给出了几个重要函数的数值表，21章给出了部分习题的答案，22章是傅里叶变换图示集，23章对傅里叶的生平做了详细的介绍。

本书可供电气工程、电子工程、信息与通信工程、控制工程、生物医学工程、天文学等理工类学科专业的研究生和高年级本科生使用，也可作为相关领域的科研和工程技术人员的参考书籍。

Ronald N. Bracewell
The Fourier Transform and Its Applications
ISBN:0-07-303938-1

Simplified Chinese translation edition jointly published by McGraw-Hill Education (Asia) Co. and Xi'an Jiaotong University Press.

图书在版编目(CIP)数据

傅里叶变换及其应用：第3版/(美)布雷斯韦尔(Bracewell, R. N.)著；殷勤业，张建国译．—西安：西安交通大学出版社，2005.8
(国外名校最新教材精选)
书名原文：The Fourier Transform and Its Applications /3rd Edition
ISBN 7－5605－2061－8

Ⅰ．傅… Ⅱ．①布…②殷…③张… Ⅲ．傅里叶变换-高等学校-教材 Ⅳ．O174.22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 095477 号

书　　名：傅里叶变换及其应用(第3版)
著　　者：〔美〕罗纳德·N·布雷斯韦尔
译　　者：殷勤业　张建国
出版发行：西安交通大学出版社
地　　址：西安市兴庆南路25号(邮编：710049)
电　　话：(029)82668357　82667874(发行部)
　　　　　(029)82668315　82669096(总编办)
电子邮件：xjtupress @ 163.com
印　　刷：西安交通大学印刷厂
字　　数：751千字
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：31.375
印　　次：2005年9月第1版　2005年9月第1次印刷
印　　数：0 001～4 000
书　　号：ISBN 7－5605－2061－8/O·228
定　　价：56.00元

译者序

傅里叶变换是信号处理中一种重要的变换方法，所以其在电气工程、电子工程、信息与通信工程、控制工程、生物医学工程、天文学等理工类学科中的重要性是不言而喻的，它是绝大多数理工类学科的基础课程。关于本书的指导思想、使用对象以及内容安排，作者在前言中已经做了细致的介绍，在此无需重复。

本书的作者 Bracewell 博士在大学时就对傅里叶分析产生了浓厚的兴趣，他长期致力于射电天文及图像重建方面的研究工作，并做出了突出贡献。正如在作者简介中提到的那样，傅里叶分析在他的研究工作中始终扮演着关键的角色。作者对傅里叶变换的深刻理解贯穿于本书的字里行间，译者对此有切身的体会。

本书的主要特色有两点：其一是借助图形以及对图形的解释来说明复杂的问题，并在第 22 章给出了傅里叶变换图示集。其二是与工程应用联系紧密，这不仅表现在本书有五章（第 15 到 19 章）与实际应用紧密相关，而且在各章的内容及习题中，与实际应用有关的例子也随处可见。更令译者敬佩的是，这些应用涉及很多学科，甚至是生活的各个方面。

本书第 1 章至第 8 章由殷勤业翻译，其余章节由张建国翻译，全书由殷勤业统一整理。译者要特别感谢微软的孔原博士，他在百忙之中为本书部分章节的译法提出过宝贵的建议。此外，在本书的翻译过程中，得到了邓科博士、张红副教授以及博士生曾雁星、张一闻、罗铭、丁乐和孟银阔的帮助，在此对他们表示诚挚的感谢。博士生张莹、冯昂、孟玉吉以及硕士生张辉、戴辉、唐志勇、田昕、王毅、田小辉、吉欣、张运饥、刘维佳直接参与了本书的翻译工作，对他们的辛勤工作表示衷心的感谢。最后，向本书的责任编辑宗立文、赵丽萍表示衷心的感谢，没有他们的帮助，本书将难以完成。

原书中有少量输入和排版的疏漏，在翻译过程中做了改动。

另外，由于本书中的各种应用涉及面非常广、而且限于译者的水平和不可避免的主观片面性，翻译不当或表述不清之处在所难免，恳请广大读者及专家不吝指教，提出修改意见，我们将不胜感激。

译　者

2005 年 3 月于西安交通大学

作者简介

罗纳德·N·布雷斯韦尔(Ronald N. Bracewell)出生于澳大利亚，在悉尼大学获得了理学学士、工学学士和工学硕士学位，并且在剑桥大学获得了物理学博士学位。目前，作为斯坦福大学电气工程系的L. M. Terman名誉教授，Bracewell博士拥有许多对其声望来讲令人印象深刻的履历、奖励和出版物。他是皇家天文学会(Royal Astronomical Society)会士、澳大利亚天文学会会士以及美国天文学会的前任议员。他还是电子电气工程师协会(IEEE)的终身会士和Heinrich Hertz金奖获得者。在斯坦福射电天文研究所，他设计并建造了创新的射电望远镜，其中包括第一个具有人眼分辨率(小于一个弧分)的天线，这个天线早期曾被用于发现宇宙背景辐射。傅里叶分析在他的新仪器设计和数据处理中扮演了关键的角色。傅里叶的绝妙的思想也使得Bracewell博士在层析成像方面做出了突出贡献，这使他当选为国家科学院的医药协会会士，获得了悉尼大学的首届杰出校友奖，并且由于他在射电天文和图像重建领域对科学的贡献受到了澳大利亚国家级官员的约见。

前 言

变换这一方法为电网络、能量转换和控制器件、天线和其他的电气系统元件，以及全部的线性系统和许多电的或非电的物理系统和器件的研究提供了统一的数学方法。这些相同的方法同样可以应用于有线或光纤通信学科、无线电传播和电离层媒介（它们都与电气系统的互连方式有关），以及信息论，其中，信息论涉及数据的获取、处理和表示。在电气工程的基本领域进行处理时，还会用到其他理论技术，但实际上变换方法是所有这些理论中必不可少的。傅里叶分析在电气工程方面有很多重要的应用，是电气工程的必修课——的确，许多数学方面的发展都与交流理论、信号分析以及明显与电气通信相关的信息论有关。

这就是许多有关技术应用的文献出现在电气和电子刊物的原因。尽管与电气工程有密切的关系，傅里叶分析在生物医学和遥感（地球物理学、海洋学、行星表面、土木工程）方面也是必不可少的，这些方面的使用者在数量上已超过了通常使用傅里叶分析的电气工程师。但是，傅里叶分析及其应用的教学仍归属于电气工程。

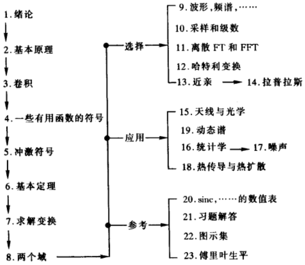
多年来，变换及其应用一直是斯坦福大学电气工程专业的一门课程，这门课程的要求不超出学士学位持有者通常所具有的先决条件。我们的目标是发展一门所有研究生早期阶段的关键性的课程，以免学生在后面的更专业的课程中重复遇到相同的内容，而后面的教师可以更直接地进入他们的专业课的主题。

显然，试图仅仅在一门课程中介绍所有的线性数学知识是不可行的；核心内容必须通过合理的判断才能作出选择。然而，如果对所作的选择界定明确，将会对后面的教师更有帮助。

前期课程应该简单，但并非不重要；本书的目标是通过使用恰当的符号和卷积的方法来简化表示高级课程中经常遇到的很多关键问题。

使用本书的一种方法是按照章节顺序。对那些无需帮助便

能阅读前半部分或能通过几讲快速带过前半部分的学生来说，这样是可行的。但是，如果用正常的速度完成这些内容，那么，用物理实例来解释每一个定理和概念会比较实用，也不失为一个好方法。波形和它们的谱以及基本扩散理论都适合用来做解释。此后，有关应用的几章可以用期望的任何顺序进行。本书的章节安排如下：



根据所选应用章节的多少，内容的量适合于一个学期或半个学期。实用的计划是把有关应用章节的选择留给当前的教师来作。

关于傅里叶变换已经出版了很多不错的数学教材。本书的不同之处在于它是专门为那些关心傅里叶变换在物理场合应用的读者所著的，并不适用于那些注重数学本身的读者。本书还讨论了傅里叶变换和其它变换的关系，而且有意识地充实了适用于变换对和有关变换定理的简要的参考信息。

1939 年，在悉尼大学学习 H. S. Carslaw 的“Fourier Series and Integrals”时，我对这一学科产生了兴趣。在 C. S. I. R 无线电物理实验室，作为 J. C. Jaeger 的同事，我学到了它的物理应用，并且继承了由 J. A. Ratcliffe 发起的剑桥 Cavendish 实验室结晶学家们的物理思想。变换方法是电气工程的核心课程。已成为课程重要组成部分的数字计算和数据处理，虽然在内容上与对电路、电子和波的严肃研究有很大不同，但是它们却通过傅里叶变换连结在了一起。通过掺杂（用于构造半导体器件）和电导体中空穴和电子的控制流，很久以前与海底电缆电报有关的扩散方程，作为固体物理器件中的需要考虑的重要事项再度出现。显然，掌握傅里叶基本原理在固态实验室非常有用。

图像工程中的大部分都可以通过二维的推广来解释，它的迅速发展增强了核

心课程的价值。因此，本书的主题已很容易转变为重要角色，不同专业的教学人员发现它很易于讲授。一年级的研究生，尤其是来自其他大学和其他系（尤其是应用物理和地球科学系）的学生，需要学习这个课程。本课程也可用于大学四年级的学生。

快速傅里叶变换(FFT)算法的引入把傅里叶变换的应用范围拓展到了数据处理和一般的数字表达，而且使离散傅里叶变换(DFT)更加重要。与第 11 章所述的离散数学有关的技术变革使得对任何需要处理大量数据的专业人员，如医药、生物和遥感等许多领域的工程师或专家都必须理解傅里叶理论（例如混叠）。基于 Ralph V. C. Hartley 方程（第 12 章）的研究使得有可能不用计算傅里叶分析时的虚部，而只是简单地计算实的 Hartley 形式。

该书第一版中就提及的 Hartley 方程，随着计算机的发展在信号处理中得到了更多的应用。1983 年，在离散 Hartley 变换（这个名字现在已被普遍认可）这个题目下，我在时间序列中使用新式的符号给它们赋予了新的意义，同时 Z. Wang (Appl. Math. and comput.，第 9 卷，53－73、153－163、245－255 页，1983）独立地鼓舞了数学家。Hartley 的 cas（余弦加正弦）函数也已得到广泛认可。

我们为那些喜欢自己编写程序的读者提供了一些伪码段。把它们翻译成你所选择的语言，可以对代数的和图形的观点给出一些补充的理解。进一步地，执行数值例子可以得到一种有用的直觉，虽然没有物理直觉那么强有力，但这使我们在经验上又增加了一个维度。伪码适合于那些并非会好几种语言的读者。目标是提供简单且易于理解的指令，这些指令易于改写为读者的流畅的语言，读者要提供必要的规程、数组声明，以及其他不同的特征。

书中给出代码段是为了弥补口头解释的不足，并不适合代替计算工具包。

然而，能使用计算机算法常常比理解它的构成细节更重要，就像使用积分表或工程设计手册。为了满足这一需要，并使强大的傅里叶变换应用于更广的领域，人们创建了一些商业软件工具包，这些工具包已经变得非常必要。例如，广为流行的 MATLAB，它是一个用户友好的高级专用工具包，第 7 和 11 章阐述了它的应用。

在用户不知道算法细节的情况下，需要多加小心；在用计算机输出表示以前可以方便地知道期望的输出。由于这样或那样的原因，在图示集中用图形表示变换已被证明是一个很有用的参考。图形表达是关于积分变换出版物的有用的辅助手段，有时我们很难在大量的罕见例子中寻找常用的条目，而且像冲激、不连续或逐段定义的这种简单函数，或许很难辨认或许根本就不包含在其中。

在合适的阶段选用好的习题对学生是相当有用的，但很难编出好的习题。本书中的许多习题都包括技术背景或要求给出看法，超越了数学练习。那些希望挖掘习题中的好内容的人会发现习题中好的内容都加了标题，这是一种应该广泛采

用的习惯。第 21 章给出了许多习题的解，但偶尔有一个主题的练习紧跟在内容的后面而不是在章节的末尾，这种情况不是很多。

符号是思考的重要辅助工具，我很高兴地告诉大家，我们从 D. M. Woodward 那里学到的 **sinc 函数**非常有效，它遭受了那些不懂得“sine x 比 x”并非 sinc 函数的作者们的误解和反对而幸存下来。**单位矩形函数**（单位高度和宽度）$\Pi(x)$，是 sinc 函数的变换，已被证明相当有用，对于板书来说更是如此。在打字稿或其它不太希望使用希腊字母的地方，$\Pi(x)$可以写作“rect x”，在任何情况下把它读作 rect 都是很方便的。**jinc 函数**，类似于圆形的 sinc 函数，具有相应的归一化性质，并且可用于描述一个望远镜或照相机的衍射场。***shah* 函数** $\text{III}(x)$ 容易理解，它易于打印，而且比你想象的还要有用，因为它的变换仍然是它本身。用星号表示卷积，Volterra 已用了很长时间，或许更早一些时候就开始使用了，现在它已经得到了广泛的应用。另外，我建议用“$*$ $*$”表示二维卷积，作为图像处理快速增长的结果，二维卷积越来越普遍。

早先，有关傅里叶变换的教材中对数字卷积的强调仅仅是个开始。几年内，卷积已从一个相当高深的概念变成了一个在初期阶段就很容易理解的概念，它适用于所有对正弦激励产生正弦响应的系统。

目 录

第 1 章

绪 论

线性变换,尤其是傅里叶变换和拉普拉斯变换,是众所周知的解决线性系统问题的技术。人们常将变换作为一种数学或物理工具,把问题转换到可以解决的域内。本书试图成为理解和使用线性系统变换方法的指南。

通过对傅里叶变换的讨论可以达到上述目标。因此,当在后面讨论更一般的拉普拉斯变换时,许多性质我们已经熟知,这使我们可以将注意力集中于复平面上的收敛域这一新的本质问题。实际上,这里讨论的所有的其它变换大部分都是通过傅里叶变换阐明的。

在许多科学分支的理论中,傅里叶变换都扮演着重要的角色。就像其它变换一样,它们可以被单纯看作数学泛函。同时,在很多领域,它们恰好和它们所起源的函数一样有明确的物理意义。一个波形——光的,电的,声的——和它的谱可以同样地理解为实际上可想象的和可测量的实体:示波器可使我们看见电波形,而分光镜或频谱分析仪使我们可以看见光的或电的谱。我们对声音的鉴别甚至更为直接,因为耳朵听到的是谱。波形和谱互为傅里叶变换,因此,傅里叶变换是一个不寻常的物理关系。

傅里叶变换应用的领域之多是令人吃惊的。通常,在研究的一个学科分支中的熟悉概念,在另一个学科分支中稍有不同。例如,相衬显微镜的原理使我们联想到鉴频调制电路,对两者的解释都可以采用变换形式用同样的方法方便地进行。再比如,统计学中的问题可以使用在级联放大器研究中熟悉的方法。这仅仅是出现在不同物理实体的傅里叶理论的基本原理的一个实例。

将已有的经验从一个物理领域转移到另一个物理领域是很有益的,但有必要重新解释新领域的术语。傅里叶变换涉及各种各样丰富的应用,可见,傅里叶理论是非常普及且万能的数学工具。

许多科学家认识和理解傅里叶理论是基于一组有关物理现象的命题,而并非着眼于其数学含义。定理的物理对应往往是物理上显而易见的事实,这使得科学家可以理解那些在数学理论中十分抽象的问题。强调物理解释可以使我们用简单的方法处理通常被认为很高深的问

题。

虽然傅里叶变换在许多领域中都很重要，它还是常出现在正式的数学课程中，位于傅里叶级数章节的最后一部分。随着需求的增长，它被特别引入后面的研究生课程，但却没有发展成一个有用的工具。如果把这个传统的介绍顺序反过来，傅里叶级数可以看作是傅里叶变换理论范围内的一种极端情况，级数所特有的数学困难可看作与它的极端性质（它是非物理的）有关。这就摆脱了由传统的方法强加给傅里叶变换学习的障碍。

由于它惊人的普遍性，傅里叶变换毫无疑问应该是开宗明义的一部分。根据经验这种精练的理论可以在课程的一开始就引入，它包罗万象的应用将有效地启发人们认识和解决自然界中的问题。

本工作起始的目的是为了给一般数学形式的傅里叶变换做一个辅助图像的形象描述。但这样的话，解释图像的字句会比图像本身的数量更庞大。尽管如此，傅里叶变换的形象描述还是很重要，因为其利于加强直觉。许多重要的和常用的函数也都包含在形象描述之中。这些函数往往在其他的表达方式中都找不到，因为代数的表达方式太复杂。

通过对一些通常为逐段定义的基本函数引入简洁的符号，可有助于对简单但不便于使用的函数进行处理。例如，矩形脉冲，它至少和高斯脉冲一样简单，记为$\Pi(x)$，这意味着它可以像一个简单函数一样处理。在电子学中使用了生动的术语“门函数”，使人联想到门波形$\Pi(t)$是如何打开一个阀门让一个波形的一段通过的，这就是我们用矩形函数作为乘积因子时考虑它的方法。

所引入或借用的特殊符号还有偶冲激对$\mathrm{II}(x)$和$\mathrm{III}(x)$（发音为 *shah*），$\mathrm{III}(x)$是用$\mathrm{III}(x)=\sum\delta(x-n)$定义的无限冲激序列。第一个符号之所以重要是因为它是余弦函数的傅里叶变换；第二个符号在讨论均匀采样（等效为与 *shah* 相乘）和周期函数（可表示为与 *shah* 的卷积）时是不可缺少的。*shah* 被证明是它自己的傅里叶变换，这使得它成为一个比所期望的更加有用的实体。通过使用这些约定的符号可以使表达变得更自由，尤其是和表示卷积的星号一起使用时，只需要用$\Pi(x)*f(x)$或简写为$\Pi*f$，来取代

$$\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f(u)\mathrm{d}u$$

（例如，用一个缝隙扫描音轨时，对音轨上的光密度分布$f(x)$的响应）。而积分变量和定积分符号的消失，以及Π和f之间卷积符号的出现使得代数处理和心算都很方便。

这里卷积用得很多，经验表明，当直接用积分形式的定义表示卷积时，它是一个很难理解的概念，但是如果首先理解了泛函的概念，它就比较容易理解了。序列积的数值计算过程给出了对卷积的直观理解，而且附带地把人们的注意力引向了数值计算的实用特征：为了数值计算，人们更希望一个问题的解以两个函数卷积的形式，而不是以傅里叶变换的形式出现。

这里应该说明的是变换方法并不一定要涉及对数值的变换过程。相反，处理线性问题的一些好的方法根本就不涉及到对数据进行具体的傅里叶或拉普拉斯变换应用计算，但这些方法的基础常常是诉诸到变换域才能搞明白的。依据变换理论，我们可以说明如何避免数值谐波分析或者处理复平面上的数据。

众所周知，在满足线性和时不变性两个条件时，系统对谐波输入的响应是同频率的谐波。当然，这些条件通常都能满足。这就解释了为什么傅里叶分析非常重要，为什么我们用频率响

应描述一个放大器，为什么谐波变化无处不在。当对谐波激励的响应是谐波的条件不满足时，与在非线性伺服机构中的处理方法相同，将激励分解成谐波分量的方法的正确性就必须重新考虑。即使线性不成立，时不变性通常也是存在的，但空间不变性却并非普遍满足。这些条件的失效使得我们无法通过把负载分布分解成正弦分量(空间谐波)的形式来研究桥的变形。

谐波激励引起谐波响应所需的两个条件可以表示为一个条件：响应和激励可以通过卷积建立关系。应用傅里叶分析的过程中，卷积是极为重要的。对于卷积这种普遍的现象，不难找到大家熟悉的例子。一个比较好的例子是，胶片音轨或磁带上的分布与通过扫描缝隙或磁头读出的电信号之间的关系。

这里介绍了许多通常认为高深难懂的问题，并且借助于方便的符号和图形简化了它们的表示。

我们格外谨慎地使用和表示冲激符号 $\delta(x)$，比如 $\mathrm{II}(x)$ 和 $\mathrm{III}(x)$ 都依赖于它。术语“冲激符号”强调 $\delta(x)$ 并非函数；因此，包含它的方程或表达式必须加以说明，借助于脉冲(不是冲激)序列可以给出一个基本的解释方式。在很多例子中，含有冲激符号的表达式都具有极限“存在”的意义。与 $\delta(x)$ 不同，普通的完全数学表达式直接反映了物理情形；这种情况下，在测量仪器的分辨力所允许的范围内，格林函数、冲激响应和其它类似的函数通常都能精确地产生和观察，而冲激本身是虚构的。认为所有包含 $\delta(x)$ 的表达式都服从特定的规则的情况下，我们能够保持对 $\delta(x)$ 进行严格而又直接的处理，而且这种处理方法是非常成功的。

大家熟悉的物理情形有静止在横梁上的一个质点产生的矩，以及点电荷的电场。在处理这些问题的物理方法中，我们考虑越来越小、越来越密的块状物体或电荷量产生的结果，并注意该结果是否趋于一个确定的极限。其数学表达在最近几年才整理得令数学家满意，现在，只要加上适当的脚注指出最近的这些文献，便允许使用 $\delta(x)$，虽然在诸如统计这样一些守旧的领域，为便于同更难处理的 Stieltjes 积分相区分，有时仍要避免使用它。这些数学思想的发展将在第 5 章和第 6 章有关 Temple 和 Lighthill 的广义函数表述中论及。原始的物理思想的有效性不受影响，例如，我们可以借助于由宽度越来越窄、高度越来越高的负载所引起的压力的矩形分布来讨论横梁上一个质点的矩。由于在其它的一些问题中仅涉及到高阶微分，所以，我们不必要把注意力局限于具有无穷阶连续导数的压力分布。因此，借助于简单的矩形函数，我们引入了冲激这一主题，在相对较少地要求一阶导数存在的情况下，我们用三角窗函数取而代之。

第 2 章

基本原理

本章中大多数内容的叙述都不带证明，因为证明会使讨论更冗长（事实上，它们构成了傅里叶理论传统学习的大部分内容）而且远离了当前工作的主题。

省略证明使我们可以把变换公式及它们的已知条件作为我们的出发点。由于选择适当的符号也是著作的重要组成部分，本章对此也作了讨论。

傅里叶变换和傅里叶积分定理

$f(x)$ 的傅里叶变换定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi xs}dx。$$

这个积分是 s 的函数，可以记为 $F(s)$。用同样的公式对 $F(s)$ 变换，我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{-i2\pi\omega s}ds。$$

当 $f(x)$ 是 x 的偶函数时，即当 $f(x)=f(-x)$ 时，重复变换得到 $f(\omega)$，它与我们开始时的函数相同。这就是傅里叶变换的循环特性，而且由于循环是两步循环，这意味着如下的互易特性：如果 $F(s)$ 是 $f(x)$ 的傅里叶变换，那么 $f(x)$ 也是 $F(s)$ 的傅里叶变换。

然而，循环和互易特性是不完美的，因为当 $f(x)$ 是奇函数时，即当 $f(x)=-f(-x)$ 时，重复变换得到 $f(-\omega)$。一般地，不论 $f(x)$ 是奇函数、偶函数或者两者都不是，重复变换将得到 $f(-\omega)$。

可逆性傅里叶变换的常用公式为：

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi xs}dx$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{i2\pi xs}ds。$$

使用这种形式，两个连续的变换将得到原函数。然而，第二个变换与第一个变换并不完全一致，

因此有必要对这两种傅里叶变换加以区分。我们将把 $F(s)$ 称为 $f(x)$ 的 $-\mathrm{i}$ 变换而把 $f(x)$ 称为 $F(s)$ 的 $+\mathrm{i}$ 变换。

把两个连续的变换写成重积分，就得到了傅里叶积分定理的常用描述

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi xs}\,\mathrm{d}s。$$

等式成立的条件将在下节给出，但要立即说明的是，在 $f(x)$ 的不连续点上，等式的左边应该为 $\frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)]$，也即，当从两侧逼近不连续点 x 时，等式的左边应该为 $f(x)$ 的不相等极限的均值。

可以把变换公式中出现的因子 2π 与 s 看成一体，得到下面的形式（方式 2）：

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xs}\,\mathrm{d}x$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xs}\,\mathrm{d}s。$$

为了对称，有些作者有时把它写为（方式 3）：

$$F(s)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xs}\,\mathrm{d}x$$

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}F(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xs}\,\mathrm{d}s。$$

所有的三种形式通用，但这里我们把 2π 写在指数上（方式 1）。如果 $f(x)$ 和 $F(s)$ 是方式 1 中的变换对，那么 $f(x)$ 和 $F(s/2\pi)$ 是方式 2 中的变换对，而 $f[x/(2\pi)^{\frac{1}{2}}]$ 和 $F[s/(2\pi)^{\frac{1}{2}}]$ 是方式 3 中的变换对。下面是变换对在三种方式下的例子。

方式 1		方式 2		方式 3	
$f(x)$	$F(s)$	$f(x)$	$F(s)$	$f(x)$	$F(s)$
$\mathrm{e}^{-\pi x^2}$	$\mathrm{e}^{-\pi s^2}$	$\mathrm{e}^{-\pi x^2}$	$\mathrm{e}^{-s^2/(4\pi)}$	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}s^2}$

可以用来代替 $F(s)$ 的一个极好的符号是 $\overline{f}(s)$，两种符号各有优缺点。上面带横杠的符号表达式紧凑，书写方便，利于板书，但不太适合排版。例如，考虑卷积定理的这些形式

$$\overline{FG}=\overline{F}*\overline{G}$$

$$\overline{F*G}=\overline{F}\,\overline{G}$$

$$\overline{\overline{F}\,\overline{G}}=F*G$$

$$\overline{\overline{F}*\overline{G}}=FG$$

显示出了用大写标记中根本不能表示的细微差别。由带横杠的符号所带来的表达上的方便可见第 6 章。然而当必须处理复共轭或用撇号表示微分时，就有些很不方便了；而使用大写符号就不存在这些问题。因此，我们改变了只采用一种符号的通用习惯。在早期的数学章节中，f 和 g 几乎是仅有的表示函数的符号，因此主要使用大写符号。在物理章节中，诸如 E 和 H 这样的大写已经用于物理量的表示了，因此，更自然地使用带横杠的符号。

以上两种符号均不适合用作"$\exp(-\pi x^2)$ 的傅里叶变换是 $\exp(-\pi s^2)$"的等效的符号叙述；然而我们可以写

$$\mathscr{F}e^{-\pi x^2}=e^{-\pi s^2}$$

或

$$e^{-\pi x^2}\supset e^{-\pi s^2}$$

在第一式中，$\mathscr{F}$可以被看作一个泛函算子，它把一个函数转换为它的变换。虽然它可以用在使用带横杠的符号和大写符号的地方，但是它更适合用在诸如上面的那些与特定函数有关的地方。它适于当词缀使用（例如 $\mathscr{F}_s$，$\mathscr{F}_c$ 和$^2\mathscr{F}$），也适于与其它变换的符号混合使用。通过使用 $\mathscr{F}^{-1}$ 作为$\mathscr{F}$的逆，它可以用来区分$-$i变换和$+$i变换；或者与使用横杠符号一样，而与使用大写符号不同，不必特殊说明$\mathscr{F}$是正变换，而 $\mathscr{F}^{-1}$ 是逆变换。这一符号的这些性质使其成为不可缺少的表达方式，且在后续章节得以应用。

符号 $\supset$ 没有$\mathscr{F}$那么灵活，但它简单，并且对代数操作很有用；它也被用于表示拉普拉斯变换，并且偶尔会用 $\subset$ 表示逆变换。不可逆性也用"$\rightleftharpoons$"和它的反转来表示，但它不能明确地指出哪个是正变换哪个是反变换。我们不推荐使用符号 $\rightarrow$ 和符号 $\Rightarrow$，因为它们分别表示"趋于"和"蕴涵"的意思。对于诸如余弦变换、希尔伯特变换和哈特利变换等可逆变换来说，符号"$\leftrightarrow$"和符号"$\Leftrightarrow$"很适合用来表示对称性。

傅里叶变换存在的条件

电路专家发现每个波形显然都有一个谱，天线设计者确信每个天线都有一个方向图。对那些通过物理经验而不是数学来了解傅里叶变换的人来说，有时会对有些函数没有傅里叶变换感到很奇怪。然而，我们确信没有人能生成一个没有谱的波形，也没有人能设计出没有方向图的天线。

当被变换的函数是一个物理量的精确描述时，变换的存在性问题确实可以忽略。物理可实现性是变换存在的一个有效的充分条件。然而，用一个简单的数学表达式代替一个物理量有时会比较方便。例如，经常会考虑下面的波形

$\sin t$ （谐波，纯交流）

$H(t)$ （阶跃）

$\delta(t)$ （冲激）。

严格地讲，可以证明上面三个函数的傅里叶变换均不存在。当然，它们之中没有一个是物理可实现的，因为波形 $\sin t$ 要求能达到无穷远的过去，阶跃 $H(t)$ 要求在无限长的时间内保持稳定，而冲激 $\delta(t)$ 要求在一个无限短的时间内必须具有无穷大的值。然而在给定的情况下，我们常常可以得到相当近似的形式，使用这种简单的数学表达式是因为它们比那些只有少许差别但可以实现的函数更精练。然而，以上这些函数没有傅里叶变换，即傅里叶积分不能对所有的 s 都收敛。这就是具体考虑变换存在条件的重要性。

对一个单值函数 $f(x)$ 进行变换和逆变换，我们有如下重积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i2\pi sx}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i2\pi sx}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}s。$$

倘若1. $|f(x)|$ 从 $-\infty$ 到 ∞ 的积分存在；2. $f(x)$ 中的任何断点都是有限的，则上述表达式等于 $f(x)$（或者在 $f(x)$ 的不连续点等于$\frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)]$）。

下面会涉及更多的但不是很重要的条件。在物理情况下，具有无限能量的信号就违背了这

些条件①，通常要注意到这两个条件之间的一种对偶性。例如，已经流着并将一直流下去的绝对稳定的直流电流具有无限能量，这违背了第一个条件。频域的能量分布表现为无限的能量完全集中在零频上，这违背了第二个条件。这些讨论同样适用于谐波。

需要指出的是，通常在有限区间内有无穷多个最大值和最小值的函数，其傅里叶变换是不存在的，一个现成的例子是 $\sin x^{-1}$（见图 2.1），随着 x 趋于零，它的振荡频率不断增加。这种行为在实际生活中是不重要的，即使作为近似也是不重要的。因此我们通常关心那些在有限的区

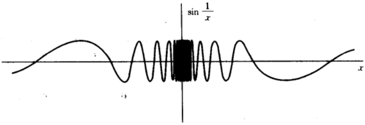


图 2.1　一种具有无穷多极大值的函数

间内具有无穷多个极大值和极小值但变换确实存在的函数。当它的“*有界变差*”② 存在时，变换就存在。然而，有一些在有限区间具有无穷多个最大值且变差无界的函数，其变换是存在的，要求 $f(x)$ 满足 Lipschitz 条件③就涵盖了这种情况。后来，Dini 使用了一个更宽松的条件。这在傅里叶理论中是一个令人着迷的主题，但是它与我们所关心的物理应用没有直接的关系。此外，我们决不打算放弃那些在普通意义上傅里叶变换不存在的有用函数。相反，我们通过傅里叶变换在极限情况下的推广同样把它们包括起来。现在，在需要区别的情况下，傅里叶变换存在的条件只是区别普通的变换和极限情况下的变换。

极限情况下的变换

虽然周期函数的傅里叶变换不存在，这一点可以通过考察傅里叶变换的存在条件来验证，然而物理上认为周期函数具有“线谱”。线谱可以用周期函数的傅里叶级数的系数来表示，或者，我们可以拓展傅里叶变换的数学概念使之与物理观点相一致。这就是我们将要做的，把周期函数看作傅里叶变换所包含的一个特例。

令 $P(x)$ 是 x 的一个周期函数。那么

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\ P(x)\ |\ \mathrm{d}x$$

不存在，但是如果我们通过乘以类似 $\exp(-\alpha x^2)$ 的一个因子，其中 α 是一个小正数，对 $P(x)$ 稍作修正，那么修正后的函数的傅里叶变换也许是存在的，因为

---

① 诸如 $(1+|x|)^{-3/4}$ 和 $x^{-1}\sin x$ 这样的有限能量函数就是一个例外，然而它们不具有绝对收敛的无穷积分。

② 如果函数 $f(x)$ 对任意的划分方法 $a<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<b$，都存在一个数 M 使得

$$|f(x_1)-f(a)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\cdots+|f(b)-f(x_{n-1})|\leqslant M$$

那么我们说函数 $f(x)$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上是有界变差的。任意绝对可积的函数都具有有界变差。

③ 一个函数 $f(x)$，如果对所有 $|h|<\epsilon$

$$|f(h)-f(0)|\leqslant B|h|^{\beta}$$

其中 B 和 β 与 h 无关，β 是正的，且 α 是存在有限 B 时所有 β 的上界，那么函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 满足 α 阶的 Lipschitz 条件。

$$\int_{-\infty}^{\infty} | e^{-\alpha x^2} P(x) | dx$$

也许存在。当然，$P(x)$ 中的任何无穷间断点都将会使傅里叶变换不存在，但假设我们选择 $P(x)$ 使得 $\exp(-\alpha x^2)P(x)$ 存在傅里叶变换，那么当 α 趋于零时，对每个 x 的值修正因子都趋于 1，因此在极限情况下，随 α 趋于零修正的函数序列趋于 $P(x)$。由于每个修正的函数都具有傅里叶变换，因此存在相应的变换序列；那么，随 α 趋于零，这个变换的序列是否也趋于一个极限？我们已经知道它的傅里叶变换是不存在的，至少不是对所有的 s 都存在；我们可以说规则的变换序列定义或构成了被称为广义函数的实体。在极限情况下，周期函数和广义函数构成了傅里叶变换对。

在与冲激符号 $\delta(x)$ 有关的物理现象中建立了处理这种不是函数但可以用函数序列描述的思想。在这种情况下，一组强度越来越强、宽度越来越窄的单位面积脉冲就构成了一个相应的序列，在稍后的章节中，这种思想将得到深入的讨论。我们会使用术语“广义函数”来表示冲激和类冲激。

周期函数没有傅里叶变换是由于它们在无穷区间的积分不是绝对收敛的；傅里叶变换不存在也可能是由于函数具有与冲激相关的无穷间断点。在这种情况下，我们用一个傅里叶变换存在的函数序列代替那个冲激，那么相应的变换序列也许趋于一个极限，从而我们又有了一个极限情况下的傅里叶变换对。和前面一样，变换对中只有一个函数是包含冲激的广义函数。

也可能会有变换的序列并不趋于一个极限的情况。如果我们处理的是既有冲激又是周期的函数，就会发生这种情况。那么，极限情况下变换对中的两个成员都是包含冲激的广义函数。

这里，我们可以先进行一些关于广义函数定义的基础工作，把严格而一般性讨论放在更后一些的阶段，因为在熟悉处理冲激符号 $\delta(x)$ 后再讨论它可以理解得更容易、更深刻一些。

奇偶性

对称性在傅里叶理论中扮演着重要的角色。从对称性的观点可以直接证明某个积分为零，而不需要计算它们，这一点我们很熟悉，或许在出版物中很常见。然而，我们需要更进一步发掘函数本身的对称限制以及其傅里叶变换所产生的相应约束性质。这里我们重温一些简单的术语。

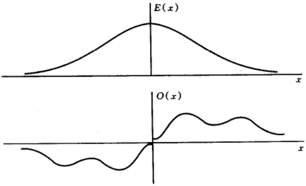


图 2.2 偶函数 $E(x)$ 和奇函数 $O(x)$

如果 $E(-x)=E(x)$，则函数 $E(x)$ 称为对称函数或偶函数。而如果 $O(-x)=-O(x)$，则函数 $O(x)$ 称为反对称函数或奇函数（见图 2.2）。一般情况下，奇函数和偶函数的和既不是偶函数也不是奇函数，如图 2.3 所示，它是图 2.2 中偶函数和奇函数的和。

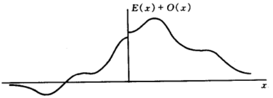


图 2.3 $E(x)$ 与 $O(x)$ 的和

任意函数 $f(x)$ 都可以无二义地分解为奇部和偶部。因为如

果 $f(x)=E_1(x)+O_1(x)=E_2(x)+O_2(x)$，那么 $E_1-E_2=O_2-O_1$；但 E_1-E_2 是偶的，O_2-O_1 是奇的。所以 E_1-E_2 一定为零。

给定函数的偶部是函数和它的关于纵坐标轴映像的平均，而奇部是函数及其关于纵坐标轴负映像的平均(参见图 2.4)。这样

$$E(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$$

$$O(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]。$$

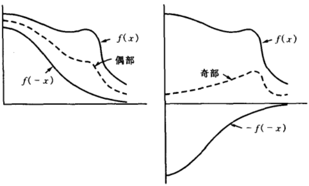


图 2.4　给定函数 $f(x)$ 的偶部和奇部的构成

奇部和偶部的函数分解结果是随 x 原点的变化而变化。诸如 $\cos x$ 这样的一些函数通过原点的移位可以从地道的偶函数变为地道的奇函数。

奇偶性的意义

设

$$f(x)=E(x)+O(x)$$

其中 E 和 O 一般是复的。那么 $f(x)$ 的傅里叶变换可以简化为

$$2\int_0^\infty E(x)\cos(2\pi xs)\,\mathrm{d}x-2\mathrm{i}\int_0^\infty O(x)\sin(2\pi xs)\,\mathrm{d}x。$$

由此可得如果函数是偶的，它的变换也是偶的，以及如果函数是奇的，它的变换也是奇的。全部结论是

实的偶的	实的偶的
实的奇的	虚的奇的
虚的偶的	虚的偶的
复的偶的	复的偶的
复的奇的	复的奇的
实的非对称	复的 Hermitian
虚的非对称	复的反 Hermitian
实的偶的加虚的奇的	实的
实的奇的加虚的偶的	虚的
偶的	偶的
奇的	奇的

这些性质可以总结成下面的图表：

$$f(x)=o(x)+e(x)=\mathrm{Re}\,o(x)+\mathrm{iIm}\,o(x)+\mathrm{Re}\,e(x)+\mathrm{iIm}\,e(x)$$

$$F(s)=O(s)+E(s)=\mathrm{Re}\,O(s)+\mathrm{iIm}\,O(s)+\mathrm{Re}\,E(s)+\mathrm{iIm}\,E(s)$$

图 2.5 用图形形象地表示了这些现象，通过它可以很方便地看出“奇对称的相对意义”：当

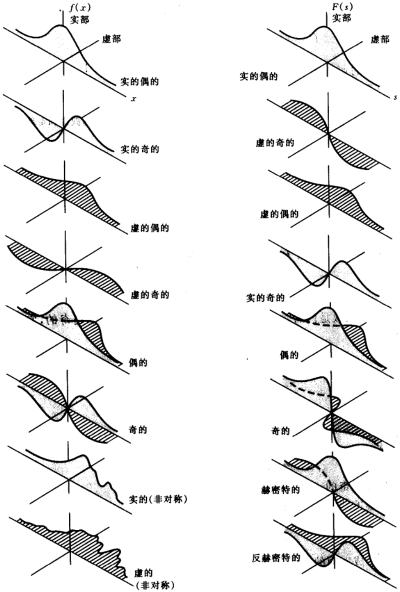


图 2.5 函数及其傅里叶变换的对称性质

$f(x)$ 是实的奇函数且具有正的片段时，$F(s)$ 的奇部是虚的且具有一个负片段；当 $f(x)$ 是实的但不必是奇的时候，我们也可以发现与奇对称相反的意义。然而，逆过程 —— 即，从 $F(s)$ 到 $f(x)$，或者把 $f(x)$ 取成虚的 —— 产生同样的奇对称意义。

实的偶函数在本书中具有特殊的作用，因为它们以及它们的变换很容易作图，在这方面，虚的奇函数、实的奇函数以及虚的偶函数也很重要。

一个实部是偶函数而虚部是奇函数的函数 $f(x)$ 拥有另一种特殊的对称性，这样的函数被称为 Hermitian 的(见图 2.6)，通常可以简明地把这个性质定义为

$$f(x) = f^*(-x)$$

正如上面所提到的，它的傅里叶变换是实的。作为处理此类问题的代数过程的一个例子，考虑

$$f(x) = E + O + \mathrm{i}\hat{E} + \mathrm{i}\hat{O}$$

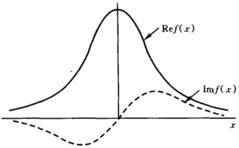


图 2.6 Hemitian 函数的实部为偶对称，虚部为奇对称，其傅里叶变换是实的

那么

$$f(-x) = E - O + \mathrm{i}\hat{E} - \mathrm{i}\hat{O}$$

和

$$f^*(-x) = E - O - \mathrm{i}\hat{E} + \mathrm{i}\hat{O}。$$

如果我们要求 $f(x) = f^*(-x)$，必须有 $O = 0$，$\hat{E} = 0$，因此 $f(x) = E + \mathrm{i}\hat{O}$。

复共轭

函数 $f(x)$ 的复共轭的傅里叶变换为 $F^*(-s)$，也就是变换的共轭的镜像。其中的特例可总结如下：

$$\text{若 } f(x) \text{ 是}\begin{cases}\text{实的}\\\text{虚的}\\\text{偶的}\\\text{奇的}\end{cases} \quad \text{则 } f^*(x) \text{ 的变换为}\begin{cases}F(s)\\-F(s)\\F^*(s)\\-F^*(s)\end{cases} = F^*(-s)$$

相关的描述列表如下：

$$\begin{aligned}f(x) &\supset F(s)\\ f^*(x) &\supset F^*(-s)\\ f^*(-x) &\supset F^*(s)\\ 2\mathrm{Re}f(x) &\supset F(s) + F^*(-s)\\ 2\mathrm{Im}f(x) &\supset F(s) - F^*(-s)\\ f(x) + f^*(-x) &\supset 2\mathrm{Re}F(s)\\ f(x) - f^*(-x) &\supset 2\mathrm{Im}F(s)\end{aligned}$$

余弦和正弦变换

对正的 s，函数 $f(x)$ 的余弦变换定义为

$$2\int_0^\infty f(x)\cos 2\pi sx\,dx。$$

如果 $f(x)$ 是偶函数，余弦变换与傅里叶变换是一致的。一般情况下，$f(x)$ 的傅里叶变换的偶部等于 $f(x)$ 偶部在 $s>0$ 时的余弦变换。

应当注意到，与定义相符，余弦变换没有考虑 $f(x)$ 的坐标原点左边的部分，它仅定义了坐标原点右边的部分。

用 $F_c(s)$ 表示 $f(x)$ 的余弦变换，那么余弦变换以及从 $F_c(s)$ 得到 $f(x)$ 的逆变换是完全一致的，这样

$$F_c(s)=2\int_0^\infty f(x)\cos 2\pi sx\,dx,\ s>0$$

$$f(x)=2\int_0^\infty F_c(s)\cos 2\pi sx\,ds,\ x>0$$

对正的 s，$f(x)$ 的正弦变换定义为

$$F_s(s)=2\int_0^\infty f(x)\sin 2\pi sx\,dx$$

此变换和它的逆变换也是一致的，这样

$$f(x)=2\int_0^\infty F_c(s)\sin 2\pi sx\,dx,\quad x>0$$

$s>0$ 时，我们说，$f(x)$ 的傅里叶变换的奇部的 i 倍等于 $f(x)$ 奇部的正弦变换。

如果在坐标原点的左边 $f(x)$ 为零，那么

$$F(s)=\frac{1}{2}F_c(s)-\frac{1}{2}\mathrm{i}F_s(s)。$$

或者对任意 $f(x)$，重述这一性质，有

$$\frac{1}{2}F_c(s)-\frac{1}{2}\mathrm{i}F_s(s)=\mathscr{F}f(x)H(x)。$$

其中 $H(x)$ 是单位阶跃函数（当 x 为正时等于 1，而当 x 为负时等于 0）。

对 $x>0$ 给定 $f(x)$，其余弦变换可表示为偶函数 $f(x)+f(-x)$ 的傅里叶变换；同样地，$-\mathrm{i}$ 倍的正弦变换是奇函数 $f(x)-f(-x)$ 的傅里叶变换：

$$F_c(s)=\mathscr{F}[f(x)+f(-x)]\text{ 和 }-\mathrm{i}F_s(s)=\mathscr{F}[f(x)-f(-x)]。$$

通过查找傅里叶变换图示集（第 22 章）中的偶（奇）函数，我们可以很容易地得到余弦（正弦）变换。余弦和正弦变换表对于求解奇函数或偶函数的傅里叶变换也非常有用，主要的表格采用 $g(\omega)=\int_0^\infty f(x)\,{\cos \atop \sin}\,\omega x\,dx$ 作为定义。显然这里没有乘以 π，当变换求逆时，应记住 $g(x)$ 的变换是 $\frac{1}{2}\pi f(\omega)$。

公式的含义

毫无疑问，Habitues 在傅里叶分析中意识到用图形解释傅里叶积分。由于变换积分包含一个复数因子，或许经常画的是较为简单的余弦或正弦的版本。这样，给定 $f(x)$，我们画出一个振荡的 $f(x)\cos 2\pi x$（见图 2.7a），介于 $f(x)$ 与 $-f(x)$ 包络之间，因为 $F_c(s)=2\int_0^{\infty} f(x)\cos 2\pi xs\,dx$，所以 $f(x)\cos 2\pi sx$ 下面积的两倍就是 $F_c(s)$，在图 2.7b 中，这个面积实际

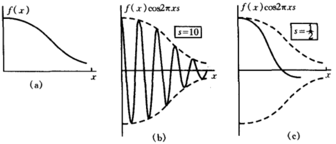


图 2.7　$f(x)$ 与 $\cos 2\pi xs$ 的乘积视为 x 的函数

上趋于零，而这意味着 s 的值相当大，图 2.7c 是 s 值较小的情况。

这样，对离散的 s 值，傅里叶积分是可以形象化图示的。s 的含义相当重要，它表示余弦的频率，等于每单位 x 的周期数。

作为这种方法的一个练习，考虑下面代数描述的图形含义

$$F_c(s)\begin{cases}\to 0 & s\to\infty \\ =2\int_0^{\infty} f(x)\,dx & s=0。\end{cases}$$

正弦变换也可用同样的方法作图，复变换可以用奇部和偶部的组合来作图。

把被积式 $f(x)\cos 2\pi xs\,dx$ 看作幅度为 $f(x)dx$ 频率为 x 的余弦函数，也即把它看作 s 的一个函数，对 x 的固定值进行积分（如图 2.8a 所示）。同样，图 2.8b 和图 2.8c 是 x 为其它离散值时的图形。对 x 所有值的此类曲线求和即可得到 $F_c(s)$。对变换公式的这种感性认识方法来自于一种学习傅里叶级数中的练习，即通过对频率算术增加的正（余）弦函数的图形叠加来形象理解变换。

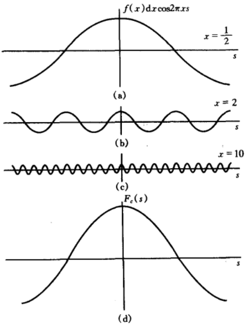


图 2.8　$f(x)dx$ 与 $\cos 2\pi xs$ 的乘积视为 s 的函数

每一种前述的观点都有两面性，这取决于我们考虑的是将函数分解成分量的

分析还是从分量合成函数的综合。奇怪的是无论是分析还是综合，都在做同样的事，这一事实简单地反映了傅里叶变换的互易特性。图 2.9 说明了第一种观点。如果我们可以针对特定值的 s 用切片表示函数表面，那么我们也可以想象针对特定值的 x 用切片来表示，这样我们可以得到第二种观点。

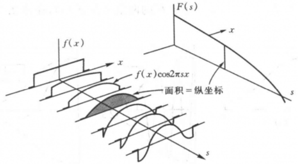


图 2.9　函数 $f(x)\cos 2\pi sx$ 的表面沿两可能方向之一方向上的切片图

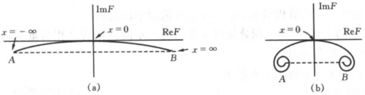


图 2.10　$F(s)$ 在复平面上的傅里叶积分
(a) 当 s 很小时；(b) 当 s 很大时

在更深一层的观点中，我们把 s 取为定值，在复平面上考虑问题(参见图 2.10)。通过因子 $\exp(-i2\pi sx)$ 使向量 $f(x)dx$ 旋转了一个 $2\pi sx$ 的角度。随着 $x \to \pm\infty$，被积式 $f(x)dx\exp(-i2\pi sx)$ 的幅度缩小而角度发生旋转，使得积分盘旋形成两个极限点 A 和 B。如图 2.10a 所示，向量 AB 表示 $F(s)$ 的无穷积分。图 2.10b 是 s 值较大时的情况，可以看到卷曲盘旋的速度加快。$s \to \infty$ 以及 $s = 0$ 时 $F(s)$ 的性态比较容易理解。

这种与 Cornu 螺线有关的图形在光衍射中很常见，是在光学与天线方面定性思考以及数值计算的得力工具。它起因于无线电波的传播，巧妙地总结了电离的流星轨迹反射的无线电回波的行为。或许可以用它来阐述很少使用它的领域中的问题。

参考书目

傅里叶积分　下面的列表包括了傅里叶积分的标准教材以及电气工程方面的后续书籍。

Beurling A.："Sur les Intégrales de Fourier Absolument Convergentes et Leur Application Aune Transformation Fonctionnelle," (Neuviéme congres des mathematiciens scandinaves), Finland: Helsingfors, 1939.

Bochner, S.："Vorlesungen über Fouriersche Integralem". Chelsea Publishing Company, New York, 1948

Bochner S. and Chandrasekharan K. :"Fourier Transforms" Princeton: Princeton University Press, N.J., 1949.

Bracewell, R. N.: "The Fourier Transform," *Scientific American*, vol. 260, pp. 86-95, 1989.

Bracewell, R. N.: "The Hartley Transform," Oxford University Press, New York, 1986.

Bracewell, R. N.: "Numerical Transforms," *Science*, vol. 248, pp. 697-704, 1990.

Bracewell, R. N.: "Two-Dimensional Imaging," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1995.

Brigham, E. O: "The Fast Fourier Transform," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1988.

Carleman, T.: "L'Intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent," Almqvist and Wiskells, Uppsala, Sweden, 1944.

Carslaw, H. S.: "Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals," Dover Publications, New York, 1930.

Champeney, D. C. :"Fourier Transforms and Their Physical Applications," Academic Press, London, 1973.

Gray, R. M., and J. W. Goodman: "Fourier Transforms for Engineers," Kluwer, Boston, 1995.

Körberm T,W,: "Fourier Analysis," Cambridge University Press, Cambridge, England, 1988.

Lighthill, M. J.: "An Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions," Cambridge University Press, Cambridge, England, 1958.

Paley, R. E. A. C., and N. Wiener: "Fourier Transforms in the Complex Domain," vol. 19, American Mathematical Society, Colloquium Publications, New York, 1934.

Papoulis, A.: "The Fourier Integal and Its Applications," McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.

Press, W. H., B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling: "Numerical Recipes: the Art of Scientific Programming," Cambridge University Press, Cambridge, England, 1990. See also successor volumes devoted to programs and examples in BASIC, C, FORTRAN 77, FORTAN 90, and PASCAL.

Sneddon, I. N. :"Fourier Transforms," McGraw-Hill Book Company, New York, 1951.

Titchmarsh, E. C.: "Introduction to the Theory of Fourier Integrals," Oxford University Press, Oxford, England, 1937.

Walker, J. S. :"Fourier Analysis," Oxford University Press, New York, 1988.

Wiener, N.: "The Fourier Integral and Certain of Its Applications," Cambridge University Press, Cambridge, England, 1933.

傅里叶积分表 因为作适当解释的拉普拉斯变换表是傅里叶积分的来源,所以这里包括了一部分拉普拉斯变换表。下面是更详尽的编辑资料。

Campbell, G. A., and R. M. Foster: "Fourier Integrals for Practical Applications," Van Nostrand Company, Princeton, N.J., 1948.

Doetsch, G., H. Kniess, and D. Voelker: "Tabellen zur Laplace Transformation," Springer-Verlag, Berlin, 1947.

Erdélyi, A.: "Tables of Integral Transforms," vol. 1, McGraw-Hill Book Company, New York, 1954.

McCollum, P., and B. F. Brown: "Laplace Transform Tables and Theorems," Rinehart

and Wilson, New York, 1965. It has over 500 Laplace transforms of the form that arise in electric circuits.

McLachlan, N. W., and P. Humbert: "Formulaire pour le calcul symbolique," 2d ed., Gauthier-Villars, Paris, 1950.

Tables of the one-sided Laplace transformation (in which the lower limit of integration is zero) are necessarily sources of Fourier transforms only of functions that are zero for negative arguments. A table of the double-sided Laplace transform is given in the following work.

Van der Pol, B., and H. Bremmer: "Operational Calculus Based on the Two-sided Laplace Integral," 2d ed., Cambridge University Press, Cambridge, England, 1955.

习题

1. 为了使 $x \to \pm\infty$ 时 $f(x) \to 0$，$F(s)$ 必须满足什么样的条件？

2. 证明如果 $f(x)$ 是实的，那么 $|F(s)|^2$ 是一个偶函数。

3. $\operatorname{sgn}x$ 在极限情况下的傅里叶变换是 $(i\pi s)^{-1}$。这两个函数违反了傅里叶变换存在的什么条件？($\operatorname{sgn}x$ 在 x 为正时等于 1，为负时等于 -1)

4. 证明所有的周期函数违反了一个傅里叶变换存在的条件。

5. 验证函数 $\cos x$ 违反了傅里叶变换存在的一个条件。证明对任何正的 α，$\exp(-\alpha x^2)\cos x$ 满足这个条件。

6. 求 $H(x)$，e^{ix}，$e^{-x}H(x)$ 的奇部和偶部，其中 $H(x)$ 对正的 x 等于 1，对负的 x 等于 0。

7. 画出 $[1+(x-1)^2]^{-1}$ 的奇部和偶部。

8. 证明两个函数乘积的偶部等于它们的奇部的乘积加上偶部的乘积。

9. 当 f 既不是偶函数也不是奇函数时，讨论 $\mathscr{F}\mathscr{F}f$ 和 f 的关系。

10. 证明 $\mathscr{F}\mathscr{F}\mathscr{F}\mathscr{F}f = f$。

11. 有人称 $\log x$ 的奇部是一个常数，这正确吗？

12. 一个奇函数的奇函数是一个奇函数吗？对偶函数的奇函数和奇函数的偶函数，我们能说些什么？

13. 证明一个实的奇函数的傅里叶变换是一个虚的奇函数。这与变换是 $+i$ 还是 $-i$ 有关系吗？

14. 一个函数如果满足 $f(x) = -f^*(-x)$，就称为 antihermitian 的。证明它的实部是奇的、虚部是偶的以及它的傅里叶变换是纯虚的。

15. 指出如下推理中的错误。"令 $f(x)$ 是一个奇函数。那么 $f(-a)$ 的值一定是 $-f(a)$；但这个值与 $f(a)$ 不相同。因此一个奇函数不能是偶的。"

16. 设函数 $f(x)$ 的奇部和偶部为 $o(x)$ 和 $e(x)$。证明下式与 x 的原点的移位无关，

$$\int_{-\infty}^{\infty} |o(x)|^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} |e(x)|^2 dx = \text{常数}。$$

17. 我们知道把一个函数分解为奇部和偶部与横坐标原点的选择有关。然而，奇部和偶部的平方的积分之和是一个与原点选择无关的常量。这个常量是什么？

18. 设一个实函数 $f(x)$ 的对称轴可以用如下的 a 值来定义，如果 o 和 e 分别是 $f(x-a)$

的奇部和偶部，那么随 a 的变化

$$\frac{\int o^2\,\mathrm{d}x-\int e^2\,\mathrm{d}x}{\int o^2\,\mathrm{d}x+\int e^2\,\mathrm{d}x}$$

有一个最大值或最小值。证明所有的函数至少有一个对称轴。如果存在多个对称轴，是不是两种对称轴的每一种都有任意多个。

19. 我们知道 $\cos x$ 是没有奇部的偶函数，原点的移位将使偶部减小、奇部增大，直到变成完全的奇函数。事实上，随着原点的移位，任何周期函数的偶部和奇部都会发生相对的大小变化。考虑"对称的横坐标"的设置方法以及与 x 的原点无关的"对称度"的定量度量。测试你的结论的合理性 —— 例如，在 $-1<x<1$ 范围内分别由 $\Lambda(x)$，$\Lambda(x)-\frac{1}{2}$，$\Lambda(x)-\frac{1}{4}$，给定的周期为 2 的函数。三角窗函数符号 $\Lambda(x)$ 可以参见第 4 章。

20. 函数 $f(x)$ 当 x 在 $-\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{2}$ 之间时等于 1，当 x 为其它值时等于 0。在复平面上画出 $F(s)$ 的精确轨迹，通过它测量 $F(0)$，$F(\frac{1}{2})$，$F(1)$，$F(1\frac{1}{2})$ 以及 $F(2)$ 的值。

21. 函数 $f(x)$ 当 x 比 1,2,3,4 和 5 小 0.01 时等于 100，其它地方为 0。在复平面上画出 $F(s)$ 的轨迹，通过它度量 $F(0.05)$ 的幅度和相位。

22. 自变换函数　早期出版的傅里叶变换表中包含两个变换是自身的函数，即 $\exp(-\pi x^2)$ 和 $\operatorname{sech} x$。1956 年，$\mathrm{III}(x)$ 也加入这个团体。当包括冲激时，还可以给出一些其它的例子，比如 $1+\delta(x)$。请对这种自变换函数提出一个通用的结构。

第 3 章

卷积

对两个函数进行卷积的思想是广泛存在的，这可以从它拥有的多种多样的别名中得到验证。随着卷积从单一的概念扩展到许多科学分支中去，“卷积”这个词也得到了更加普遍的应用。我们时常遇到的德语术语 Faltung（褶积）就像术语“合成积”一样是从法语中转化而来的。在特殊的领域可能遇到的术语包括叠加积分、Duhamel 积分、Borel 定理、（加权）连续平均、互相关函数、平滑、模糊、扫描以及弥散等。

就像后几个术语指出的那样，卷积描述了一个观测仪器在一些变量的小范围上对某些物理量进行加权平均的操作。常常发生的情况是，加权函数的形式不随变量中心值的改变而变化，观测到的量是所要求的量的分布和加权函数的卷积，而不是所要求的物理量本身的值。所有物理观测都以这种方式受到仪器分辨能力的限制，也正是由于这个原因，卷积是无所不在的。稍后我们将说明，卷积的出现是与线性加上空间或时间不变性联系在一起的，也是与“正弦激励正弦响应”相联系的。

卷积不仅作为一个物理概念有着广泛的意义，而且由于下面遇到的一个功能强大的定理，它还对理论发展提供了一个非常有利的起点。另一方面，由于卷积对计算的适应性，在我们开始数值计算之前，它也是理论研究的一个有益的终点。

两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的卷积是

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\mathrm{d}u$$

或简写为

$$f(x) * g(x)$$

卷积本身也是一个关于 x 的函数，记为 $h(x)$。

对于如何理解卷积有很多种思路。例如，假设给定 $g(x)$，则对每一个函数 $f(x)$，只要上述积分存在，就有一个 $h(x)$。如 Volterra 所说，我们可以认为 $h(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个泛函。应该

注意的是：为了计算 $h(x_1)$，我们必须知道在 x 的整个取值范围内的 $f(x)$，然而计算函数 $f(x)$ 在 $x = x_1$ 处的函数值，只要知道 $f(x_1)$ 的值就行了。

在图 3.1 中，阴影区域表示乘积 $f(u)g(x-u)$，$h(x)$ 的纵坐标值等于阴影区域的面积。

在图 3.2 中给出了另一个例子，其中 $g(x)$ 与图 3.1 中的 $g(x)$ 相同而 $f(x)$ 不同。这个例子说明了泛函 $h(x)$ 与 $f(x)$ 相互关系的一般特点。可以看到，$h(x)$ 在细节上比 $f(x)$ 更加平滑，更加伸展，而且总体的变化要小一些。

在另一种方法中，$f(x)$ 被分割为无穷小的柱条（见图 3.3）。每个柱条的作用将熔铸为以柱条为中心而具有 $g(x)$ 曲线形状的一段子波形（Heap）。图中只画出了两个这样柱条熔铸的子波形，而其他所有的也都可以如此画出。这样，$h(x)$ 就等于所

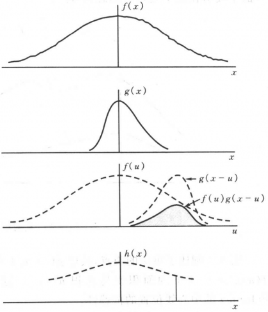


图 3.1 用阴影区域表示卷积积分 $h(x) = f(x) * g(x)$

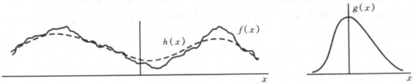


图 3.2 卷积($h = f * g$) 的平滑效果示意图

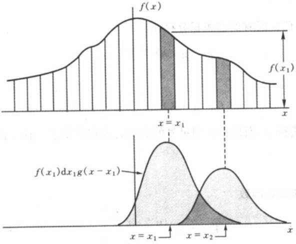


图 3.3 卷积积分看作是特性曲线贡献的叠加

有的子波形在点 x 处贡献的总和，即

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)g(x-x_1)\mathrm{d}x_1$$

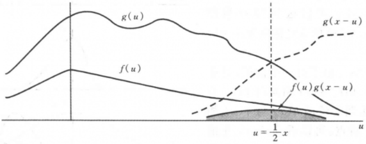


图 3.4　从褶积的观点看卷积

图 3.4 阐述了更深的观点，其中 $g(x)$ 关于直线 $u = x/2$ 作了翻转。和前面一样，乘积曲线 $f(u)g(x-u)$ 下的面积就是卷积 $h(x)$。从这个观点可以形象地看出卷积对翻转（德语 Faltung）的中心线位置的依赖性。

这些对卷积的理解并没有涵盖卷积积分的所有可能的解释方法，其它的一些将在后面给出。

应该注意到，在进行乘法和积分运算前，$g(x)$ 必须进行翻转。省却这个翻转操作也是可能的，在某些学科中这甚至是更加自然的做法。然而，翻转操作的结果是卷积具有交换律，即

$$f * g = g * f$$

或

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(x-u)\mathrm{d}u。$$

卷积还具有结合律（假设所有的卷积积分存在）

$$f*(g*h) = (f*g)*h$$

和对加法的分配律

$$f*(g+h) = f*g + f*h。$$

星号看起来很像乘法符号，而这种使用星号的表示为卷积提供了一种方便且正规的缩写形式。

卷积的例子

考虑如下的截断指数函数

$$E(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}。$$

我们将计算两个这样的指数函数的卷积，它们具有不同的（正的）衰减常数，即

$$aE(\alpha x)*bE(\beta x)=ab\int_{-\infty}^{\infty}E(\alpha u)E(\beta x-\beta u)\mathrm{d}u$$
$$=abE(\beta x)\int_{0}^{x}E(\alpha u-\beta u)\mathrm{d}u$$
$$=abE(\beta x)\frac{E(\alpha x-\beta x)-1}{\beta-\alpha}$$
$$=ab\frac{E(\alpha x)-E(\beta x)}{\beta-\alpha}。$$

计算结果是两个具有相同幅度的截断指数函数的差，如图 3.5 所示。这种函数很常见。例如它可以描述一种放射性同位素的浓度，其中放射性同位素以衰减常数 α 进行衰减，同时它又作为一个衰减常数为 β 的父同位素的衰减产物而不断得到补充。由卷积的交换律可知，互换常数 α 和 β 会得到相同的计算结果，而且当 $t\to\infty$ 时，其中一项衰减到零，只剩下一个具有常数 α 或 β 的指数，这要视哪一个衰减得更慢而定。作为一种特殊情况，我们可以通过取当 $\beta-\alpha\to 0$ 时的极限来计算 $E(\alpha x)*E(\alpha x)$。这样我们有

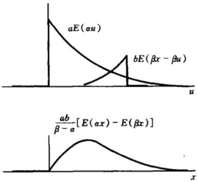


图 3.5　两个截断指数函数的卷积

$$E(\alpha x)*E(\alpha x)=\lim_{\beta-\alpha\to 0}\frac{E(\alpha x)-E(\beta x)}{\beta-\alpha}$$
$$=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}E(\alpha x)$$
$$=xE(\alpha x)。$$

这个特殊函数描述了临界阻尼谐振器的响应，例如一个临界阻尼电流计对一个冲激干扰的响应。

作为进一步的例子，我们考虑 $E(-\alpha x)*E(\beta x)$。它给出了一个完全不同的结果，即

$$E(-\alpha x)*E(\beta x)=\int_{-\infty}^{\infty}E(-\alpha x+\alpha u)E(\beta u)\mathrm{d}u$$
$$=\begin{cases}\int_{x}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha u+\alpha x}\mathrm{e}^{-\beta u}\mathrm{d}u & x>0\\ \int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha u+\alpha x}\mathrm{e}^{-\beta u}\mathrm{d}u & x<0\end{cases}$$
$$=\frac{E(-\alpha x)+E(\beta x)}{\alpha+\beta}。$$

这样我们得到一个在原点取得最大值，并且向左以常数 α 衰减，向右以常数 β 衰减的函数。

在这种计算过程中，确定积分边界和检查符号时应谨慎小心，因为通常的代数错误会使结果产生根本的变化。下面给出的图形化的卷积结构在检查的时候是很有用的。如图 3.6，把要进行卷积的一个函数翻转后，画在一片可移动的纸条上，然后沿着横坐标轴的方向滑动。当活动纸条位于如图左边部分所示的位置时，g 与翻转的 f 的乘积为零。通过在适当位置画一个箭

头，我们就可以看清楚这一过程。而后，突然到所示位置，乘积的积分成为非零值。稍微再移动纸条到达虚线所示位置，我们可以看到卷积是正的，并且从零开始近乎线性地随位移的增大而增大。继续移动，我们发现将会出现一个最大值，然后卷积逐渐衰减直到消失。

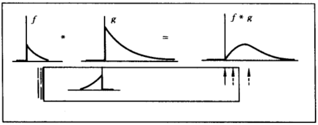


图 3.6　卷积的图示化结构。函数中的一个反向画在移动纸条上

在上面第二个例子中，两个方向相反的衰减指数，在卷积翻转相乘后没有零值区间的现象，以及函数在原点斜坡端点处的突跳表现都会立刻在结构图中显示出来。除了这些定性的结论之外，在许多情况下，特别是沿横坐标将函数自然分为若干段的情况下，使用这种结构可以得到某些定量结果。

把这种移动结构练习得非常熟练是很有好处的。毫无疑问的，经验丰富的行家都是在头脑里完成这种几何结构形象操作，而初学者也可以通过少量练习就抛开实际的小纸条。图 3.7 给出了一些用于练习的例子。

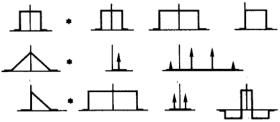


图 3.7　图形卷积练习。箭头表示冲激

序列积

考虑两个多项式

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$
$$b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots$$

它们的乘积是

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 + \cdots$$

我们可以记作

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots$$

其中

$$c_0 = a_0 b_0$$
$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$$
$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$
$$c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 。$$

这些基本的观察值同卷积之间有重要的联系。假设给定两个函数 f 和 g，要求数值计算它们的卷积。我们构造 f 值序列，它们位于宽度为 ω 的小的均匀间隔上

$$\{f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ \cdots\ f_m\},$$

相应的 g 值序列为

$$\{g_0\ g_1\ g_2\ g_3\ \cdots\ g_n\}。$$

我们通过逐个取 x 的不同离散值，然后计算把 f 和 g 的相应值的乘积累加在一起，近似计算卷积积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x')g(x-x')\mathrm{d}x'$$

我们可以很方便地将 g 序列写在一个活动纸条上，纸条可以连续地滑动到与 f 序列的每个顺序序列值相对应的位置上。图 3.8 给出了这一方法前几个步骤。我们注意到，g 序列是按照公式的要求以相反的顺序写在纸条上的。由于 $f * g = g * f$，也可以将 f 序列倒序写在活动纸条上。

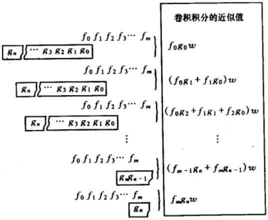


图 3.8 序列积的说明

可以看出，这个过程所生成的表达式同序列乘法的结果相同，因此我们引入“序列积”这个术语来描述这个序列

$$\{f_0 g_0\ \ f_0 g_1 + f_1 g_0\ \ f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0\ \cdots\}。$$

该序列来自以下两序列

$$\{f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ \cdots\} \text{ 和 } \{g_0\ g_1\ g_2\ g_3\ \cdots\}。$$

我们可以沿用星号标记把这三个序列之间的关系表示如下

$$\{f_0\ f_1\ \cdots\ f_m\} * \{g_0\ g_1\ \cdots\ g_n\} = \{f_0 g_0\ \ f_0 g_1 + f_1 g_0\ \cdots\ f_m g_n\}。$$

或者，我们可以定义 $\{f_i\}$ 和 $\{g_i\}$ 的序列积的第 $(i+1)$ 项如下

$$\sum_j f_j g_{i-j}。$$

实际上，序列积的计算是一个完全可行的过程（例如在允许连续的乘积在乘积寄存器累

加的手持计算器上)。两个序列可以方便地写成竖直的列，相应的结果写在由移动纸条上某个合适的位置上所画的箭头所指的位置。图3.9给出了计算{2 2 3 3 4} * {1 1 2} 的开始的某一步骤。箭头指向的数字4是刚刚算出的，纸条向下移动即将被算出的值写在圆括号内。注意到写在移动纸条上的序列是倒序的(向上)。

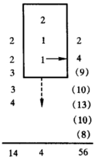


图 3.9 手工计算序列积

可以看到，序列积是一个比任何一个原序列都要长的序列，它的项数比两个原序列的项数总和少一个。

$$\{2\ 2\ 3\ 3\ 4\} * \{1\ 1\ 2\} = \{2\ 4\ 9\ 10\ 13\ 10\ 8\}$$

而且，序列积的各元素的和等于两个原序列的各项和的乘积，这一性质可以用于对卷积数值计算结果进行检验。作为一种特例，如果其中一个原序列的各项和为1，则序列积的各项之和就等于另一个原序列的各项之和。这一特性和卷积积分的特性类似。

一个半无限序列如下所示

$$\{f_0\ f_1\ f_2\ \cdots\},$$

它在一个方向上有终点，而在另一方向上没有终点。如果我们用它和一个有限长序列进行序列积，结果仍是一个半无限序列，例如

$$\{1\ 1\} * \{1\ 2\ 3\ 4\ \cdots\} = \{1\ 3\ 5\ 7\ 9\ \cdots\}。$$

一个半无限序列可能有也可能没有一个有限和，不过对于定义序列积来说它并不构成一个问题，因为序列积的每一项都只是有限项的和。当然，如果原序列中有一个的和不存在，那么前面使用序列积各项和等于原序列各项和之积的这个性质对计算结果进行数值检查这一有效的手段就无效了。

如果两个半无限序列在相同方向上无限，则序列积也不会出现什么问题。比如

$$\{1\ 2\ 3\ 4\ \cdots\} * \{1\ 2\ 3\ 4\ \cdots\} = \{1\ 4\ 10\ 20\ \cdots\},$$

但是如果它们在不同的方向上无限，那么序列积的每一项都是无穷多项的和，这个和很有可能是不存在的，因而

$$\{\cdots\ 4\ 3\ 2\ 1\} * \{1\ 2\ 3\ 4\ \cdots\}$$

得不到一个收敛的序列。

双边序列通常是比较方便处理的，除了我们必须明确指定原点位置外并不要求特殊的处理。例如，我们用一个箭头指明原点位置

$$\{\cdots\ 0.1\ \ 0.2\ \ 0.4\ \underset{\uparrow}{0.9}\ \ 0.8\ \ 0.7\ \ 0.6\ \cdots\}$$

序列

$$\{\cdots\ 0\ 0\ 0\ \underset{\uparrow}{1}\ 0\ 0\ 0\ \cdots\} = \{J\}$$

起着与冲激符号 $\delta(x)$ 类似的重要作用。对任意序列 $\{f\}$，它有如下性质

$$\{J\} * \{f\} = \{f\}$$

当然，只有一个元素的序列{1} 和其它一些序列比如{1 0 0} 也具有这个性质。

一个序列同以下序列

$$\{\cdots 0\ 0\ 0\ 1\ -1\ 0\ 0\ 0\ \cdots\} \text{ 或 } \{1\ -1\}$$

相乘等价于对原先的序列取一阶差分，即

$$\{1\ -1\} * \{\cdots\ f_{-2}\ f_{-1}\ f_0\ f_1\ f_2\ \cdots\} = \{\cdots\ f_{-1}-f_{-2}\quad f_0-f_{-1}\quad f_1-f_0\quad f_2-f_1\ \cdots\}。$$

当区分中心差 $f_{n+1/2}-f_{n-1/2}$ 和前向差 $f_{n+1}-f_n$ 很重要时，就有必要恰当地指定序列的原点。然而，除了各项的索引序号发生了移位之外，结果序列是完全相同的。

序列

$$\left\{\frac{1}{n}\ \frac{1}{n}\cdots(n\text{ 项})\cdots\ \frac{1}{n}\right\}$$

可以生成对 n 项的滑动平均，这是一个对气象数据序列进行平滑的熟悉的过程。例如，对每天的观测值进行一周的滑动平均的情况，可以写作

$$(1/7)\{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\}。$$

序列{1 1 1 1 1 1 1} 在这里本身就是对七项进行滑动求和。

半无限序列 $\{1\ 1\ 1\ 1\ \cdots\}$

同其它序列进行序列积会得到相似的结果。这样，如果$\{f\}$ 是一个序列，S_n 是其前 n 项的和，则序列$\{S\}$ 被定义为

$$\{S\} = \{S_1\ S_2\ S_3\ \cdots\}$$

也可以写成如下形式

$$\{1\ 1\ 1\ 1\ \cdots\} * \{f\} = \{S\}。$$

由于序列$\{f\}$ 中的每一项都是$\{S\}$ 中相邻两项的差，因此可以得到一个逆关系式：

$$\{1\ -1\} * \{S\} = \{f\}。$$

代入前面的等式，我们得到

$$\{1\ 1\ 1\ 1\ \cdots\} * \{1\ -1\} * \{S\} = \{S\};$$

换句话说，两个运算互相抵消。我们可以把这个互逆的关系表述为

$$\{1\ 1\ 1\ 1\ \cdots\} * \{1\ -1\} = \{1\ 0\ 0\ 0\ \cdots\}，$$

或者，用双边的形式

$$\{\cdots\ 0\ 0\ 0\ \underset{\uparrow}{1}\ 1\ 1\ 1\cdots\} * \{\cdots\ 0\ 0\ 0\ \underset{\uparrow}{1}\ -1\ 0\ 0\ \cdots\} = \{\cdots\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ \cdots\}$$

另一个互逆序列对的例子是

$$\{1\ 2\ 3\ 4\ \cdots\} \text{ 和 } \{1\ -2\ 1\}。$$

这是一种重要的关系，因为对于等式

$$\{f\} * \{g\} = \{h\}$$

当$\{f\}$ 和$\{h\}$ 已知，互逆序列给出了一种求解$\{g\}$ 的方法，结果是

$$\{g\} = \{f\}^{-1} * \{h\}$$

其中$\{f\}^{-1}$ 是$\{f\}$ 的逆序列，即这个序列有如下性质

$$\{f\}^{-1} * \{f\} = \{\cdots\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ \cdots\}$$

序列乘法的逆运算 如果$\{f\} * \{g\} = \{h\}$，则$\{h\}$ 称为$\{f\}$ 和$\{g\}$ 的序列积，这是因为序列$\{h\}$ 构成了用$\{f\}$ 和$\{g\}$ 所表示的多项式的乘积的多项式系数。

反过来，已知$\{f\}$ 和$\{h\}$，求解$\{g\}$ 的过程可以称作序列除法。实际上，对于这样的问题，可以用多项式长除法来解决。

例如，对于求解

$$\{1\ 1\} * \{g_0\ g_1\ g_2\ \cdots\} = \{1\ 3\ 3\ 1\}$$

可以写成

$$g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots = \frac{1 + 3x + 3x^2 + x^3}{1 + x}。$$

长除法可以如下进行：

$$\begin{array}{r l}
 & 1 + 2x + x^2 \\
1 + x \,\big) & \overline{1 + 3x + 3x^2 + x^3} \\
 & \underline{1 + x} \\
 & \quad 2x + 3x^2 \\
 & \quad \underline{2x + 2x^2} \\
 & \qquad x^2 + x^3 \\
 & \qquad \underline{x^2 + x^3}
\end{array}$$

则 $$g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots = 1 + 2x + x^2$$

或 $$\{g_0\ g_1\ g_2\ \cdots\} = \{1\ 2\ 1\}。$$

然而，立刻可以看出这个结果是正确的。

当然，没有必要把计算过程做得那么长，解决这个问题的一个简便的方法是使用手持计算器，在前一节计算$\{2\ 2\ 3\ 3\ 4\} * \{1\ 1\ 2\}$ 的例子中就用到了这种方法。图 3.10a 给出了计算过程的最终情形，右边一列是序列积。现在，假设左边一列$\{f\}$ 和右边一列$\{h\}$ 已知。为了求$\{g\}$，把$\{g\}$ 按照向上的方向写在一个可移动的纸条上，放在计算序列积开始的位置上（见图 3.10b）。显然，g_0 是可以立即得出的，因为 g_0 乘以左边的 2，结果是 2。因此标记为 g_0 的位置上可以写上 1，然后把纸条向下移动到下一个位置（见图 3.10c）。现在，g_1 乘以 2，再加上 2 与 1 的乘积，结果

应是 4。这就可以得到 g_1，以此类推。

用一个手持计算器，我们可以计算左边列的数和移动纸条上的已计算出的数的乘积并把它们累加在一起。从当前箭头所指的{h}序列的值中间减去该累加和，再除以左边一列最上面{f}的第一项的值，就得到{g}的下一个值。将算得的值填入纸条，并将纸条移动到下一个位置上。这个过程的第一步是填入{g}的第一个值，即 h_0/f_0。这个序列乘法的逆运算过程和正（直接）运算一样容易，过程也几乎没有变得更长。

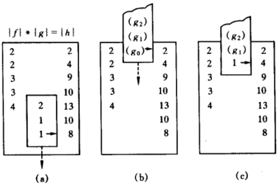


图 3.10

(a){2 2 3 3 4}与{1 1 2}的序列乘法的实现；(b) 和(c) 逆过程的前几步

和长除法相比，这个方法更为优越，因为它只用写下数据和运算结果。此外，这一方法更容易适用于系数很大或者是分数的情况。不过对于小整数的短序列，长除法也是可以考虑的。

表 3.1 列出了几个常见的序列和它们的逆序列。通过序列乘积的结果是{1 0 0 0 …}可以验证这些条目。表 3.1 可以完全等价于下列多项式对的列表

$$
\begin{array}{ll}
1+x & 1-x+x^2-x^3+\cdots \\
1-x & 1+x+x^2+x^3+\cdots \\
1+x^2 & 1-x^2+x^4+\cdots
\end{array}
$$

在这种形式下，对应条目的性质就是他们的乘积为 1。

表 3.1　一些常用序列和它们的逆序列

序列	逆序列
{1 1}	{1 −1 1 −1 1 −1 …}
{1 −1}	{1 1 1 1 1 1 …}
{1 0 1}	{1 0 −1 0 1 0 …}
{1 0 −1}	{1 0 1 0 1 0 …}
{1 1 1}	{1 −1 0 1 −1 0 …}
{1 2 1}	{1 −2 3 −4 5 −6 …}

续表 3.1

序列	逆序列
$\{n+1\}=\{1\ 2\ 3\ 4\ \cdots\}$	$\{1\ -1\}^{*2}=\{1\ -2\ 1\}$
$\{(n+1)^2\}=\{1\ 4\ 9\ 16\ \cdots\}$	$\{1\ -1\}^{*3}*\{1\ 1\}^{-1}$
$\{(n+1)^3\}=\{1\ 8\ 27\ \cdots\}$	$\{1\ -1\}^{*4}*\{1\ 4\ 1\}^{-1}$
$\{1\ -a\}$	$\{1\ a\ a^2\ a^3\ \cdots\}$
$\{1\ -a\}^{*2}$	$\{1\ 2a\ 3a^2\ 4a^3\ \cdots\}$
$\{e^{an}\}=\{1\ e^{-a}\ e^{2a}\ \cdots\}$	$\{1-e^{-a}\}$
$\{1-e^{-a(n+1)}\}$	$\{1\ -1\}*\{1-e^{-a}\}/\{1-e^{-a}\}$
$\{\sin\omega(n+1)\}$	$\{1\ -2\cos\omega\ 1\}/\sin\omega$
$\{\cos\omega n\}$	$\{1\ -2\cos\omega\ 1\}*\{1\ -\cos\omega\}^{-1}$
$\{e^{-a(n+1)}\sin\omega(n+1)\}$	$\{1\ -2e^{-a}\cos\omega e^{-2a}\}/e^{-a}\sin\omega$
$\{e^{-an}\cos\omega n\}$	$\{1\ -2e^{-a}\cos\omega e^{-2a}\}*\{1\ -e^{-a}\cos\omega\}^{-1}$

表 3.1 的后几个条目代表的是指数函数或其它一些与实际电路信号相关的函数，现在对它们进行验证比较困难，虽然这不是不可能的。用变换的方法可以比较容易的推导出它们。

用矩阵表示的序列积 设序列$\{h\}$是序列$\{f\}$和$\{g\}$的序列积，其中

$$\{f\}=\{f_0\ f_1\ f_2\ \cdots f_m\}$$
$$\{g\}=\{g_0\ g_1\ g_2\ \cdots g_n\}$$
$$\{h\}=\{h_0\ h_1\ h_2\ \cdots h_{m+n}\}$$

显然，这三个序列都可以表示成单行或者单列的矩阵，但由于序列的项数各不相同，我们不能立刻想到矩阵表示的形式，不过$\{f\}$，$\{g\}$和$\{h\}$的关系可以用后面的矩阵乘法来表示。

首先我们考虑一种矩阵乘积的特殊情况，其中第一个矩阵有 n 行 n 列，第二个矩阵只有 n 行 1 列。乘积是一个 n 行 1 列的矩阵。这样

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}$$

现在，我们构造一个列矩阵[y]，它的每一项都和序列$\{h\}$对应项相同。再构造一个列矩阵[x]，[x]和[y]元素数目相同，它的前若干个元素同序列$\{g\}$的元素相同，超出$\{g\}$的长度的部分都取为零。由于$\{h\}$的每一项都是$\{g\}$中各项的线性组合，其加权系数来自于$\{f\}$，因此我们可以逐行安排连续的系数集合，从而构造出一个方阵，使得通过矩阵乘法规则，就可以求得期望的结果。为了说明这种情况，假设$\{f\}$有 5 个元素，$\{g\}$有 3 个元素，而$\{h\}$有 7 个元素，我们可以写出

$$\begin{bmatrix} f_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_1 & f_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_2 & f_1 & f_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_3 & f_2 & f_1 & f_0 & 0 & 0 & 0 \\ f_4 & f_3 & f_2 & f_1 & f_0 & 0 & 0 \\ 0 & f_4 & f_3 & f_2 & f_1 & f_0 & 0 \\ 0 & 0 & f_4 & f_3 & f_2 & f_1 & f_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 g_0 \\ f_1 g_0 + f_0 g_1 \\ f_2 g_0 + f_1 g_1 + f_0 g_2 \\ f_3 g_0 + f_2 g_1 + f_1 g_2 \\ f_4 g_0 + f_3 g_1 + f_2 g_2 \\ f_4 g_1 + f_3 g_2 \\ f_4 g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{bmatrix}$$

f 矩阵的后四列的元素可以全换成 0，对结果没有影响。

通过逐个推移将 $\{f\}$ 序列写成若干行的形式，我们成功地把序列积转化成了矩阵形式。这看起来是一种既费力又笨拙的方法，而且丧失了原本很优越的交换律。实际上，序列积的矩阵表达在控制系统工程和其它一些领域中得到了广泛的应用，这是因为矩阵理论，尤其是矩阵在操作上为我们提供了方便。此外，在基于矩阵运算的计算机工具包中，将卷积运算构造成矩阵和列向量的乘积的形式是很方便的，而且可以认为这里因运算效率的降低所引起的时间损失也是可以忽略不计的。

序列的向量表示　就像一个短序列 $\{x_1\ x_2\ x_3\}$ 可以看作是三维空间中的某个向量对应的三个正交分量的一种表达一样，有 n 个元素的序列也可以看作是 n 维空间中的一个向量。通常，我们不必花费精力去将有 n 个两两正交的坐标向量空间图示出来，只需简单地按照代数规则对序列元素进行处理。多维空间的代数规则可以很自然地从三维空间拓展得到。不过，我们从几何学中借用了一整套术语和表述，因为它们可以对线性代数作出生动形象的描述。

如果序列 $\{x\}$ 和 $\{y\}$ 有如下关系

$$\{a\} * \{x\} = \{y\},$$

其中 $\{a\}$ 是另一个序列，则等效表述为

$$\boldsymbol{TX} = \boldsymbol{Y},$$

其中 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 是向量，它们的分量就是 $\{x\}$ 和 $\{y\}$，T 是一个算子，它表示把 $\boldsymbol{X}$ 变换成 $\boldsymbol{Y}$。这个对 $\boldsymbol{X}$ 的分量进行线性组合的变换与序列积简洁表达的规则是一致的。

如果 $\{x\}$ 的项数是有限的，则我们应当注意序列 $\{y\}$ 的项数超过了 $\{x\}$ 的项数。为了避免由于 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 是不同维数的空间中的向量所引起的问题，向量表达常常用于无限长的序列 $\{x\}$ 和 $\{y\}$。如果实际中给定问题的序列不是无限长的，我们通常可以通过对序列补无限多个零的方法把有限序列转变成无限序列。

对于用列矩阵表达序列的情况，交换律 $\{a\} * \{x\} = \{x\} * \{a\}$ 不再适用。进行序列积的其中一个序列被视为向量，另一个则转换成完全不同的形式。在使用向量解释的物理学领域中，交换 $\{x\}$ 与 $\{a\}$ 的角色 —— 比如讨论向量 $\boldsymbol{A}$ —— 通常是没有意义的。这种表达的形式上的不灵活性可以从它获得了更好的普遍适用性来得到补偿。为了明白地理解这一点，我们首先应注意到，对于用矩阵方法处理向量来说，一个序列用列矩阵还是用向量来描述是毫无区别的。现在，观察前一节中用序列 $\{f\}$ 的元素构成的方阵，我们发现在方阵的每一行中，序列 $\{f\}$ 都是倒着写的，每一行中的序列平移一位后就形成下一行。这反映了序列积的计算方式，序列 $\{f\}$ 写在一个靠在序列 $\{g\}$ 旁边的移动的纸条上，每完成一次乘积和累加的周期后，纸条就移动一

位。在这个序列卷积的计算过程中，在每步的计算过程中序列$\{f\}$都没有发生变化。的确，不发生变化正是卷积和序列乘法的本质。不过在方阵公式中表达改变或者不改变都是同样的方便。因此，矩阵表达方法考虑到了普遍情况，而序列积只是其中的特例。

与一般的移位不变线性变换相比，这种更一般的情况是一种简单而通用线性变换。如果一个序列是时间序列，则序列乘法就是更一般的时不变线性变换，例如，这可以应用在滤波器的元素不随时间变化的线性滤波器的有关问题中。另一方面，如果我们处理的是信号通过一个含有时变线性元件的滤波器问题时，比如马达驱动的分压器，输出与输入信号的关系就不能表示成序列积的形式。在这种不适用卷积的情况下，与"谐波激励，谐波响应"有关的性质也不再成立。

用计算机进行卷积

由于在第 6 章中介绍的卷积定理，卷积在傅里叶分析中有着相当的重要性，在此我们应该提到，第 12 章中将要介绍的快速变换算法也是基于卷积的。不过按照图 3.9 所描述的手算方法编写的程序代码要更加直观一些，当应用于对长数据集合进行滤波时，这种代码的运行速度要比变换方法更快(两种方法都用相同的语言编写)。设 `f ()` 和 `g ()` 的长度分别为 `lf` 和 `lg`，卷积 `h ()` 的长度 `lh` 等于 `lf + lg - 1`。下面是直接卷积的程序代码。

```
FOR I = 1 TO lh
    h(I) = 0
    FOR J = MAX(1 - lg + I,1) TO MIN(lf,I)
        K = I - J + 1
        h(I) = h(I) + f(J) * g(K)
    NEXT J
NEXT I
```

自相关函数和五角星符号

函数 $f(x)$ 的自卷积如下所示

$$f * f = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(x-u) \mathrm{d}u。$$

然而，假设在进行乘法和积分之前，我们不将两分量因子之一进行翻转，则有如下积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(u-x) \mathrm{d}u,$$

这个积分可以用 $f \star f$ 来表示。图 3.11 的阴影部分给出了 $f \star f$ 的一个值。稍作思考我们会发现，如果函数 f 相对于自身平移一个量 x(不翻转)，则无论 x 是正是负，乘积的积分都是一样的。换句话说，如果 $f(x)$ 是一个实函数，则 $f \star f$ 是一个偶函数，这一特点在卷积积分中一般是不存在的。如下所示

$$f \star f = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(u-x) \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(u+x) \mathrm{d}u,$$

当然，对前面的表达式作变量替换 $\omega = u - x$ 就可以推出上式。

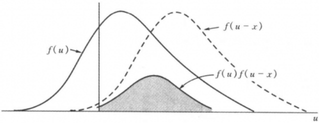


图 3.11 用面积(阴影区域)表示自相关函数

本章的附录中证明了 $f\star f$ 的值在原点处达到最大值，即随着移位的引入，乘积的积分值会下降。

如果 $f(x)$ 是复的，我们通常使用如下表达式

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) f^*(u-x)\mathrm{d}u$$

或

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(u) f(u+x)\mathrm{d}u。$$

(注意，有可能会把星号写在错误的位置，从而得到的是标准形式的共轭。)

通过把函数除以它的中心值来进行归一化，常常会使应用更加方便。我们可以定义一个量 $\gamma(x)$

$$\gamma(x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(u+x)\mathrm{d}u}{\int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(u)\mathrm{d}u}$$

显然

$$\gamma(0) = 1。$$

我们称 $\gamma(x)$ 为 $f(x)$ 的自相关函数。不过某些特定的应用场合中，归一化问题常常并不重要，我们更感兴趣的是自相关函数的特性而不是它的幅度，所以，非归一化的形式就被称为自相关函数了。

作为一个例子，函数 $f(x)$ 定义如下

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-x & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}。$$

那么，对 $0 < x < 1$，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(u+x)\mathrm{d}u = \int_{0}^{1-x} (1-u)[1-(u+x)]\mathrm{d}u = \frac{1}{3} - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{6}。$$

确定积分限的最好的办法是像图 3.11 那样画出来。当 $x>1$，积分为 0。由于已知积分是 x 的偶函数，我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)f(u+x)\mathrm{d}u = \begin{cases} \frac{1}{3}-\frac{|x|}{2}+\frac{|x|^3}{6} & -1<x<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}。$$

令 $x=0$，得到中心值为 1/3，因此

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1-\frac{3|x|}{2}+\frac{|x|^3}{2} & -1<x<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}。$$

我们知道 $\gamma(0)=1$，类似于卷积积分，计算出自相关函数下的面积（这里是 1/4）可以验证它等于 $f(x)$ 下的面积的平方。

第二个例子如下：

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-ax} & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)f(u+x)\mathrm{d}u = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-au}\mathrm{e}^{-a(x+u)}\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{-a|x|}}{2\alpha},$$

且

$$\gamma(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}。$$

自相关函数常常用来研究所观测数据的函数关系，在观测值呈现出一定程度的随机性时更是如此，而为此人们已经设计出的精巧的计算机程序，可以用多种方式实现对数据的积分。无论如何，数字计算在原理上总是简单易懂的。然而，在这种现象的理论研究中，不同于观测和分析，我们希望研究无限延伸的函数，而这又常常意味着无限积分的不存在。常用的方法是只考虑函数长为 X 的一段，超出这一范围的函数值用零代替，这样任何与原始函数无限长这个事实相联系的问题就不复存在了。根据定义，有限段以外的值为零的新函数 $f_X(x)$ 的自相关函数 $\gamma(x)$ 由下式给出

$$\gamma(x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_X^*(u)f_X(u+x)\mathrm{d}u}{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)f_X^*(u)\mathrm{d}u} = \frac{\int_{-\frac{1}{2}X}^{\frac{1}{2}X} f^*(u)f(u+x)\mathrm{d}u}{\int_{-\frac{1}{2}X}^{\frac{1}{2}X} f_X(u)f_X^*(u)\mathrm{d}u}$$

这样，无限积分就变为有限积分，当然，事实上这是对有限量的观测数据计算而得到的准确结果。

现在，如果给定一个函数 $f(x)$，它不会衰减到零，$\gamma(x)$ 的定义则不再适用，这时我们可以用有限长的一段计算 $\gamma(x)$，段的长度 X 可以是我们希望的任意长度。可能发生的情况是，随着 X 的增加，$\gamma(x)$ 的值趋于一个极限。事实上我们对发生这种情况的条件很感兴趣。这个极限如果存在，把它记为 $C(x)$，定义如下

$$C(x)=\lim_{X\to\infty}\frac{\int_{-\frac{1}{2}X}^{\frac{1}{2}X}f(u)f(u+x)\mathrm{d}u}{\int_{-\frac{1}{2}X}^{\frac{1}{2}X}[f(u)]^2\mathrm{d}u}。$$

自相关函数通常伴随着实函数出现，例如信号波形。一般不考虑复函数 $f(x)$ 的情况。

练习　证明当上述表达式用于对一个存在 $\gamma(x)$ 的实函数进行计算时，有 $C(x)=\gamma(x)$。

由于当 γ 有效时，极限自相关函数 C 和 γ 一致，因此用 C 来定义自相关函数是合乎逻辑的，也是常被采用的方法。然而，在下面的讨论中我们认为术语“自相关函数”仅在必要的时候才包括求极限的运算。

以一个不衰减且无穷积分不存在的函数为例，考虑由三个具有任意幅度和相位的正弦波组合而成的时变信号，由下式给出

$$V(t)=A\sin(\alpha t+\Phi)+B\sin(\beta t+\chi)+C\sin(\gamma t+\Psi)。$$

则

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T}V(t')V(t'+t)\mathrm{d}t' &= \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T}[A\sin(\alpha t'+\phi)A\sin(\alpha t'+\alpha t+\phi)\\ &\quad + B\sin(\beta t'+\chi)B\sin(\beta t'+\beta t+\chi)\\ &\quad + C\sin(\gamma t'+\Psi)C\sin(\gamma t'+\gamma t+\Psi)\\ &\quad + \text{交叉乘积项}]\mathrm{d}t'\\ &= \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T}\{A^2[\cos\alpha t-\cos(2\alpha t'+\alpha t+2\phi)]\\ &\quad + B^2[\cos\beta t-\cos(2\beta t'+\beta t+2\chi)]\\ &\quad + C^2[\cos\gamma t-\cos(2\gamma t'+\gamma t+2\Psi)]\\ &\quad + \text{交叉乘积项}\}\mathrm{d}t'\\ &= A^2T\cos\alpha t+B^2T\cos\beta t+C^2T\cos\gamma t+F(t,T)+G(t,T),\end{aligned}$$

其中，F 代表振荡项，G 代表交叉乘积项。随着 T 的增大，相对于与 T 成正比增加的前面三项，F 和 G 变得可以忽略。因此

$$\frac{\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T}V(t')V(t'+t)\mathrm{d}t'}{\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T}[V(t')]^2\mathrm{d}t'}=\frac{A^2T\cos\alpha t+B^2T\cos\beta t+C^2T\cos\gamma t+F(t,T)+G(t,T)}{A^2T+B^2T+C^2T+F(0,T)+G(0,T)}$$

且

$$C(t)=\lim_{T\to\infty}\frac{\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T}V(t')V(t'+t)\mathrm{d}t'}{\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T}[V(t')]^2\mathrm{d}t'}=\frac{1}{A^2+B^2+C^2}(A^2\cos\alpha t+B^2\cos\beta t+C^2\cos\gamma t)。$$

注意到极限自相关函数 $C(t)$ 是三个余弦项的叠加，这三个余弦的频率同信号 $V(t)$ 中所包含的三个分量具有相同的频率，但相对幅度不同，且 $C(0)=1$。

由于$\gamma(x)$的分子中的主项随X成比例增加，那么得到一个收敛结果的另一种方法是在求极限前先除以X。表达式

$$\lim_{X\to\infty}\frac{1}{X}\int_{-\frac{1}{2}X}^{\frac{1}{2}X} f(u)+f(u+x)\mathrm{d}u$$

在原点处不等于1，但它也常被简单地看作自相关函数，这是由于这个函数除以它的中心值（假设中心值不为零）后就和$C(x)$相同了。因此它可以看作是$C(x)$的非归一化形式。

当时间是自变量时，常会用到乘积$V(t)V(t+\tau)$的时间平均，记为

$$\langle V(t)V(t+\tau)\rangle \equiv \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} V(t)V(t+\tau)\mathrm{d}t,$$

其中，根据定义，对时间求平均的运算用尖括号表示如下

$$\langle\cdots\rangle \equiv \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T}\cdots\mathrm{d}t。$$

对我们做过的例子采用这一记法，得到

$$\langle V(t)V(t+\tau)\rangle = A^2\cos\alpha\tau + B^2\cos\beta\tau + C^2\cos\gamma\tau,$$

显然这比归一化的表达式要简单一些。不过应当注意到，对于γ存在的情况下，我们还没有得到一个有用的结果。

在这个例子中，C的一个显著的特点是丢失了原来的相位信息。因此自相关是一个不可逆过程，从自相关函数不可能恢复到它的原函数。也就是说，自相关函数丢失了一些信息。在一些物理领域的分支中，例如射频干涉测量和对材料的X射线衍射分析，观测一个期望信号的自相关函数比观测信号本身要容易一些，并可采用一些灵活的办法来弥补丢失的信息。

通过考虑一个x的余弦函数，可以看到丢失信息的特点。当这一函数相对于自身移位后，与未移位的函数相乘，然后再积分，显然，对于具有相同周期和幅度的正弦函数也可以得到相同的结果。进一步的，对于具有相同周期和幅度，任意起始位置x的谐波函数，这个结果也是相同的。即，自相关函数不能显示一个谐波函数的相位信息。那么，如果一个函数由多个同时存在的谐波组成，当它被位移、相乘并积分时，结果就可以用每次只考虑一个不同周期的方法来简单计算。不同频率谐波分量之间的乘积积分值都很小，是可以忽略不记的，因此这一方法是可行的。而且，每个周期谐波都可以沿x轴滑动任意相位而不影响自相关函数。特别的，所有分量都可以位移成余弦分量，这样就生成了一个偶函数，它在具有相同自相关函数的所有可能的函数中，具有确定的惟一性。

由于自相关函数通常针对实函数，例如信号波形，而对复函数不加考虑。复函数$f(x)$的自相关函数可以看作是互相关函数的一个特例。

三重相关

一个波形的普通自相关函数丢弃了其在时间维上的信息，而这个信息可能是很重要的。例如从一个物理的信号源获得的随机噪声在时间翻转后仍会保持原有的统计特性。同样的噪声在通过一个冲激响应为$\exp(-t/RC)H(t)$的简单的RC滤波器后，可以认为是一系列随时间指数衰减波形的叠加。因此，滤波后的噪声如果翻转后在统计上是不同的。由于自相关函数不

包含任何时间维信息，我们不能用它来研究这种现象。但是有一种叫作三重相关的函数，它所具有的更高阶特性允许我们对此加以研究，并且越来越得到重视(Weigelt，1991)。它是一个如下定义的二元函数 $U(x_1,x_2)$

$$U(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)f(x+x_1)f(x+x_2)\mathrm{d}x。$$

例如，{1 2 3} 和{3 2 1} 的三重相关分别为

$$\begin{bmatrix}0&0&3&6&9\\0&6&14&22&6\\9&22&36&14&3\\6&14&22&6&0\\3&6&9&0&0\end{bmatrix}\text{和}\begin{bmatrix}0&0&9&6&3\\0&6&22&14&6\\3&14&36&22&9\\6&22&14&6&0\\9&6&3&0&0\end{bmatrix},$$

它们的结果不同，一个是另一个的转置。

互相关

两个实函数 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的互相关函数 $f(x)$ 定义如下

$$f(x)=g\star h=\int_{-\infty}^{\infty}g(u-x)h(u)\mathrm{d}u。$$

它和卷积积分很类似，不同之处在于分量 $g(u)$ 只是简单地用 $g(u-x)$ 替换，而不进行翻转。我们用五角星号而不用表示卷积的星号来表示这个运算。尽管互相关比卷积稍微简单一些，但它的性质却并不简单。相对于 $g*h=h*g$，h 对 g 的互相关运算却不同于 g 对 h 的互相关运算。把 $g\star h$ 读作"g 扫描 h"是一个不错的主意。按照上面的 g 扫描 h 得到 f 的定义，当 g 随 x 的变化移动时 h 保持不动。现在我们证明

$$g\star h\neq h\star g$$

通过变量代换可以看到

$$f(x)=g\star h=\int_{-\infty}^{\infty}g(u-x)h(u)\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{\infty}g(u)h(u+x)\mathrm{d}u$$

$$f(-x)=h\star g=\int_{-\infty}^{\infty}h(u-x)g(u)\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{\infty}h(u)g(u+x)\mathrm{d}u$$

$$g*h=g(-)\star h。$$

和自相关函数的情况一样，互相关函数常被归一化使得其在原点处的值为 1，并且在适当的时候，用平均值 $\langle g(u-x)h(u)\rangle$ 来代替无穷积分。在复函数的情况下，我们习惯于定义(复的)互相关为 g^* 扫描 h，其中 g^* 是 g 的复共轭：

$$g^*\star h=\int_{-\infty}^{\infty}g^*(u-x)h(u)\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{\infty}g^*(u)h(u+x)\mathrm{d}u。$$

作为一个特例，复函数 f 的复自相关为 $f^*\star f$，需要注意的是把星号放在错误的位置会得到标准形式的共轭。

能量谱

我们把一个函数的变换的模平方称为能量谱，即 $|F(s)|^2$ 是 $f(x)$ 的能量谱。这一术语直接取自于它所使用的物理领域。可以看到，尽管 $f(x)$ 决定了 $F(s)$ 从而也决定了 $|F(s)|^2$，但 $f(x)$ 和它的能量谱之间并没有一一对应的关系，为了重建 $f(x)$，必需要具有 $|F(s)|$ 以及 $F(s)$ 的辐角[①]。能量谱只包含了 $f(x)$ 的某种信息，而并没有给出其傅里叶分量的相位情况。对作为频率函数的声强进行测量就可以得到声学波形的这种信息。

能量谱所丢失的信息和我们用自相关函数代替原始函数时所丢失的信息是完全一样的，稍后给出的自相关定理可以说明这种等效性。

若 $f(x)$ 表示的是一个物理波形，则 $f(x)$ 是实的，它的能量谱是一个偶函数，因此可以由 $s \geqslant 0$ 时的取值完全确定。为了强调这个事实，我们用术语“正频率能量谱”来表示 $s \geqslant 0$ 的 $|F(s)|^2$。

由于 $|F(s)|^2$ 有单位 s 上能量密度的性质，如果 s 的一个离散点上有非零能量，那么 $|F(s)|^2$ 将会是无穷大。这是一种具有无限窄线谱的情况。现在我们考虑在 0 到 s 的范围内能量的累积分布函数

$$\int_0^s |F(s)|^2 \mathrm{d}s。$$

任何线谱如图 3.12 所示的那样都会在累积能量谱中形成有限间断点。通过使用累积谱结合 Stieltjes 积分表达式在数学上可以得到一定的便利。尤其是在对一些数学上要求严密的问题运用分布理论时，这种便利体现得更为明显。然而，这纯粹是一个记法的问题，当需要表达的是一个聚集在更为狭窄的带内，用以上方法也难以分析的能量分布时，我们就要使用后面将要提到的 δ 符号了。

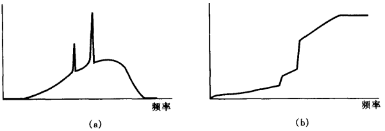


图 3.12 钼的 X 射线光谱

(a) 功率谱；(b) 累积谱

附录

我们来证明非零实函数 $f(x)$ 的自相关函数在原点处达到其最大值，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)f(u+x)\mathrm{d}u \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} [f(u)]^2 \mathrm{d}u。$$

① 复变量 $F(s)$ 的相角记为 $\mathrm{pha}F(s)$ 且定义如下：如果一个复变量 $z = r\exp(i\theta)$，那么 $\mathrm{pha}z = \theta$。

设 ε 是一个实数，那么，如果 $x \neq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f(u)+\varepsilon f(u+x)]^2\mathrm{d}u > 0$$

并且

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f(u)]^2\mathrm{d}u + 2\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}f(u)f(u+x)\mathrm{d}u + \varepsilon^2\int_{-\infty}^{\infty}[f(u+x)]^2\mathrm{d}u > 0,$$

即

$$a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c > 0,$$

其中

$$a = c = \int_{-\infty}^{\infty}[f(u)]^2\mathrm{d}u$$

$$b = 2\int_{-\infty}^{\infty}f(u)f(u+x)\mathrm{d}u。$$

现在，如果关于 ε 的二次多项式不能等于零，即如果它没有实根，则

$$b^2 - 4ac \leqslant 0。$$

所以，$b/2 \leqslant a$，或

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty}f(u)f(u+x)\mathrm{d}u}{\int_{-\infty}^{\infty}[f(u)]^2\mathrm{d}u} \leqslant 1。$$

等号当 $x=0$ 时成立。所以，自相关函数不可能超过它在原点处的值。这一结论是 Schwazz 不等式建立的基础之一，对复自相关函数也很容易归纳出相似的结论。

练习　拓展上述结论，证明对除 0 以外的任何 x 取值等号均不成立。

参考书目

Bracewell, R. N.: "Two-Dimensional Imaging," Pretice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1995.

Bracewell, R. N., and J. A. Roberts: "Aerial Smoothing in Radio Astronomy," *Australian J. Physics*, vol. 7, pp. 615-640, 1954.

Pettit, R. H.: "Pulse Sequences with Good Autocorrelation Properties," Microwave Journal, vol. 10, pp. 63-67, 1967.

Weigelt, G.: *Progress in Optics*, vol. 29, p. 293, 1991.

习题

1. 计算下列序列积，用求和的方法来检查结果，并画图表示。

(a) {6 9 17 20 10 1} * {3 8 11}

(b) {1 1 1 1 1} * {1 1 1 1}

(c) {1 4 2 3 5 3 3 4 5 7 6 9} * {1 1}

(d) {1 4 2 3 5 3 3 4 5 7 6 9} * {1/2 1/2}

(e) {1 4 2 3 5 3 3 4 5 7 6 9} * {1 2 1}

(f) {1 4 2 3 5 3 3 4 5 7 6 9} * {1/4 1/2 −1/4}

(g) {1 2 3 7 12 19 21 22 18 13 7 5 3 2 1} * {1 −1}

(h) {1 2 3 7 12 19 21 22 21 18 13 7 5 3 2 1} * {1 1 1 1 …}

(i) {1 1} * {1 1} * {1 1}

(j) {1 1 0 0 1 0 1} * {1 1 0 0 1 0 1}

(k) {1 1 0 0 1 0 1} * {1 0 1 0 0 1 1}

(l) {a b c d e} * {e d c b a}

(m) {1 3 1} * {1 0 0 0 0 0 ±1}

(n) {1 3 1} * {1 2 2}

(o) 131 乘以 122

(p) 10,301 乘以 10,202

(q) {1 8 1} * {1 2 2}

(r) 讨论(d) 和(f) 的结果相对于题目所给出的两个序列中较长的一个平滑度。

(s) 将(i) 的结果与 Pascal 二项式系数表作比较。

(t) 寻找与(k) 具有相同性质的更长的序列。

(u) 结合(j),(k),(l),(m),思考导致序列积为偶序列的条件。

(v) 体会(n),(o),(p),(q) 的含义,设计一种用于计算序列乘法的机械台式计算机。

2. 推导下列结论。其中 $H(x)$ 是 Heaviside 单位阶跃函数(见第 4 章)

$$x^2H(x) * e^xH(x) = (2e^x - x^2 - 2x - 2)H(x)$$

$$[\sin x H(x)]^{*2} = \frac{1}{2}(\sin x - x\cos x)H(x)$$

$$[(1-x)H(x)] * [e^xH(x)] = xH(x)$$

$$H(x) * [e^xH(x)] = (e^x - 1)H(x)$$

$$[e^xH(x)]^{*2} = xe^xH(x)$$

$$[e^x H(x)]^{*3} = \frac{1}{2}x^2e^xH(x)$$

3. 证明卷积的交换律,即 $f * g \equiv g * f$。

4. 证明结合律 $f * (g * h) \equiv (f * g) * h$。

5. 证明对加法的分配律 $f * (g + h) \equiv f * g + f * h$。

6. 函数 f 是 g 和 h 的卷积,证明 f,g 和 h 的自卷积函数之间的关系和 f,g 及 h 间的关系相同。

7. 如果 $f = g \star h$,证明 $f \star f = (g \star g) \star (h \star h)$。

8. 证明如果 a 为常数,则 $a(f * g) = (af) * g = f * (ag)$。

9. 建立一个关于 $f(g * h)$ 的定理。

10. 证明自相关函数是 Hermitian(赫密特的),即 $C(-u) = C^*(u)$,因此当自相关函数是实函数时,则它也是偶的。注意到如果自相关函数是虚函数,则它一定还是奇函数。考虑构造一个函数,它的自相关函数是一个奇函数。

11. 证明两个自相关函数的和与积都是 Hermitian(赫密特的)。

12. 移动 $f(x)$ 的原点，使 $f*f|_0$ 达到其最大值。研究在进行必要的修改调整后形成的命题，即："新的原点定义了关于最大对称轴"。考虑使用参数 $(f*f|_0)/(f\star f|_0)$ 作为"平坦度"的度量有何优点。

13. 证明如果 $f(x)$ 为实函数，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(-x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}[E(x)]^2\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{\infty}[O(x)]^2\mathrm{d}x$$

注意等号左边为 $f(x)$ 的自卷积中心值，即 $f*f|_0$。

14. 求{1 3 3 1}和{1 4 6 4 1}的互逆序列。

15. 求{1 1}和{1 1 1}的互逆序列。

16. 建立一个对有限或半无限序列求逆的通用方法，并用下面的情况来检验。

{64 32 16 8 4 2 1 …}

{64 64 48 32 20 12 7 4 …}

$$\left\{1 \quad e^{-\frac{1}{10}}\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \quad e^{-\frac{2}{10}}\cos\left(\frac{2\pi}{10}\right) \ \cdots \ e^{-\frac{n}{10}}\cos\left(\frac{n\pi}{10}\right) \ \cdots\right\}$$

17. 求函数 $f(x)$ 的近似数值，x 以 0.2 为间隔取值，对序列积进行数值计算，除原点外，

$$f(x)*[e^{-x}H(x)]$$

为零。对 $f(x)$ 进行归一化使积分近似于 1。

18. 互相关函数 $g\star h$ 要用它的最大值进行归一化。一种解法如下

$$0 \leqslant \int[g(u)-h(u+x)]^2\mathrm{d}u = \int g^2\mathrm{d}u - 2\int g(u)h(u+x)\mathrm{d}u + \int h^2\mathrm{d}u,$$

所以

$$\int g(u)h(u+x)\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{2}\int g^2\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int h^2\mathrm{d}u = M。$$

因此，$(g\star h)/M$ 即为所求。纠正以上解法的错误。

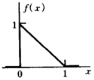
19. Barker 码 计算下面序列的自相关序列

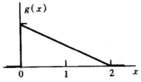
{1 1 1 1 1 −1 −1 1 1 −1 1 −1 1}

该序列是长度为 13 的 Barker 码(Petit,1967)。用掷硬币的办法生成一个类似的 13 个元素的随机序列，求它的自相关序列。

20. 分析解卷积

(a) 画出下列给定函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的卷积 $h(x)$。用数字标注两个坐标轴。





(b) 用字母 $A,B,C,\cdots$ 标注 $h(x)$ 上感兴趣的点，并用下表列出它们的值。

感兴趣的点	x	$h(x)$
A		
B		
C		
⋮		

21. sinc 函数的自卷积 设 $f(x)=\text{sinc}(x+2)+\text{sinc}(x-2)$，则 $f(x)$ 的自卷积是什么？

22. 卷积 对积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g(u)\mathrm{d}u,$$

作变量代换

$$u = x - a,$$

其中 a 是常数，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g(u)\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)g(x-a)\mathrm{d}x = f(a)\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{d}x。$$

以上推导是否正确？如果不正确，错在那里？

23. 光学音轨 旧的电影胶片的光学音轨宽度为 b，用一个宽为 w 的狭缝进行扫描。通过适当的归一化，我们可以说，这种扫描是和一个宽度为 w，高度为单位高度的矩形函数进行卷积。在某电影院里，放映员将整个放影机不规范地放置在地面上，狭缝与音轨上的条纹的夹角会不再是零度，而始终倾斜一个小角度 ϵ。

(a) 在这种情况下，参与卷积的狭缝函数将会发生什么样的变化？

(b) 定性描述声音还原的效果。

24. 比较数值卷积和卷积解析解 指数函数 e^{-x} 可以用如下序列离散地表示

$$\{a\} = \{1\ 0.368\ 0.135\ 0.050\ \cdots\}$$

(a) 计算序列积或"自相关和"

$$\sum_{j=0,1,\cdots} a_j a_{i+j}$$

并画出准确的图。

(b) 计算"自相关函数"

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) + f(x+\tau)\mathrm{d}x$$

其中

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

将 $R(\tau)$ 的图和上一张图重叠在一起。

(c) 显然，$R(\tau)$ 的连续曲线不会精确地通过(a) 中所画的所有点。从舍入误差，归一化，或其它任何你认为可以说明这一差异的影响等方面来讨论这个差异。

25. 二维卷积 在有圆形光圈的光学仪器理论中涉及到两个单位直径圆盘的自相关(它描述了二维传递函数),被称为中国帽子函数。证明

$$\Pi(r) ** \Pi(r) = \text{chat}\, r = \frac{1}{2}[\cos^{-1} r - r(1-r^2)^{\frac{1}{2}}]\Pi(\frac{r}{2})$$

26. 二维自相关 $\Pi(x)\Pi(y)$ 的二维自相关函数是 $\Lambda(x)\Lambda(y)$。中心值是 1。

(a) 验证包络 $\Lambda(x)\Lambda(y) = \varepsilon$ 近似于方形,其中 ε 小于 1。

(b) 验证包络 $\Lambda(x)\Lambda(y) = 1-\delta$ 也近似于方形,其中 δ 小于 1。

(c) 令 $\delta = \varepsilon$,能否说两个包络是相等的正方形?

27. 卷积的自相关 证明

$$(f * g) \star (f * g) = (f \star f) * (g \star g)$$

28. 反卷积 三个具有卷积关系的序列如下

$$\{a_0\ a_1\ a_2\ \cdots\} * \{b_0\ b_1\ b_2\ \cdots\} = \{c_0\ c_1\ c_2\ \cdots\}$$

若给定序列 $\{b_k\}$ 和 $\{c_k\}$,证明用反卷积求 $\{a_k\}$ 的法则是

$$a_k = b_0^{-1}(c_k - \sum_{j=0}^{k-1} a_j b_{k-j})$$

编写一个反卷积的计算机子程序。

29. 传输线回波 当一个电流冲激作用到一条远端短路的传输线时,输入端上出现的电压是以 $\{v\} = \{1\ 2\ 2\ 2\ \cdots\}$ 为系数的等间隔脉冲序列。如果输入的是电压冲激,那么相应的电流响应是 $\{i\} = \{1\ -2\ 2\ -2\ 2\cdots\}$。

(a) 证明:$\{v\} * \{i\} = \{1\}$。

(b) 求两个函数 $v(t)$ 和 $i(t)$,使得 $v(t)\text{III}(t)$ 和 $i(t)\text{III}(t)$ 分别表示上述脉冲串。

30. 反卷积 设 $[b_k]$ 是未知序列,$\{a_k\} = \{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\}$。设 $\{p_k\}$ 是周期序列,它的一个周期为 $\{0\ 1\ 1\ -1\ -1\ 0\}$。证明,$\{a_k\} * \{p_k\} = 0$。如同上一个问题,设 $\{c_k\} = \{a_k\} * (b_k)$ 给定,是否 $\{a_k\}$ 与 $\{b_k\} + \{p_k\}$ 卷积也能到 $\{c_k\}$?如果可以,如何用前面给出的反卷积法则来恢复未知的 $\{b_k\}$?反卷积算法实际上得到的是什么?

31. 卷积速度 指定一个有 N 个元素的长的数据序列 f,通过与 $g = \{1\ 4\ 6\ 4\ 1\}$ 卷积对其进行平滑,得到所用的时间。我们知道 $f * g = g * f$,但是所用时间与哪个序列在前有关吗?随着 N 的增加,所用时间是否与 N^2 成正比?

第 4 章

一些有用函数的符号

在傅里叶分析中，很多有用的函数因为存在突变而不得不分段定义。例如下面这个函数 $f(x)$：

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1 & x>1。\end{cases}$$

尽管这个函数本身很简单，但与一般的代数表达式相比则显得不够灵活了。比如代数式 $1+x^2$ 表达简洁，在 x 的无穷区间上都可以用它来表示。对于很多数学方面的目的，一个分段解析的函数处理起来并不简单，但对于物理应用而言，一个"逐阶斜坡函数"或者是"分步渐变函数"至少可以与一个平滑的函数一样简单。

傅里叶本人也考虑过由图形给定的函数的表达，按照英国数学家和历史学家 E. W. Hobson 的说法："他是第一个完全掌握这种思想的人，即一个单一函数可以由分离的部分组成，每部分可以由图形任意给定。"

为了重新获得表示法的简洁性和清晰性，我们引入了很多表现各种突变的简单函数。本章也用一部分内容介绍了重要的内插函数 $\operatorname{sinc}x$，它是一个不连续函数的变换。此外，还有一些关于高斯函数表示的参考材料。

单位高度和单位宽度的矩形函数 $\Pi(x)$

如图 4.1 所示，单位高度和单位宽度的矩形函数定义为

$$\Pi(x)=\begin{cases}0 & |x|>\frac{1}{2}\\ (\frac{1}{2} & |x|=\frac{1}{2})\\ 1 & |x|<\frac{1}{2}。\end{cases}$$

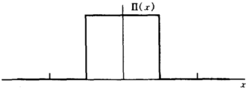


图 4.1　单位高度单位宽度的矩形函数

它提供对具有简单表达式函数段的简洁记法，例如 $f(x) = \prod(x)\cos\pi x$ 就是如下函数紧凑的记法

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < -\frac{1}{2} \\ \cos\pi x & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ 0 & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

（见图 4.2）。我们也可以把$\prod(x)$平移后的一个矩形函数记为 $h\prod[(x-c)/b]$，其高度为 h，宽度为 b，中心在 $x = c$（见图 4.3）。因此，仅仅通过与矩形函数的一个合适位移相乘，就可以选择某一给定函数的任意一段，还可以改变它的幅度，而其余部分为零。

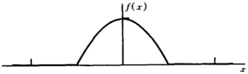


图 4.2　用$\prod(x)\cos\pi x$ 表达的分段函数

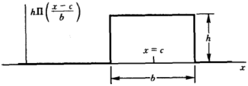


图 4.3　由$\prod(x)$平移得到具有任意高度和宽度的位移矩形函数

通过使用卷积运算，矩形函数也可以用来表示滑动平均，当然了，在频域内与一个矩形函数相乘可以看成一个理想的低通滤波。矩形函数在傅里叶级数的收敛理论中很重要，这就是大家所熟知的 Dirichlet 不连续因子。符号 rect x 是$\prod(x)$的一个替代用法，虽然不如后者那么简洁，但却便于口头交流。除矩形函数以外，也用诸如门函数、窗函数以及厢函数等术语。

其实在 $x = \pm\frac{1}{2}$ 处的取值是无关紧要的，也就是说，我们通常忽略这些不连续点处的值。

同样地，我们没有必要也不值得去在图上强调$\Pi(\pm\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$；我们更希望能够使人联想起高品质的波形图(当然就不能把不连续的部分加亮表示了)。

单位高度、单位面积的三角窗函数 $\Lambda(x)$

由定义 $\Lambda(x)=\begin{cases}0 & |x|>1\\ 1-|x| & |x|<1\end{cases}$

如图 4.4 所示。$\Lambda(x)$ 函数之所以重要，很大程度上是因为它正好是$\Pi(x)$ 的自卷积，但它也有其他的用处，比如给出多边形函数(由线性分段组成的连续函数) 的简洁记法。

记 $h\Lambda\left(\frac{x}{\frac{1}{2}b}\right)$是一个高为 h，宽为 b，面积为$\frac{1}{2}hb$ 的三角窗函数。

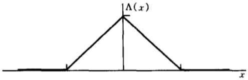


图 4.4 单位高度、单位面积的三角窗函数 $\Lambda(x)$

各种指数曲线、高斯曲线和瑞利曲线

如图 4.5 所示，从左到右依次是升指数函数、降指数函数、截断指数函数和双边降指数函数。

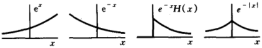


图 4.5 各种指数函数

图 4.6 所示为高斯函数 $\exp(-\pi x^2)$。我们在各种函数归一化的方法中选择一个中心幅度和曲线下的面积均为 1 的方法，这种选择会带来某些优点。高斯函数的傅里叶变换仍然是高斯函数，并且也证明满足前面我们提到的选择依据。在统计学中，高斯分布就是所谓的“零均值正态(误差) 分布”，归一化后其面积和标准离差保持为 1。我们可以用术语“概率纵坐标” 称呼如下形式

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}x^2}。$$

当标准离差为 σ，概率纵坐标为

$$\frac{1}{\sigma(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

曲线下的面积保持为 1，中心幅度等于 0.398 9/σ。在严格的标准化之前，统计学现在很流行引入误差积分 erf$x$，它表示为

$$\mathrm{erf}x=\frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt。$$

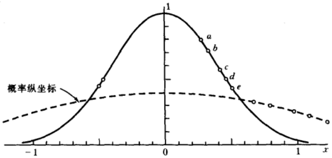


图 4.6　高斯函数 $\exp(-\pi x^2)$ 和概率纵坐标 $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$

而补误差积分 $\mathrm{erfc}x$ 定义为 $\mathrm{erfc}x = 1 - \mathrm{erf}x$。

概率积分 $\alpha(x)$ 的表达式

$$\alpha(x) = \frac{2}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{-x}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt = \mathrm{erf}\,\frac{x}{2^{\frac{1}{2}}}。$$

现在概率积分表也随处可见。在本书中，由于 $\exp(-\pi x^2)$ 在傅里叶变换中的对称性，我们将广泛地使用这个表达。它的积分与 $\mathrm{erf}x$ 和 $\alpha(x)$ 的关系如下：

$$\int_0^x e^{-\pi t^2}\,dt = \frac{1}{2}\mathrm{erf}\pi^{\frac{1}{2}}x = \frac{1}{2}\alpha[(2\pi)^{\frac{1}{2}}x]$$

$$\int_{-\infty}^{x} e^{-\pi t^2}\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{erf}\pi^{\frac{1}{2}}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha[(2\pi)^{\frac{1}{2}}x]。$$

有关 $\exp(-\pi x^2)$ 的常用参数如下（见图 4.6）：

(a) 概率误差	$= 0.269\,1 = 0.674\,5\sigma$
(b) 平均绝对误差($\|x\|$ 的平均值)	$= \pi^{-1} = 0.318\,3 = 0.797\,9\sigma$
(c) 标准离差(x^2 的平均值)	$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} = 0.398\,9 = \sigma$
(d) 半峰值宽度	$= 0.939\,4 = 2.355\sigma$
(e) 等效宽度	$= 1.000\,0 = 2.506\,6\,\sigma$

概率误差，或者是半四分位数的间距，表示了一组测量数据中中间 50% 的特点。比如“学生的平均身高为 165±10 cm”这样的一个统计报告，测量方法表示有一半学生的身高是在 155 cm 到 175 cm 的范围。作为对比，偏离正态分布平均值在 σ(一个标准离差）之内的人数预计有 62.27%，偏离正态分布平均值在平均绝对误差之内的人数有 57.51%，偏离正态分布平均值在半峰值宽度的一半之内的人数有 76.10%，而偏离正态分布平均值在半等效宽度之内的人数有 78.99%。

二维高斯分布表示为

$$e^{-\pi(x^2+y^2)}$$

同样具有傅里叶变换对称性，具有单位中心幅度与单位的曲面下体积。在统计学中，对任意标准离差 σ_x 和 σ_y，所用到的形式是

$$\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-x^2/2\sigma_x^2-y^2/2\sigma_y^2}$$

在圆对称的条件下，令 $x^2+y^2=r^2$，二维概率坐标变为

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-r^2/2\sigma^2}$$

径距在 r 到 $r+\mathrm{d}r$ 范围内的概率 $R(r)\mathrm{d}r$ 就是以上式为概率密度，在环状微面积为 $2\pi r\mathrm{d}r$ 上的概率，因此

$$R(r)=\frac{r}{\sigma^2}e^{-r^2/2\sigma^2}$$

这就是所谓的瑞利分布，因为是英国物理学家瑞利在著名的醉汉问题中提出的而得名。"醉汉问题"的简单描述如下：一个醉汉总是每走一步就要跌在地上，每一步的方向和他前一步的方向无关。在经过很长的时间之后，在 (x,y) 点找到他的概率是二维高斯函数（根据此模型，他似乎更可能在出发点而不是其它地方），而在距离出发点 r 的地方找到他的概率符合瑞利分布。由于瑞利分布的峰值不在原点处，上面的叙述似乎是矛盾的。读者可以进一步思考这个问题，这对您是非常有益的。

下面是一些经常需要查找的积分和微分：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\pi x^2}\mathrm{d}x=1 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x=(2\pi^{\frac{1}{2}})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-Ax^2}\mathrm{d}x=(\frac{\pi}{A})^{\frac{1}{2}} \qquad \int_{0}^{+\infty}xe^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2} \qquad \int_{0}^{+\infty}x^2e^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{-\pi x^2}=-2\pi xe^{-\pi x^2} \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}e^{-\pi x^2}=-2\pi(1-2\pi x^2)e^{-\pi x^2}$$

高斯函数序列在极限条件下的变换中起到一个特殊的作用。当 τ 趋近于 0 时，序列 $\exp(-\pi\tau^2x^2)$ 和那些积分并不收敛的函数相乘将是很有用的。序列中的有限项是保持不变的。如果某个平凡函数包含冲激，那么就可以与序列 $|\tau|^{-1}\exp(-\pi x^2/\tau^2)$ 进行卷积运算来还原它们。高斯函数在变换领域十分有用的一个属性是：它的所有微分都是连续的，而且它比 x 的任何指数都要衰减得快，即

$$\lim_{x\to\infty}x^n e^{-x^2}=0 \qquad \text{对任意的 } n$$

图 4.7 图示了两种重要序列，后面我们将强调对应曲线是一对傅里叶变换。

Heaviside 单位阶跃函数 $H(x)$

单位阶跃函数是表达简单非连续性的不可缺少的辅助手段，定义为

$$H(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ (\frac{1}{2} & x=0)\\ 1 & x>0\end{cases},$$

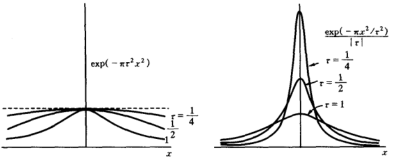


图 4.7　高斯函数的标准序列

如图 4.8 所示，它可以用来表示在某一特定时间突然接通的并在其后保持的电压或者瞬时施加并在其后保持的力。进一步地，任何有跳变的函数都可以被分解为一个连续函数和一个平移的阶跃函数。作为另一个简单的例子，对矩形函数 $\Pi(x)$，它有两个不连续点，一个为正的阶跃，一个为负的阶跃。如果没有它们，那么信号就不存在了。因此，$\Pi(x)$ 完全可以用下述的阶跃函数来表达（参见图 4.9）。

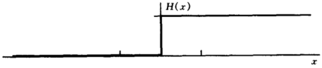


图 4.8　单位阶跃函数

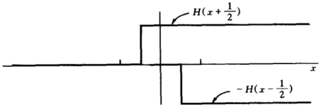


图 4.9　和为 $\Pi(x)$ 的两个阶跃函数

因为一个函数和 $H(x)$ 相乘后，原函数在 x 为负时变为零，而在 x 为正时保持不变。所以单位阶跃函数是一种能够表达简单信号值被开关的简便手段。比如，我们可以用 $\sin tH(t)$ 表示一个在 $t=0$ 时开始作用的正弦（如图 4.10）。电压在 $t=t_0$ 前为零，之后阶跃到一个稳定值 E，可以表示为 $EH(t-t_0)$（如图 4.11）。

斜坡函数 $R(x)=x\,H(x)$ 是另一个由 x 和 $H(x)$ 进行乘法运算得到的例子（如图 4.12）。$(F/m)R(t)$ 表示被施于一个恒定的力 $FH(t)$，质量为 m 的物体的加速度，或者在电感为 m 的线圈上电势差为 $FH(x)$ 时的电流值。显然，$R(x)$ 是 $H(x)$ 的积分，反过来即 $H(x)$ 是 $R(x)$ 的微分。这样

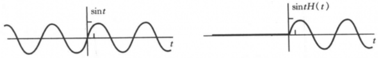


图 4.10 sin$t$ 和显示单位阶跃函数的基本应用的函数 sin$tH(t)$

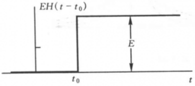


图 4.11 在 $t=t_0$ 产生电压 E 用阶跃函数记法表示为 $EH(t-t_0)$

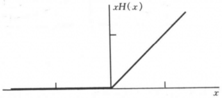


图 4.12 斜坡函数 $xH(x)$

$$R(x)=\int_{-\infty}^{x}H(x')\mathrm{d}x'$$

以及

$$R'(x)=H(x)$$

阶跃函数对简化积分上下限起了重要作用，它通过对原来的界限外的部分置零来实现。然后就可以使用常用的积分区间，比如 $-\infty$ 到 $+\infty$，或 0 到 $+\infty$。例如，函数 $H(x-x')$ 在 $x'>x$ 时为零，那么 $\int_{-\infty}^{x}f(x')\mathrm{d}x'$ 就总可以写成 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x')H(x-x')\mathrm{d}x'$。因此上面有关 $R(x)$ 的积分可以写成

$$R(x)=\int_{-\infty}^{x}H(x')\mathrm{d}x'=\int_{-\infty}^{+\infty}H(x')H(x-x')\mathrm{d}x'$$

最后一个积分表明 $R(x)$ 实际上是一个卷积积分

$$R(x)=H(x)*H(x)$$

现在，我们可能已经注意到，如果积分存在的话，与 $H(x)$ 做卷积就是做积分运算(见图4.13)

$$H(x)*f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x')H(x-x')\mathrm{d}x'=\int_{-\infty}^{x}f(x')\mathrm{d}x'$$

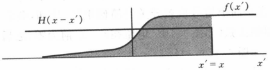


图 4.13 阴影部分面积为 $\int_{-\infty}^{x}f(x')\mathrm{d}x'$，它也是 $f(x)$ 和 $H(x)$ 的卷积值

或

$$f(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[H(x)*f(x)]$$

一般地，$H(0)$ 的定义并不重要，但为了和单值函数理论兼容起见，需要对它赋一个值，通常为$\frac{1}{2}$。这样可以获得某些内在的一致性。比如对等式 $R'(x)=H(x)$。显然有 $R'(0+)=H(0+)=1$，$R'(0-)=H(0-)=0$，如果我们认为

$$R'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[R(x+\frac{1}{2}\Delta x)-R(x-\frac{1}{2}\Delta x)\right]/\Delta x,$$

则得到 $R'(0)=\frac{1}{2}$。更进一步，当傅里叶积分收敛于一不连续的点上时，那么就赋给它中值。

然而，并不绝对要求 $H(0)=\frac{1}{2}$，也常见取作零值的。这一点是从公式

$$\hat{H}(x)=\lim_{\tau\to 0}[(1-\mathrm{e}^{-x/\tau})H(x)]$$

自然得到的结论（参见图 4.14）。那么有 $\hat{H}(0)=0$。符号“ ^ ”表示它和原来定义过的函数有些细微的区别。

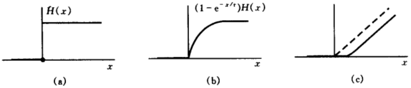


图 4.14

(a) 函数 $H(x)$；(b) $H(x)$ 的近似；(c)(b) 的积分

因此

$$\hat{H}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$$

且

$$H(x)=\hat{H}(x)+\frac{1}{2}\delta^0(x)$$

其中

$$\delta^0(x)=\begin{cases}0 & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

$\delta^0(x)$ 函数是下面提到的零函数族(null function) 中的一个。关系 $R'(x)=\hat{H}(x)$ 没有引起需要注意的差异，因为 $\hat{H}(x)$ 的积分可看作

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{x}(1-\mathrm{e}^{-u/\tau})H(u)\mathrm{d}u$$

肯定是 $R(x)$；$R'(0)$ 被认为是在 $x=0$ 处极限斜率的近似值，如图 4.14c 所示，它肯定等于 $\dot{H}(0)$，也即 0。

有时，对 $H(x)$ 的连续近似是有用的。下面的例子对所有 x 当 $\tau\to 0$ 时都趋近于 $H(x)$。

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{\tau}$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(-\frac{x}{\tau}\right)=\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}\int_{-x}^{\infty}\tau^{-1}\mathrm{e}^{-u^2/\tau^2}\,\mathrm{d}u$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{Si}\,\frac{\pi x}{\tau}=\int_{-\infty}^{x}\tau^{-1}\,\mathrm{sinc}\,\frac{u}{\tau}\mathrm{d}u$$

$$\int_{-\infty}^{x}\tau^{-1}\Pi\left(\frac{u}{\tau}\right)\mathrm{d}u$$

$$\frac{1}{2}+\begin{cases}\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-x/\tau}) & x>0\\ -\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{x/\tau}) & x<0\end{cases}$$

下面是除 $x=0$ 以外，对所有 x 当 $\tau\to 0$ 时趋近于 $H(x)$ 的一个例子

$$f(x,\tau)=\begin{cases}0 & x<-\tau\\ 1-\mathrm{e}^{-(x+\tau)/\tau} & x>-\tau\end{cases}$$

在这个例子中

$$\lim_{\tau\to 0}f(x,\tau)=H(x)+\left(\frac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}\right)\delta^0(x)$$

对所有 τ，$f(0,\tau)=1-\mathrm{e}^{-1}$。当 $\tau\to 0$ 趋近于 $H(x)$ 的另一个例子是

$$\int_{-\infty}^{x}\tau^{-1}\Lambda\left[\frac{u-\frac{1}{2}\tau}{\tau}\right]\mathrm{d}u$$

$H(x)$ 函数和它的 $H(0)\neq\frac{1}{2}$ 变形函数之间的差别是一个零函数，它的积分永远是 0。如果真有必要，对 $H(x)$ 或 $\dot{H}(x)$ 的量的变化作物理观察，当这种观察仅局限于有限分辨率时，在两个变化量之间进行数学上的区分是不可能的。因为在非零区间的加权平均是惟一可被测量的量，它是不会受零函数存在与否的影响的。因此，应用 $H(x)$ 时最好不要涉及 $H(0)$。

符号函数 sgn*x*

符号函数 sgn$x$（念作 signum x），根据 x 的符号取 1 或 −1（参见图 4.15），即

$$\mathrm{sgn}x=\begin{cases}-1 & x<0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

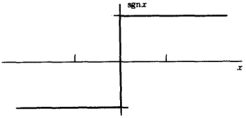


图 4.15　奇函数 sgn$x$

它与阶跃函数 $H(x)$ 有点不一样，但具有阶跃函数的许多特性。它有 2 的正跳变（阶跃），与

$H(x)$ 的关系是

$$\operatorname{sgn}x = 2H(x) - 1$$

然而，$\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}\operatorname{sgn}x\,\mathrm{d}x = 0$，而$\int_{-\infty}^{\infty}H(x)\mathrm{d}x$ 不存在。进一步，我们要注意 $\operatorname{sgn}x$，它不像 $H(x)$，它是奇函数，这是它与 $H(x)$ 最明显的区别，$H(x)$ 既有奇部又有偶部。

滤波函数或内插函数 sinc$x$

我们定义：

$$\operatorname{sinc}x = \frac{\sin\pi x}{\pi x},$$

它的特性有：

$$\operatorname{sinc}0 = 1$$

$$\operatorname{sinc}n = 0 \qquad n \text{ 是非 0 整数}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}x\,\mathrm{d}x = 1。$$

在许多关系和等式中，我们都能见到内插函数，以至于它拥有一个特殊的符号，尤其当它为归一化形式时非常方便。本书采用的形式是：中心处的幅度 1，曲线下的面积为 1，(如图 4.16a)。Woodward (1953) 首先采用 sinc 的符号，现在得到了广泛的接受和使用。本书第 20 章列出了 sinc 函数值表。

sinc 函数独一无二的特性是在频谱上，它包含一定频带内的所有频谱分量。进一步，在截止频率以内它的频谱是平坦的。按我们的选择，sinc$x$ 与 $\Pi(s)$ 是一对傅里叶变换对，因此 sinc$x$ 的频率截止点是 0.5(每单位 x 周期数)。

sinc$x$ 在卷积中是理想的低通滤波器。也就是说，它保留截止频率以内的频率分量并保持不变，而对截止频率以外的分量全部删除。这一特性在随后讨论的采样定理中起着重要的内插作用。

根据已被广泛列表的正弦积分 Si x(如图 4.16c 所示)，即

$$\mathrm{Si}\,x = \int_0^x \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u,$$

我们有如下关系：

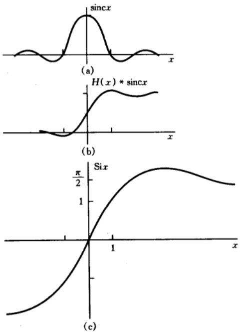


图 4.16
(a) 滤波或内插函数，sinc$x$ 函数；
(b) sinc$x$ 的积分；(c) 正弦函数的积分

$$\int_0^x \text{sinc}u\,du = \frac{\text{Si}(\pi x)}{\pi}$$

$$\text{sinc}x = \frac{d}{dx}\frac{\text{Si}(\pi x)}{\pi},$$

对 sinc$x$ 进行积分(见图 4.16b),我们有

$$H(x) * \text{sinc}x = \int_{-\infty}^x \text{sinc}u\,du = \frac{1}{2} + \frac{\text{Si}(\pi x)}{\pi}。$$

另一个常用函数(见图4.17)是sinc$x$的平方,它的列表见第 20 章。

$$\text{sinc}^2 x = \left(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right)^2$$

这个函数表示一个均匀激励天线的功率方向图,或 Fraunhofer 缝隙衍射模型中的光强。自然地,它和 sinc$x$ 一样都有一个截止频率,因为函数的平方并不能生成比任何一对正弦分量的和频更高的频率。从物理原理的定量思考不难发现 sinc^2x 的傅里叶变换是 $\Lambda(s)$,截止频率是 1。

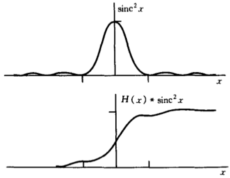


图 4.17 sinc$x$ 函数的平方和它的积分

下面列出了 sinc^2x 的一些特性:

$$\text{sinc}^2 0 = 1$$

$$\text{sinc}^2 n = 0 \qquad n \text{ 是非 0 整数}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2 x\,dx = 1$$

与 sinc$x$ 相似的二维函数是

$$\text{jinc}r = \frac{J_1(\pi r)}{2r}$$

它的体积为 1,中值为 $\pi/4$,二维傅里叶变换为 $\Pi(s)$。另一个与滤波和内插函数具有相似性质的二维函数是

$$\text{sinc}x\text{sinc}y$$

它的二维傅里叶变换是 $\Pi(u)\Pi(v)$。

图形表示

为了达到表达明晰的目的,我们在图形表示中采用一些约定。比如,如果可能的话,傅里叶变换的有关定理将会用图形来表示,使其更容易理解。在这些图中,如果方便的话,我们会标明横坐标或纵坐标等于 1 的点。

我们在图示中总是用虚线表示虚部,这样复数就可无歧义地用实部和虚部一起表示(如图 4.18)。

有时一个复函数用其幅度和相位表示非常方便,如图 4.19 所示。另外一种方法是用一个

三维图形来表示复函数(见图 4.20),也可在复平面上采用轨迹表示的方法表示一个复函数(图 4.21)。

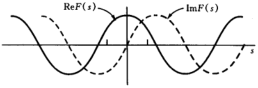


图 4.18 用实部和虚部一起表示复函数 $F(s)$

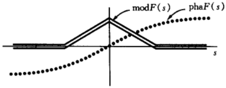


图 4.19 用幅度和相位一起表示复函数

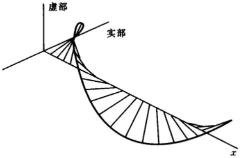


图 4.20 复函数的三维表示

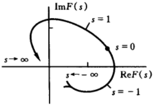


图 4.21 复平面上 $F(s)$ 的值

特殊符号总结

一些本书常用的特殊符号已被总结归纳于表 4.1 和图 4.22 中,以便查阅参考。

表 4.1 特殊符号

函数	记法
矩形函数	$\prod(x)=\begin{cases}1 & \lvert x\rvert<\frac{1}{2}\\ 0 & \lvert x\rvert>\frac{1}{2}\end{cases}$
三角窗函数	$\Lambda(x)=\begin{cases}1-\lvert x\rvert & \lvert x\rvert<1\\ 0 & \lvert x\rvert>1\end{cases}$
Heaviside 阶跃函数	$H(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$
符号函数	$\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$
冲激符号*	$\delta(x)$
抽样或复制符号*	$\mathrm{III}(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(x-n)$

续表 4.1

函数	记法
偶脉冲对	$\mathrm{II}(x)=\frac{1}{2}\delta(x+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\delta(x-\frac{1}{2})$
奇脉冲对	$\mathrm{I_I}(x)=\frac{1}{2}\delta(x+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}\delta(x-\frac{1}{2})$
滤波或内插函数	$\mathrm{sinc}x=\frac{\sin\pi x}{\pi x}$
Jinc 函数	$\mathrm{jinc}x=\frac{J_1(\pi x)}{2x}$
卷积的星号表示	$f(x)*g(x)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}f(u)g(x-u)\mathrm{d}u$
序列积的星号表示	$\{f_i\}*\{g_i\}\triangleq\sum_j f_j g_{i-j}$
相关的五角星表示	$f(x)\bigstar g(x)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}f(u)g(x+u)\mathrm{d}u$
几个二维函数	${}^2\Pi(x,y)=\Pi(x)\Pi(y)$ ${}^2\delta(x,y)=\delta(x)\delta(y)$ ${}^2\mathrm{III}(x,y)=\mathrm{III}(x)\mathrm{III}(y)$ ${}^2\mathrm{sinc}(x,y)=\mathrm{sinc}x\,\mathrm{sinc}y$

* 参见第 5 章

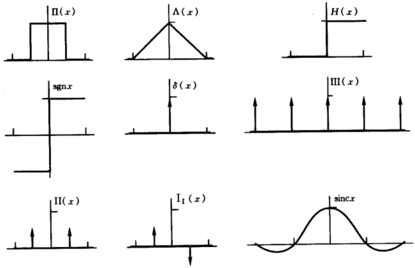


图 4.22 特殊符号总结

参考书目

Woodward, P. M.: "Probability and Information Theory with Application to Radar,"

McGraw-Hill Book Company, New York, 1953.

习题

1. 证明

$$H(ax+b)=\begin{cases}H(x+\frac{b}{a}) & a>0\\ H(-x-\frac{b}{a}) & a<0,\end{cases}$$

继而有

$$H(ax+b)=H(x+\frac{b}{a})H(a)+H(-x-\frac{b}{a})H(-a)。$$

2. 讨论函数

$$\frac{1}{2}[1+x/(x^2)^{\frac{1}{2}}]。$$

3. 证明操作 $H(x)*$ 在下面的等式中是求积分的操作：

$$H(x)*[f(x)H(x)]=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$$

4. 计算

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\Pi(x)*H(x)]$$

并证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\Pi(x)*H(x)]=f(x)。$$

5. 通过计算积分，证明

$$\mathrm{sinc}x*\mathrm{sinc}x=\mathrm{sinc}x。$$

6. 证明 $\quad \mathrm{sinc}x*J_0(\pi x)=J_0(\pi x)。$

7. 证明 $\quad 4\mathrm{sinc}4x*\sin x=\sin x。$

8. 证明

$$\begin{aligned}\Pi(x)&=H(x+\frac{1}{2})-H(x-\frac{1}{2})\\&=H(\frac{1}{2}+x)+H(\frac{1}{2}-x)-1\\&=H(\frac{1}{4}-x^2)\\&=\frac{1}{2}[\mathrm{sgn}(x+\frac{1}{2})-\mathrm{sgn}(x-\frac{1}{2})]\end{aligned}$$

且有

$$\Pi(x^2)=\Pi(x/2^{\frac{1}{2}})。$$

9. 证明：

$$\Lambda(x)=\Pi(x)*\Pi(x)=\Pi(x)*H(x+\frac{1}{2})-\Pi(x)*H(x-\frac{1}{2})。$$

10. 等式 $f[f(x)]=f(x)$ 的一个解是 $f(x)=\mathrm{sgn}x$，找出其他的解，并用阶跃函数表示法写出它的通解。

11. 证明：

$$\mathrm{erf}x=2\Phi(2^{\frac{1}{2}}\sigma x)-1$$

其中

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{e}^{-u^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}u。$$

12. 证明 $\Lambda(x)$ 的一阶微分如下：

$$\Lambda'(x)=-\Pi\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{sgn}x$$

并计算它的二阶微分。

13. $\Lambda(x)$ 与 $\Pi(x)$ 的关系可简记作：$\Lambda=\Pi*\Pi$ 或 $\Lambda=\Pi^{*2}$，证明：

$$\Pi^{*2}=\Pi*\Lambda=\frac{1}{2}(x+1\frac{1}{2})^2\Pi(x+1)+(\frac{3}{4}-x^2)\Pi(x)+\frac{1}{2}(x-1\frac{1}{2})^2\Pi(x-1)。$$

并证明

$$\Pi^{*2}=\frac{1}{2}(x+1\frac{1}{2})^2H(x+1\frac{1}{2})-\frac{3}{2}(x+\frac{1}{2})^2H(x+\frac{1}{2})+\frac{3}{2}(x-\frac{1}{2})^2H(x-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}(x-1\frac{1}{2})^2H(x-1\frac{1}{2})。$$

14. 研究 Π^{*3} 在 $x=\frac{1}{2}\pm$ 和 $x=1\frac{1}{2}\pm$ 点的微分，并作出关于它的斜率与曲率连续性的一些结论。

15. 证明 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\mid x\mid=\mathrm{sgn}x$ 和 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\mathrm{sgn}x=2\delta(x)$。讨论下式：

$$\frac{\mathrm{d}^2\mid x\mid}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}[2xH(x)]=2\delta(x)。$$

16. 符号 证明 $H(x)*H(x+1)-H(x)*H(x-1)=\Lambda(x)$，或者，如果等式右边不正确，给出正确的表达式。

17. 符号 证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{[\Lambda(x)]^2\}=-\Lambda(x)\mathrm{sgn}x。$$

或者，如果等式右边不正确，给出正确的表达式。

18. sinc 函数的微分 证明

$$\text{sinc}'x = \frac{\cos\pi x}{x} - \frac{\sin\pi x}{\pi x^2}$$

$$\text{sinc}''x = -\frac{2}{x^2}\cos\pi x + \frac{2x + \pi^2 x^3}{\pi x^4}\sin\pi x。$$

19. jinc 函数的积分　在介绍 jinc 函数时，曾提到$\int_0^\infty \text{jinc}r 2\pi r \mathrm{d}r = 1$，即把它看作二维平面中半径的函数，jinc 函数下的体积是 1。证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{jinc}x \mathrm{d}x = 1。$$

第 5 章

冲激符号

我们需要一套专门用来描述高强度单位面积脉冲的记号。这类脉冲持续的时间极短，以至于具有特定分辨能力的测量仪器都无法把它们同更为短暂的脉冲区分开来。这个概念在力学中有一个专门的术语叫做“冲激”。冲激的确切具体形式并不重要，重要的是其积分特性。这种观点在数学界流行了至少有一个世纪了。很多历史人物的著作都反映了这一情况，比如埃尔米特(Hermite)、柯西(Cauchy)、泊松(Poisson)、基尔霍夫(Kirchholff)、赫尔姆霍茨(Helmholtz)、开尔文(Kelvin)和海维赛德(Heaviside)，还有范德波尔(van der Pol)和布莱姆(Bremmer)(1955)。$\delta(x)$ 这一记号，由 G·基尔霍夫首次使用，随后由狄拉克(Dirac)(1947)于 1927 年引入量子力学中，至今已被广泛应用。该概念的实质也渗透到了物理学。质点、点电荷、点源、点作用力、线源、面电荷等等都是物理学中常用的并被人们接受的实体。当然，这些东西并不存在。它们概念上的确切含义源于下面这一事实：用给定的具有特定分辨力的测量仪器不能够将冲激响应(诸如质点、点电荷等冲激的作用效果)和物理上可实现的脉冲的响应区分开来。方便起见，我们将给这种短暂得不能再短暂、强烈得不能再强烈的脉冲取一个专门的名称。

我们把这种抽象的无限短暂或集中、无限强烈的单位面积冲激表示为

$$\delta(x) = 0 \quad x \neq 0$$

和

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1。$$

不过，从分析的意义上讲，冲激符号[①] $\delta(x)$ 并不能表示一个函数(这里是为了强调狄拉克曾提出“奇异函数”的概念这一事实)，并且上面的积分也不是一个有意义的表达式，除非声明了某种约定。此处我们赋予它的含义是

---

① 我一直用“符号”这个词来标记不能称作函数的实体，也有人用“广义函数”这个术语(G. Temple 于 1953 年引入)。不过，有些著作中对函数 $f(x)$ 和实体 $\delta(x)$ 并不作严格区分，因为在这些书中，$\delta(x)$ 是像函数一样来处理的，通常称为 δ 函数也是可以理解的。

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\tau^{-1}\Pi(x/\tau)\mathrm{d}x$$

函数 $\tau^{-1}\Pi(x/\tau)$ 是一个宽为 τ，高为 τ^{-1}，具有单位面积的矩形函数；当 τ 趋向于 0 变化时，便会产生一个高度逐渐增大的单位面积脉冲序列。显然，上面积分的极限等于 1。换句话说，为了解释包含冲激符号的表达式，我们借助于具有特定形状的、持续时间很短但是不为零的有限长单位面积脉冲序列。我们进行指定的运算，如积分、求导和乘法，然后讨论持续时间 τ 逼近 0 时的极限。从数学角度讲，选用高斯型脉冲往往会很方便；很明显，当涉及到微分运算的时候，选用矩形脉冲就不方便了。然而，由于其物理实质与脉冲形状无关，因此我们当然可以选择任意形状的脉冲。

我们采用同样的方法来处理遇到的各种情况。我们将在后面对广义函数作系统的介绍，使用序列的思想和简洁的数学形式进行严格推导。

前面，在介绍函数（如不存在傅里叶变换的周期函数）的时候，已经提到过对傅里叶变换理论进行推广的必要性。为了描述变换对中至少包含一个广义函数的情况，我们引入“极限意义下的变换对”这一术语。所有这类情况，都可以借助冲激符号及其导数（$\delta(x)$，$\delta'(x)$ 等等，它们为理论的推广提供了方便）来表示。

冲激符号的方便之处在于它隐藏了细节。物理系统中，能说明这一点的一个具体的例子是电网络，如低通滤波器。一个外加的脉冲电压将引起一定的瞬态响应，这很容易观察到。随外加脉冲变得越来越短暂，响应的变化会越来越不明显，最后响应几乎不随外加脉冲的变化发生变化，而是稳定于一个确定的形式。我们还可以发现，响应的形式与输入脉冲的形状无关，输入脉冲可以为矩形、三角形，甚至于一对脉冲。这是因为用于区分外加脉冲细节的高频分量所引起的响应非常微弱，可以忽略。因此，这个网络就可以由某个确定的、易于观察的响应形式来刻画，而这个响应形式可以借助多种外加波形得到，只需要保证波形持续时间足够短暂，而其细节无关紧要。由于可以用高精度、高时间分辨率的示波器来仔细观察响应情况，故我们必须保证外加脉冲的持续时间比测量仪器的最小刻度要短。冲激符号使我们能简洁地描述不确定的任意形状的短暂脉冲。

冲激符号和单位阶跃函数的密切关系是根据 $\int_{-\infty}^{x}\delta(x')\mathrm{d}x'$ 在 x 为正数时等于 1，而 x 为负数时等于 0 这一性质得出的。因此，

$$\int_{-\infty}^{x}\delta(x')\mathrm{d}x' = H(x)。$$

这个方程使我们有机会阐明包含冲激符号的表达式的含义。首先，我们用脉冲序列（当 τ 趋向于 0 变化时，便形成序列）$\tau^{-1}\Pi(x/\tau)$ 代替 $\delta(x)$，思考下面的积分序列

$$\int_{-\infty}^{x}\tau^{-1}\Pi(x'/\tau)\mathrm{d}x'。$$

只要 τ 有限且非零，每个这样的积分都是 x 的函数，可以描述为如图 5.1 所示的斜坡-阶跃函数。现在固定 x，考虑 τ 趋近于 0 时形成的积分序列的极限。我们发现，如果将 x 固定为一个正值（负值），则积分的极限将为 1(0)。这恰好与 $H(x)$ 的定义相一致，故下式成立

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{x}\tau^{-1}\Pi(x'/\tau)\mathrm{d}x' = H(x)。$$

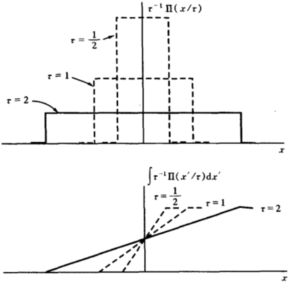


图 5.1 矩形脉冲序列和由积分得到的斜坡-阶跃函数序列

其简化形式如下

$$\int_{-\infty}^{x}\delta(x')\mathrm{d}x' = H(x)。$$

由于,一般情况下,如果

$$\int_{-\infty}^{x}f(x')\mathrm{d}x' = g(x),\text{ 则 } f(x) = g'(x),$$

由此类推,可得

$$\delta(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H(x)$$

即"单位阶跃函数的导数是冲激符号"。由于阶跃函数在原点处的导数实际上不存在,所以前面引号中的话只能理解为下面这句话的简化说法:"由可微函数形成的极限为 $H(x)$ 的序列的导数恰好构成了 $\delta(x)$ 的一个定义序列"。图 5.1 所示的斜坡-阶跃函数可微,并且趋于 $H(x)$。由于在各种情况下,台阶的值(阶跃函数在 $x>0$ 部分的函数值)均为 1,所以每个导函数下面的面积都为 1,这证明用由导函数形成的序列来定义单位冲激是恰当的。

没必要局限于按照矩形函数形成的序列来讨论冲激。我们可以用多种形状的脉冲来描述 $\delta(x)$,包括下面介绍的序列(τ 取正值趋向于 0 时形成的序列)。

序列

$$\tau^{-1}\Pi\left(\frac{x-\frac{1}{2}\tau}{\tau}\right)$$

由左边沿在原点处的矩形函数组成。它常用于开关扳掷时刻,即 $t=0$ 以前,不存在跃变的电路

分析中。如果用该序列代替以原点为中心的序列，那么所得结果不一定相同。这一点将在后面介绍筛选特性时进行讨论。高斯分布序列

$$\tau^{-1}e^{-\pi x^2/\tau^2}$$

前面已经提到过，其优点是各阶导数都存在，而缺点是无法使函数值在 x 的有限区间以外为0。三角窗函数序列

$$\tau^{-1}\Lambda(x/\tau)$$

由于本身是连续的，在涉及到一阶导数的讨论中比较有用。它还有一个优点是在 $|x|<\tau$ 的区间以外函数值为 0。序列

$$\tau^{-1}\operatorname{sinc}\frac{x}{\tau}$$

比较奇特的地方是，$x\neq 0$ 的时候，函数值并不衰减到 0；x 取不等于 0 的值时，函数值随 $\tau\to 0$ 作无衰减震荡。后面介绍筛选特性时将说明该序列是如何完美地定义 $\delta(x)$ 的。谐振

$$\frac{\tau}{\pi(x^2+\tau^2)}$$

随 x 的增大非常缓慢地衰减。它和一个任意函数的乘积有可能具有无穷面积，为了完全消除这种可能性，人们想到了在有限区间以外为 0 的序列，这种序列可以自由地与具有某种渐近特性的函数相乘。此外，我们还希望序列的任意阶导数都存在。表达式

$$\tau^{-1}\exp\left[\frac{-1}{1-(x/\tau)^2}\right]\Pi\left(\frac{x}{2\tau}\right)$$

给出了一个具体的例子，它在区间 $|x|<\tau$ 以外为0，并且各阶导数都存在。为了证实一个斜率为 0，曲率为 0，并且所有高阶导数都为 0 的函数有可能下降到 0，对函数

$$e^{-1/x}H(x)$$

求导，并计算 $x=0$ 处的导数值。这好像和 Maclaurin 展式

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\text{余项}$$

不一致。通常，对很多函数进行分析的结果都是，$n\to\infty$ 时，余项消失。可是，在我们选择的例子中，前 $n+1$ 项为 0，函数值全部包含在余项中。

筛选特性

我们将按照解释包含冲激符号的表达式时所用的方法，来说明$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)\mathrm{d}x$ 的含义。用序列 $\tau^{-1}\Pi(x/\tau)$ 代替 $\delta(x)$，进行乘法和积分运算，最后求 $\tau\to 0$ 时积分的极限，如下式所示：

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\tau^{-1}\Pi(x/\tau)f(x)\mathrm{d}x。$$

在图 5.2 中，被积函数用虚线表示，其面积为阴影面积的 τ^{-1} 倍。宽为 τ，平均高度约为 $f(0)$ 的

阴影部分的面积近似为 $\tau f(0)$。因此 τ 趋近于 0 时，被积函数下面的面积趋近于 $f(0)$，记作

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)\mathrm{d}x = f(0) 。$$

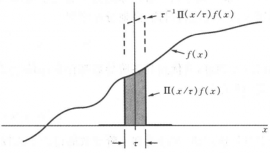


图 5.2 对筛选特性的解释。阴影部分的面积近似为 $\tau f(0)$

由于等式左边对 $f(x)$ 所进行的运算筛选出了函数 $f(x)$ 的单个值，所以我们把它称作冲激符号的筛选特性。我们发现被积函数由哪种脉冲组成都没有关系，这正是使用 $\delta(x)$ 的本质所在。$\delta(x)$ 代表了持续时间远小于任何有意义的区间，形状无关紧要的单位脉冲，仅其积分对我们有用。如图 5.3 所示，单位冲激用单位高度的尖峰表示，而其它非单位冲激用高度等于其积分的尖峰表示。

显然，下面的等式也成立：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)f(x)\mathrm{d}x = f(a),$$

而且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x-a)\mathrm{d}x = f(-a) 。$$

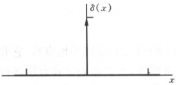


图 5.3 用单位高度尖峰表示的冲激符号 $\delta(x)$

为强调其和卷积积分的类同之处，我们可以这样写

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x')f(x-x')\mathrm{d}x' = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x')f(x')\mathrm{d}x' = f(x),$$

或用卷积运算符表示

$$\delta(x) * f(x) = f(x) * \delta(x) = f(x) 。$$

如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 处发生跳变，按照类似图 5.2 中的图所提示的思路可证明筛选积分具有一个有限值 $\frac{1}{2}[f(0+)+f(0-)]$。因此，一般情况下可表示为

$$\delta(x) * f(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}。$$

仅当 $f(x)$ 为零函数时，等式右边的式子才不等于 $f(x)$，通常情况下，这点差别并不重要，这并未改变 $\frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)]$ 可以与 $f(x)$ 取不同值的事实。

我们发现前面提到的不对称序列 $\tau^{-1}\Pi[(x-\frac{1}{2}\tau)/\tau]$ 具有可筛选出 $f(x+)$ 的性质。这样，在 $f(x)$ 的间断点上，使用不对称序列会得出不同的结果。所以，在瞬态分析中，当瞬时($t=0$)发生不连续现象时，选取不同的序列似乎会得出不同的答案。不过，这只是瞬时的。

冲激符号有很多美妙的性质，多数都很容易证明。在代数处理中，必须留心下面这一重要

性质：

$$\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x),$$

即，如果用系数 a 对 x 进行尺度压缩，则会导致原本为单位面积的脉冲面积缩小，于是冲激强度缩小到原来的 $\frac{1}{|a|}$。性质 $\delta(-x)=\delta(x)$，说明冲激符号具有偶对称性质。不过，我们在前面给出了一个方程，涉及到本身并非偶对称的经过移位变换的矩形函数序列（第 5 章习题 19）。

如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，那么借助脉冲序列很容易证明

$$f(x)\delta(x)=f(0)\delta(x)\ 。$$

根据筛选性质，令 $f(x)=x$，我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty}x\delta(x)\,\mathrm{d}x=0\ 。$$

通常写为

$$x\delta(x)\equiv 0\ ,$$

虽然，如果考虑用有限项近似的傅里叶级数的曲线图，可以发现这个等式中隐含了一个记录吉伯斯现象的非零分量。故下式成立：

$$\lim_{\tau\to 0}[x\tau^{-1}\Pi(x/\tau)]=0,\text{任取 } x$$

而且，

$$\lim_{\tau\to 0}[x\tau^{-1}\Pi(x/\tau)]_{\max}=\frac{1}{2},$$

另外，最小值的极限是 $-\frac{1}{2}$。因此，在恒等于零的函数中，$x\delta(x)$ 非常独特，可以想象，如果可以把它作用于示波器的偏转电极，我们将会看到尖峰。

采样或复制符号 III(x)

考虑如图 5.4 所示的间隔为 1 的无限长单位冲激序列。任何对冲激符号 $\delta(x)$ 所作的限制，此处仍适用。其实，我们有可能需要更多的限制，因为我们要处理的是具有无限个无穷间断点的、不收敛的无穷积分，例如傅里叶变换存在的所有条件都不满足。业已证明，无限长冲激序列的概念非常有用，并且在数学上容易处理。

为描述这一概念，我们引入 *shah*[①] 符号 III((x)，并记为

---

① 按照西里尔字母 Ш，符号 III 发音为 *shah*，据说这一字母来源于希伯来字母 ש (shin)，而这一希伯来字母又来源于埃及象形文字 ，意思是尼罗河沿岸的一种草本植物。

$$\mathrm{III}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) \text{。}$$

还有很多显而易见的性质如下：

$$\mathrm{III}(ax) = \frac{1}{|a|} \sum \delta(x - \frac{n}{a})$$

$$\mathrm{III}(-x) = \mathrm{III}(x)$$

$$\mathrm{III}(x+n) = \mathrm{III}(x),\ n \text{ 为整数}$$

$$\mathrm{III}(x-\frac{1}{2}) = \mathrm{III}(x+\frac{1}{2})$$

$$\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{III}(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$\mathrm{III}(x) = 0,\ x \neq n$$

显然，$\mathrm{III}(x)$ 是周期为 1 的周期函数。

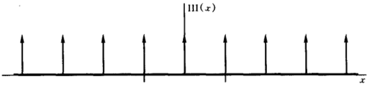


图 5.4 *shah* 符号 $\mathrm{III}(x)$

周期采样性质是已讨论过的冲激符号的筛选积分特性的推广。因此，用 $\mathrm{III}(x)$ 和函数 $f(x)$ 相乘便有效地对 $f(x)$ 以单位间隔进行了采样：

$$\mathrm{III}(x)f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\delta(x-n) \text{。}$$

结果不包含两整数间 $\mathrm{III}(x)=0$ 所对应的 $f(x)$ 的信息，而当 x 为整数时 $f(x)$ 的值被保留下来（见图 5.5）。

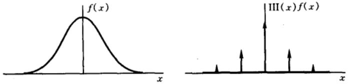


图 5.5 $\mathrm{III}(x)$ 的采样特性

$\mathrm{III}(x)$ 的采样特性使其成为一个很有用的工具，广泛应用于很多学科，如天线阵的方向图、光栅衍射图样、电视和雷达的扫描光栅、脉冲调制、数据采样、傅里叶级数和离散化间隔计算。

与基于乘法运算的采样特性同样重要的一个性质是复制特性，它表现在用 $\mathrm{III}(x)$ 和函数

$f(x)$ 所进行的卷积运算当中，即

$$\mathrm{III}(x) * f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x-n);$$

如图 5.6 所示，函数 $f(x)$ 沿 x 轴正负方向以单位间隔重复出现，永无止境。当然，如果 $f(x)$ 的底宽大于 1，则会发生交叠。

III 符号也适用于有周期结构的情况。这种双重特性(指适用于周期和非周期两种情况)绝非偶然，这和在极限情况下 III 是它自身的傅里叶变换这一事实是相关的。当然，这一性质比其它性质要有用得多。

这一傅里叶变换下的自互易性质将在后面推导。

shah 函数在 x 方向被系数 2 压缩后的结果记作 $\mathrm{III}(2x)$，冲激的分布比原来密集了一倍。但是从代数一致性角度讲，冲激强度被同样的系数缩小了。我们可以借助由矩形函数序列定义的冲激来理解这一点；每一个矩形的宽度和面积都缩为原来的一半。因此，与 $\delta(ax) = |a|^{-1}\delta(x)$(取 $|a|$ 以免 $a<0$) 同理，可得

$$\mathrm{III}(ax) = \frac{1}{|a|}\sum_{n}\delta\left(x-\frac{n}{a}\right) 。$$

对于同学们来说，这里可能显得有点难以理解，我们也可以按下面的方法理解。如果 $\mathrm{III}(x)$ 被拉伸，使得冲激的间距由 1 变为 X，那么 $\mathrm{III}(x/X)$ 将表示间距为 X，但强度不再是 1 而是 X 的冲激。间距为 X 的单位冲激的表达式为 $X^{-1}\mathrm{III}(x/X)$。

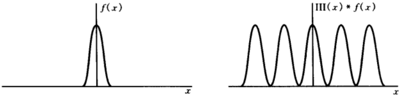


图 5.6 III(x) 的复制特性

偶冲激对 II(x) 和奇冲激对 $\mathrm{I_I}(x)$

图 5.7 画出了常用的冲激对符号，其定义为：

$$\mathrm{II}(x) = \frac{1}{2}\delta\left(x+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

$$\mathrm{I_I}(x) = \frac{1}{2}\delta\left(x+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\delta\left(x-\frac{1}{2}\right) 。$$

冲激对的重要性源于它们与正余弦函数的变换关系：

$$\mathrm{II}(x) \supset \cos\pi s \qquad \cos\pi x \supset \mathrm{II}(s)$$

$$\mathrm{I_I}(x) \supset \mathrm{i}\sin\pi s \qquad \sin\pi x \supset \mathrm{i}\,\mathrm{I_I}(s)。$$

当偶冲激对 $\mathrm{II}(x)$ 和函数 $f(x)$ 相卷积时，会表现出复制特性。如图 5.8 所示，有

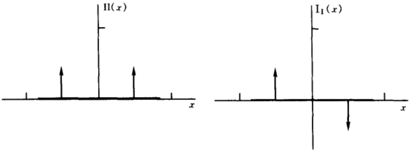


图 5.7 奇偶冲激对 II(x) 和 $\mathrm{I_I}(x)$

$$\mathrm{II}(x) * f(x) = \frac{1}{2}f(x+\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}f(x-\frac{1}{2})$$

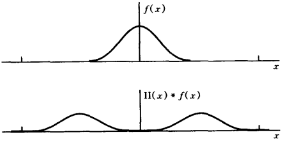


图 5.8 II(x) 和函数 $f(x)$ 相卷积

有时候，II(x) 由两个单位冲激组成会比较好，但是按照定义它被归一化为单位面积，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{II}(x)\mathrm{d}x = 1,$$

这样有很多优势。

如果 $f(x)$ 的有限差分定义为

$$\Delta f(x) = f(x+\frac{1}{2}) - f(x-\frac{1}{2}),$$

那么 $$\Delta f(x) = 2\mathrm{I_I}(x) * f(x),$$

于是，有限差分算子也可表示为 $$\Delta \equiv 2\mathrm{I_I} * 。$$

冲激符号的导数

冲激符号的一阶导数的定义用记号表示如下：

$$\delta'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x) 。$$

为了形象地理解这一概念，我们借助静电场中无穷小偶极子的概念，无穷小偶极子的思想大家

都熟悉，用它来理解物理概念既方便又容易。记号 $\delta'(x)$ 简化了数学形式，但是，困难仍然存在，因为我们不能令一个函数在原点左侧趋向于 $+\infty$，在原点右侧趋向于 $-\infty$，而当 $|x|>0$ 时值为 0。为涵盖这些条件我们希望将其表示成 $\delta'(0)=0$。

和介绍 $\delta(x)$ 的时候一样，我们借助于脉冲序列及其导数（图 5.9 给出了两个例子）来对涉及 $\delta'(x)$ 的表达式作严格的解释。这样，如下的表达式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(x)\mathrm{d}x=0,$$

可以看作是下式的简化形式，

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{-2\tau x}{\pi(x^2+\tau^2)^2}\right]\mathrm{d}x=0\text{ 。}$$

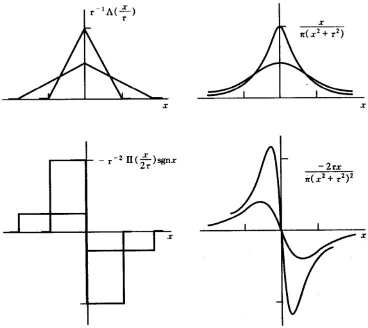


图 5.9　脉冲序列（上方）及其导数（下方），$\tau\to 0$ 时可用于解释 $\delta(x)$ 和 $\delta'(x)$

括号中的部分是前面讨论 $\delta(x)$ 的时候介绍过的某种形状的脉冲的导数。所采用的脉冲的确切形式并不重要（甚至可以用矩形函数），不过在后面的工作中应考虑到用可微脉冲形状可能带来某些优点。

导数筛选特性可由下式得出，

$$\delta' * f\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(x-x')f(x')\mathrm{d}x'=f'(x)\text{ 。}$$

其它性质如下：

$$\int_{-\infty}^{\infty}x\delta'(x)\mathrm{d}x=-1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\delta'(x)|\,dx = \infty$$

$$x^2\delta'(x) = 0$$

$$\delta'(-x) = -\delta'(x) \qquad x\delta'(x) = -\delta(x)$$

$$f(x)\delta'(x) = f(0)\delta'(x) = f'(0)\delta(x) \text{。}$$

下面的关系式适用于高阶导数，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta''(x)\,dx = 0$$

$$\delta''(x) * f(x) = f''(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\delta''(x)\,dx = 2$$

$$x^n\delta^{(n)}(x) = (-1)^n n!\,x^n\delta(x)$$

$$\delta^{(n)}(x) * f(x) = f^{(n)}(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x)f(x)\,dx = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

零函数

零函数主要指傅里叶变换为零，而并非其本身恒为零的函数。按照定义，如果

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \ (\text{其中}[a,b]\text{为任意区间}),$$

则 $f(x)$ 为零函数。也可以表示为

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx = 0 \text{。}$$

零函数是在讨论一个函数同其变换之间的一对一关系时提出的。这种对应关系是由 Lerch 定理定义的，该定理指出，如果两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 具有相同的变换形式，则 $f(x)-g(x)$ 是一个零函数。

零函数的一个例子是 $\delta^0(x)$（见图 5.10）。它是如下式定义的一个普通单值函数，

$$\delta^0(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0, \end{cases}$$

可见，它在 $x=0$ 处有一个间断点，这种间断点在某种程度上和 $H(x)$（定义 $H(0)=\frac{1}{2}$）的间断点相似。按照通常的积分法则，$\delta^0(x)$ 的积分当然为 0。然而，它恰当地描述了由一个电阻和一个电容组成的串联电路，当电容值逼近 0 时，从电池组得到的电流的情况。

现在，我们可以更简洁地描述 $H(x)$ 和图 4.14 所示的阶跃函数 $\dot{H}(x)$ 之间的关系，

$$H(x) = \dot{H}(x) + \frac{1}{2}\delta^0(x),$$

二者之间差一个零函数。

和 $\delta(x)$ 相同，符号 $\delta^{\frac{1}{2}}(x)$ 必须借助于脉冲序列来解释。当 $\tau \to 0$ 时，考虑序列

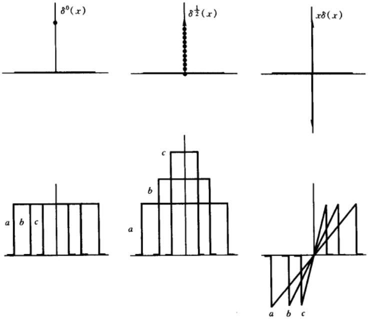


图 5.10 定义 $\delta^0(x)$,$\delta^{\frac{1}{2}}(x)$,和 $x\delta(x)$(上)的序列(下)

$$\tau^{-\frac{1}{2}}\Pi\left(\frac{x}{\tau}\right),$$

则我们可以理解下列表达式的含义:

$$\delta^{\frac{1}{2}}(x)=\begin{cases}0 & x\neq 0\\ \infty & x=0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{\frac{1}{2}}(x)\mathrm{d}x=0$$

以及

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\delta^{\frac{1}{2}}(x)]^2\mathrm{d}x=1\ 。$$

我们可以认为 $\delta^{\frac{1}{2}}(x)$ 是一个零符号。

练习 我们是否可以将 $\delta'(x)$ 视为一个零符号?

二维和更高维的一些函数

作为 $\delta(x)$ 的自然推广,我们得到二维和三维冲激符号 ${}^2\delta(x,y)$,${}^3\delta(x,y,z)$。例如,${}^2\delta(x,y)$ 描述的是当有一个单位强度的力集中作用于原点时,(x,y) 平面上压力的分布情况;${}^3\delta(x,y,z)$ 描述的是在原点(0,0,0)处有一个单位电量的电荷时空间的电荷密度情况。为得出 ${}^2\delta(x,y)$ 的性质,我们来考虑 $\tau\to 0$ 时,由单位体积函数如 $\tau^{-2}\Pi(x/\tau)\Pi(y/\tau)$ 或 $(4/\pi)\tau^{-2}\Pi[(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}/\tau]$ 形成的序列(如图 5.11)。于是,我们有

$$^{2}\delta(x,y)=\begin{cases}0 & x^2+y^2\neq 0\\ \infty & x^2+y^2=0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}{}^{2}\delta(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$$

$$^{2}\delta(ax,by)=\frac{1}{|ab|}{}^{2}\delta(x,y)$$

还有下面这个很有意思的关系式，

$$^{2}\delta(x,y)=\delta(x)\delta(y)\ 。$$

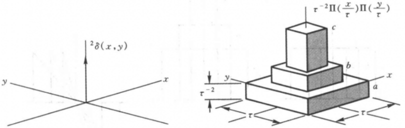


图 5.11　二维冲激符号$^{2}\delta(x,y)$及其定义序列(由函数 a,b,c 形成)

引入径向坐标 $r(r^2=x^2+y^2)$ 后，我们可以用 $\delta(r)$ 来表示$^{2}\delta(x,y)$：

$$^{2}\delta(x,y)=\frac{\delta(r)}{\pi|r|}\ 。$$

在三维情况下，

$$^{3}\delta(x,y,z)=\begin{cases}0 & x^2+y^2+z^2\neq 0\\ \infty & x^2+y^2+z^2=0\end{cases},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}{}^{3}\delta(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=1,$$

以及，

$$^{3}\delta(x,y,z)=\delta(x)\delta(y)\delta(z)={}^{2}\delta(x,y)\delta(z)。$$

在柱坐标系中，$r^2=x^2+y^2$，则

$$^{3}\delta(x,y,z)=\frac{\delta(r)\delta(z)}{\pi|r|},$$

如果令 $\rho^2=x^2+y^2+z^2$，

$$^{3}\delta(x,y,z)=\frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho^2}\ 。$$

我们用钉床符号$^{2}\mathrm{III}(x,y)$来描述二维阵列，如图 5.12 所示，定义如下：

$$^{2}\mathrm{III}(x,y)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}^{2}\delta(x-m,\ y-n)\ 。$$

图 5.13 给出了一种讨论其性质的方法，该性质表示为

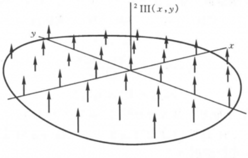


图 5.12 钉床符号$^2\mathrm{III}(x,y)$

$$^2\mathrm{III}(x,y)=\mathrm{III}(x)\mathrm{III}(y)\ 。$$

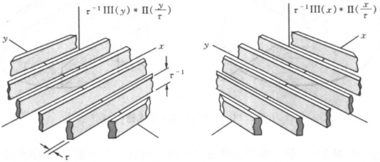


图 5.13 乘积适合用于讨论$^2\mathrm{III}(x)$的两个函数

它还有很多由$^2\delta(x,y)$和$\mathrm{III}(x)$的积分性质推广得到的性质，如

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)^2\mathrm{III}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_m\sum_n f(m,n)\ 。$$

它是双周期的，

$$^2\mathrm{III}(x+m,\ y+n)={}^2\mathrm{III}(x,y),\ m,n\ 为整数，$$

还有，

$$\frac{1}{|XY|}{}^2\mathrm{III}(\frac{x}{X},\ \frac{y}{Y}),$$

表示一个在x方向以X为周期，在y方向以Y为周期的二维单位冲激所形成的双周期阵列。

两个独立变量的离散间隔网表(二维采样数据)，和双重傅里叶级数的系数可由下面关系式得到，

$$f(x,y)^2\mathrm{III}(x,y)=\sum_m\sum_n f(m,n)^2\delta(x-m,\ y-n)。$$

与$^2\mathrm{III}(x,y)$的卷积描述了二维情况中的复制，如同由相同天线组成的二维阵列一样。和一维III的性质相同，在极限情况下$^2\mathrm{III}(x,y)$是其自身的二维傅里叶变换。

允许对这里引入的多维空间的记号作各种不言自明的推广，这样有益于化简。如下所示：

$$^{3}\mathrm{III}(x,y,z)=\mathrm{III}(x)\mathrm{III}(y)\mathrm{III}(z)$$

$$^{2}\prod(x,y)=\prod(x)\prod(y)$$

$$^{2}\mathrm{sinc}(x,y)=\frac{\sin\pi x\sin\pi y}{\pi^{2}xy}$$

$$^{2}\mathrm{II}(x,y)=\mathrm{II}(x)\mathrm{II}(y)\ 。$$

另外两个重要的二维分布无需引入新的记号，如图 5.14 所示，一行尖峰用 $\mathrm{III}(x)\delta(y)$ 足以表示，光栅可用 $\mathrm{III}(x)$ 表示。这两种分布构成了一个二维傅里叶变换对，适合用于讨论由衍射光栅或一行针孔引起的光的衍射现象。

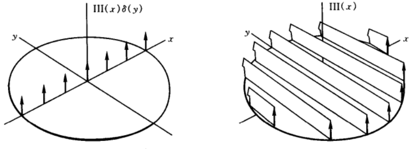


图 5.14　尖峰串(左)和光栅(右)

引入冲激的导数后，这些二维和三维的例子可以有进一步的解释，其中有很多可解释为大家熟悉的电荷的线分布或面分布。例如，$\delta'(x)$ 表示(x,y) 平面上电偶极矩沿 y 轴的线分布。在三维空间中，$\delta'(x)$ 则表示电偶极矩在(y,z) 平面上的面分布。在 x 方向上具有单位矩的位于原点$(0,0,0)$ 处的简单偶极子可表示为 $-\delta'(x)\delta(y)\delta(z)$。四极矩的分布可类似地用 $\delta''(x)$ 表示。在点$(0,0,0)$ 处由关于 x 的负导数构成的一个简单的单位四极表示为$\delta''(x)\delta(y)\delta(z)$。关于 y 的负导数构成了另外一种四极。例如，$\delta'(x)\delta'(y)$ 表示(x,y) 平面上辐射图样为四瓣或四叶交叉形状的电磁辐射体。所有这些记号的表达式都可以带入麦克斯韦方程、波动方程、泊松方程和其它基本微分方程中，不会有什么不妥。

广义函数的概念

正如我们已经看到的，使用冲激符号 $\delta(x)$ 及其组合如 $\mathrm{III}(x)$ 和 $\mathrm{II}(x)$，会带来很多方便。"符号"一词用来提醒大家它们并非函数，尽管如此，它们还是很有用的，其用处之一便是为有简单间断点的函数提供导数。这种情况下，我们通常认为导数不存在，但是，冲激符号允许简单间断点的存在。

间断点和冲激行为，在物理上虽然不能实现，我们还是有必要讨论它们，其重要意义在前面介绍纯交流和纯直流电流(它们在物理上都不能实现，但是它们是必不可少的)的时候已经解释过。

纯交流指的是一种无法产生的永恒的谐波振荡。在一定精度下，等待足够长的时间后再进行观察，可以认为在某段时间内为简谐波，而在这段时间以外为零的振荡，引起的响应与开关

闭合时刻无关。既然响应与开关闭合时间和方式等细节无关，我们可以认为它们发生在无限远的过去，这样，便可把观察到的响应看作对纯交流电的响应。

同样，冲激也是物理上无法产生的。不过，我们可以使足够短暂的而强度有限的不同脉冲引起的响应超出给定仪器（其时间分辨率有限）的分辨率，这样便可逼近冲激。

由于测量仪器的测量精度在时间和频率分辨率方面都是有限的，我们把前面一段提到的物理局限性称为"有限分辨率"。上述说明过程中提到的有限分辨率的特点是对冲激符号的记号进行数学解释的关键：含有冲激符号的积分被理解为用单位面积矩形脉冲 $\tau^{-1}\Pi(x/\tau)$ 代替冲激以后的积分序列的极限。即使矩形脉冲的幅度无限增长（$\tau\to 0$ 时），积分序列的极限还是存在的。

下式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

的含义是，

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\tau^{-1}\Pi(x/\tau)f(x)\mathrm{d}x = f(0)\text{ 。}$$

对该表达式的这种解释中，积分存在，并且 $\tau\to 0$ 时积分的极限也存在。相应的实际情形是，用给定分辨率的仪器来观察一系列越来越窄的激励引起的响应，随着激励越来越窄，无论给定仪器的分辨率有多高，最终将不能区分它们的响应。

关于冲激理论的一个令人满意的数学表达沿着这些路线不断演进，并且在 Lighthill(1958) 和 Firedman(1956) 的著作中有详细说明。Lighthill 认为是 Temple 简化了其数学表达，而 Temple 把将序列引入表达中归功于波兰数学家 Mikusinski(1948)。Schwartz 的两部关于分布理论的著作（1950，1951）使为分析阐述"奇异"或"理想"函数和记号表示方法而提出的很多局部的、特殊的处理技巧成为一个理论体系（Temple，1953）。

1948 年以前，序列思想在物理界就很流行了，最早可追溯到 1882 年 G. S. Kirchhoff（van der Pol，1937）。

引入矩形脉冲序列并未否认其它形状的序列同样有效。实际上，这种方法的实质正在于脉冲的具体形状无关紧要。矩形脉冲的优点是它非常适于进行积分运算。然而，矩形脉冲本身不适用于讨论冲激的导数，因此，我们需要自身导数不为冲激的更为平滑的形式（或形状）。在一般的理论分析中，我们需要讨论任意阶导数，这时一个各阶导数都存在的脉冲序列会更有优势。Schwartz 和 Temple 介绍了具有任意阶导数且在有限区间以外取值为 0 的脉冲形状。本章已提到过的一个例子是：

$$\begin{cases}\tau^{-1}\mathrm{e}^{-\tau^2/(\tau^2-x^2)} & |x|<\tau\\ 0 & |x|\geqslant\tau\end{cases}\text{。}$$

实际上，我们并不直接将这样一个函数插入积分中；当必须进行积分时，选择一个有足够阶导数的脉冲形状就可以了，通常选用矩形脉冲就够了。

极好性态函数　"广义函数"这一术语可以如下定义：首先，我们考虑 S 类函数。S 类函数是指在所有点处的各阶导数都存在，且所有阶导数当 $|x|\to\infty$ 时都至少以与 $|x|^{-N}$（N 可取

任意大）相同的速度衰减。我们把 S 类函数的成员称为极好性态函数。我们发现极好性态函数的导数和傅里叶变换同样也是极好性态函数。为证明这一叙述的第二部分，我们令

$$\overline{F}(s)=\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi sx}\,\mathrm{d}x\text{ 。}$$

满足极好性态函数的条件足以保证傅里叶积分存在，进行 p 次求导运算，可得

$$\overline{F}^{(p)}(s)=\int_{-\infty}^{\infty}[(-2\mathrm{i}\pi x)^{p}F(x)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi sx}\,\mathrm{d}x\text{ ，}$$

再进行 N 次分部积分，可得

$$\begin{aligned}|\overline{F}^{(p)}(s)|&=\left|\frac{1}{(\mathrm{i}2\pi s)^{N}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^{N}}{\mathrm{d}x^{N}}[(-\mathrm{i}2\pi x)^{p}F(x)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi sx}\,\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\frac{(2\pi)^{p-N}}{|s|^{N}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\mathrm{d}^{N}}{\mathrm{d}x^{N}}[x^{p}F(x)]\right|\mathrm{d}x\\&=O(|s|^{-N})\text{ ；}\end{aligned}$$

故 $\overline{F}(s)\in S$。

正则序列　从极好性态函数形成的序列中分离出序列 $p_\tau(x)$，它满足的条件是：它与任何其它的极好性态函数 $F(x)$ 先相乘后积分再求极限时极限存在。如果

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}p_\tau(x)F(x)\,\mathrm{d}x$$

存在，则称 $p_\tau(x)$ 是极好性态函数的正则序列。

一个非正则的极好性态函数序列（见图 5.15）如下：

$$\tau^{-1}\mathrm{e}^{-x^{2}}\text{ 。}$$

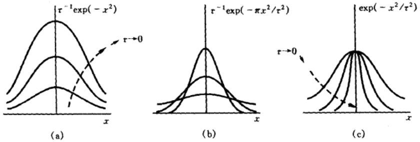


图 5.15　极好性态函数序列
(a) 非正则；(b) 正则；(c) 练习

下面是正则序列的一个例子，

$$\tau^{-1}\mathrm{e}^{-\pi x^{2}/\tau^{2}}\text{ 。}$$

本例中，序列的每个成员都具有单位面积，不过这并不是实质性的地方，比如序列 $(1+\tau^{-1})\mathrm{e}^{-x^{2}/\tau^{2}}$ 也是正则的。

广义函数　广义函数 $p(x)$ 将由极好性态函数正则序列 $p_\tau(x)$ 来定义。实际上，广义函数

也是正则序列，因为多个正则序列可以具有相同的极限，所以，一个广义函数最终定义为与给定序列等效的一类极好性态函数正则序列。故符号 $p(x)$ 是与普通函数区别很大的一种实体，它代表了一类函数，而其本身并非函数。因此，当它出现在普通函数常出现的场合时，必须声明其含义，比如，我们认为：

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)F(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $p(x)$ 为一个广义函数，$F(x)$ 为一个任意的极好性态函数，它的含义是：

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} p_\tau(x)F(x)\mathrm{d}x \ ,$$

其中 $p_\tau(x)$ 是任意的定义 $p(x)$ 的极好性态函数正则序列。

必须注意两点。首先，在当前意义下，序列 $\tau^{-1}\Pi(x/\tau)$ 和 $\tau^{-1}\Lambda(x/\tau)$ 不能定义广义函数，因为这些序列的成员并非在任意点上任意阶可导。其次，检验函数 $F(x)$ 必须是极好性态函数。

这些严格的限制条件，使我们在进行逻辑推理时，必须抛开常用的简单序列和简单函数。但是，我们不要忘了当不讨论可微性时，仍然可借助矩形脉冲；当仅需要一阶导数和二阶导数的时候，Π^{*2} 和 Π^{*3} 就足够了。用矩形脉冲就可以满足逼近行为的要求。另外，严格来讲，满足可微性的序列 $\tau^{-1}\mathrm{sinc}(x/\tau)$ 由于衰减速度太慢，不能归为正则序列；但是，当与一个有限区间外为 0 的函数相乘时，我们还可以用它。

作为极好性态函数的一个简单而特殊的例子，高斯型脉冲的优点，Lighthill(1958) 已经进行过系统研究，而且他的推导思路也被沿用下来。

序列 $\exp(-\tau^2x^2)$ 定义了一个广义函数 $I(x)$，对于

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\tau^2x^2}F(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\mathrm{d}x$$

上式积分存在，于是，我们可以得到一个关于 $I(x)$ 的表达式，

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(x)F(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $F(x)$ 为任意的极好性态函数。

序列 $\tau^{-1}\exp(-\pi x^2/\tau^2)$ 定义了一个广义函数，

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \tau^{-1}\mathrm{e}^{-\pi x^2/\tau^2}F(x)\mathrm{d}x$$

存在，且等于 $F(0)$，其中 $F(x)$ 为任意的极好性态函数。证明过程如下：

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\tau^{-1}\mathrm{e}^{-\pi x^2/\tau^2}F(x)\mathrm{d}x - F(0)\right| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty}\tau^{-1}\mathrm{e}^{-\pi x^2/\tau^2}[F(x)-F(0)]\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \max|F'(x)|\int_{-\infty}^{\infty}\tau^{-1}\mathrm{e}^{-\pi x^2/\tau^2}\ |x|\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{\tau}{\pi}\max|F'(x)|,\end{aligned}$$

当 $\tau\to 0$ 时，其极限为 0。由这一序列及其等效序列定义的广义函数为 $\delta(x)$，我们可以直接写为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)F(x)\mathrm{d}x = F(0),$$

其中 $F(x)$ 为任意的极好性态函数。

广义函数的代数性质 我们已经介绍了处理表示广义函数的符号的一条法则，即解释下式含义，

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)F(x)\mathrm{d}x 。$$

当广义函数出现在其它代数表达式中时，我们需要更多的法则来进行处理。

令 $p(x)$，$q(x)$ 为两个广义函数，它们分别由正则序列 $p_\tau(x)$ 和 $q_\tau(x)$ 定义。现在考虑序列 $q_\tau(x)+p_\tau(x)$。首先，我们注意到它是一个由极好性态函数形成的序列。下面我们看它是不是正则序列，即判断

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}[q_\tau(x)+p_\tau(x)]F(x)\mathrm{d}x$$

是否存在，其中 $F(x)\in S$。该积分可分为两项，由于 $p_\tau(x)$ 和 $q_\tau(x)$ 都是由正则序列定义的，所以每一项的极限都存在；这两个极限之和为 $q_\tau(x)+p_\tau(x)$ 的极限，则 $q_\tau(x)+p_\tau(x)$ 是正则序列且极限存在，故它可定义一个广义函数。我们如下表示该广义函数，

$$p(x)+q(x);$$

接下来只需要证明，无论选择什么样的定义序列 $p_\tau(x)$ 和 $q_\tau(x)$ 都可以得到相同的结论：由于两个极限的和与 $p_\tau(x)$ 和 $q_\tau(x)$ 的选择无关，故各定义序列 $q_\tau(x)+p_\tau(x)$ 都可以得出相同结论。

至此，我们得出了广义函数的和的含义。

令 $p(x)$ 为序列 $p_\tau(x)$ 定义的广义函数，由分部积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} p'_\tau(x)F(x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} p_\tau(x)F'(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $F(x)$ 为任意的极好性态函数，$F'(x)$ 也是一个极好性态函数。由于 $F'(x)$ 为极好性态函数，且 $p_\tau(x)$ 由正则序列定义，可得

$$-\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} p_\tau(x)F'(x)\mathrm{d}x$$

存在，因此

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} p'_\tau(x)F(x)\mathrm{d}x$$

存在。所以，$p'_\tau(x)$ 是一个极好性态函数正则序列，并且所有的这类序列都等效。我们用 $p'(x)$ 来标记这样定义的广义函数。这恰好给出了广义函数的导数的概念。这里有一个例子，可以认为是关于广义函数 $p(x)$ 的导数 $p'(x)$ 的表达式，

$$\int_{-\infty}^{\infty} p'(x)F(x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x)F'(x)\mathrm{d}x 。$$

类似地，

$$\int_{-\infty}^{\infty} p^{(n)}(x)F(x)\mathrm{d}x = (-1)^n\int_{-\infty}^{\infty} p(x)F^{(n)}(x)\mathrm{d}x \text{。}$$

由于按照定义无论 n 取多大，$F^{(n)}(x)$ 均存在，故我们得出了广义函数的 n 阶导数的含义。

普通函数导数 广义函数的任意阶导数均存在，如果一个普通函数也可以认为是广义函数，那么，在此基础上我们便可得出这样的公式，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[H(x)] = \delta(x) \text{。}$$

如果 $f(x)$ 是一个普通函数，我们构造如下一个序列 $f_\tau(x)$，

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f_\tau(x)F(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)F(x)\mathrm{d}x \text{，}$$

其中 $F(x)$ 是任意的极好性态函数，那么，该序列定义了一个可由同样的记号 $f(x)$ 表示的广义函数。于是，记号 $f(x)$ 有两种含义。我们要特别注意那些对于某个 N 值，当 $|x|\to\infty$ 时性态与 $|x|^{-N}$ 相似的 $f(x)$。

下式给出了一个合适的 $f_\tau(x)$ 序列，

$$[\tau^{-1}\mathrm{e}^{-\pi x^2/\tau^2}] * [f(x)\mathrm{e}^{-\tau^2 x^2}]\text{。}$$

按照广义函数的标记符号的扩展，我们可以把单位阶跃函数 $H(x)$ 归为广义函数，并且对其导数赋予一定的含义。如下所示，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} H'(x)F(x)\mathrm{d}x &= -\int_{-\infty}^{\infty} H(x)F'(x)\mathrm{d}x \\ &= -\int_{0}^{\infty} F'(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\infty}^{0} F'(x)\mathrm{d}x \\ &= F(0)\text{，}\end{aligned}$$

而

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)F(x)\mathrm{d}x = F(0)\text{，}$$

故

$$H'(x) = \delta(x)\text{。}$$

我们把公式 $H'(x) = \delta(x)$ 解释为：广义函数 $\delta(x)$ 是广义函数 $H(x)$ 的导数，这里我们用普通函数 $H(x)$ 的符号标记相应的广义函数。

参考书目

Friedman, B.: "Principles and Techniques of Applied Mathematics," John Wiley & Sons, New York, 1956.

Lighthill, M. J.: "An Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions," Cambridge University Press, Cambridge, England, 1958.
Mikusinski, J. G.: "Sur la Méthode de Généralisation de Laurent Schwartz et sur la Convergence Faible," *Fundamenta Mathematics*, vol. 35, p. 235, 1948.
Schvartz, L.: "Théorie des Distributions," vols. 1 and 2, Herman & Cie, Paris, 1950 and 1951.
Temple, G.: "Theories and Applications of Generalised Functions," *J. Lond. Math. Soc.*, vol. 29, p. 181. 1953.
Van der Pol, B.: "Discontinuous Phenomena in Radio Communication", *J. Inst. Elec. Engrs.*, vol. 81, p. 381, 1937.

习题

1. 求下式的偶部

$$\delta(x+3)+\delta(x+2)-\delta(x+1)+\frac{1}{2}\delta(x)+\delta(x-1)-\delta(x-2)-\delta(x-3)。$$

2. 为阐明 $\delta(xy)$ 的含义,某学生的解释是:"当 $u=0$ 时,$\delta(u)$ 为无穷;当 $x=0$ 或 $y=0$ 时,$xy=0$,故 $\delta(xy)$ 在 x 轴和 y 轴上为无穷。所以,$\delta(xy)=\delta(x)+\delta(y)$。"指出该论述当中的谬误之处,并证明

$$\delta(xy)=\frac{\delta(x)+\delta(y)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}。$$

3. 证明

$$\Pi(x)=\delta(2x^2-\frac{1}{2}),$$

并且有 $$\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{2}\mid a\mid^{-1}\{\delta(x-a)+\delta(x+a)\}。$$

4. 证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\,\mathrm{d}s=\delta(x)$$

和

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi xs}\,\mathrm{d}s=1\ 。$$

5. 证明

$$\delta(ax+b)=\frac{1}{\mid a\mid}\delta(x+\frac{b}{a}),\ a\neq 0\ 。$$

6. 如果 $f(x)$ 有根为 x_n,证明

$$\delta[f(x)]=\sum_n\frac{\delta(x-x_n)}{\mid f'(x_n)\mid}$$

其中 $f'(x_n)$ 存在且不等于零。

提示:考虑 $\delta(x^3)$ 和 $\delta(\mathrm{sgn}x)$。

7. 证明

$$\pi\delta(\sin\pi x) = \text{III}(x)$$

并且

$$\delta(\sin x) = \pi^{-1}\text{III}(\frac{x}{\pi})\text{ 。}$$

8. 证明

$$\text{III}(x) + \text{III}(x - \frac{1}{2}) = 2\text{III}(2x) = \text{III}(x) * 4\text{II}(2x - \frac{1}{2})\text{。}$$

9. 证明

$$\text{III}(x)\prod(\frac{x}{8}) = \text{III}(x)\prod(\frac{x}{7}) + \frac{\text{II}(x/8)}{8}$$

并证明

$$\text{III}(x)(\frac{x}{6\frac{1}{2}}) = \text{III}(x)\prod(\frac{x}{7\frac{1}{2}})\text{。}$$

10. 下面的等式成立吗？

$$x\delta(x-y) = y\delta(x-y)\text{。}$$

11. 证明多边形 $\Lambda(x) * \sum_{-\infty}^{\infty} a_n\delta(x-n)$ 过点(n,a_n)。

12. 证明

$$\delta'(-x) = -\delta'(x)$$
$$x\delta'(x) = -\delta(x)\text{。}$$

并证明

$$f(x)\delta'(x) = f(0)\delta'(x) - f'(0)\delta(x),$$

提示：对 $f(x)\delta(x)$ 求导。

13. 为证明 $\delta'(x) = -\delta(x)/x$，某同学的推导过程如下："定义 $\delta(x)$ 的一个合适的序列是 $\tau/\pi(x^2+\tau^2)$（$\tau\to 0$ 时形成序列），故定义 $\delta'(x)$ 的一个合适的序列是 $\tau/\pi(x^2+\tau^2)$ 的导数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\tau}{\pi(x^2+\tau^2)} = \frac{-2\tau x}{\pi(x^2+\tau^2)^2} = \frac{-2x}{x^2+\tau^2}\frac{\tau}{\pi(x^2+\tau^2)}\text{。}$$

上式的后半部分是定义 $\delta(x)$ 的序列，而前半部分在 $\tau\to 0$ 时的极限为 $-2/x$，所以，$\delta'(x) = -2\delta(x)/x$ 。"指出该论述中的谬误之处。

14. 证明

$$x^n\delta^{(n)}(x) = (-1)^n n!\delta(x)$$

并由此推出 $x^2\delta''(x) = 2\delta(x)$ 和 $x^3\delta''(x) = 0$。

15. 此处，$[x]$ 定义为小于 x 的最大整数和小于或等于 x 的最大整数的均值。证明

$$[x]' = \text{III}(x)$$

并证明 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{[x]H(x)\}=\mathrm{III}(x)H(x)-\frac{1}{2}\delta(x)。$$

（$[x]$ 通常定义为小于 x 的最大整数，不过该定义不完全适用于本题目；两种定义的差异在于 x 为整数时取值为 $\frac{1}{2}$，而 x 为其它值时取值为 0 的零函数。）

16. 锯齿函数 $Sa(x)$ 由 $Sa(x)=[x]-x+\frac{1}{2}$ 定义。证明

$$Sa'(x)=\mathrm{III}(x)-1$$

并且 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[Sa(x)H(x)]=[\mathrm{III}(x)-1]H(x)。$$

17. 证明 $\mathrm{sgn}^2x=1-\delta^0(x)$。

18. Kronecker δ 有如下定义，

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

证明它可表示为关于 $i-j$ 的零函数，即

$$\delta_{ij}=\delta^0(i-j)。$$

19. 我们希望讨论非对称序列 $\tau^{-1}\{\Lambda(x/\tau)+\frac{1}{2}\Lambda[(x-\tau)/\tau]\}$ 用来表示冲激符号是否合适。由筛选性质得到如下结论

$$\delta_a*f=\mu\delta_+*f+\nu\delta_-*f,$$

其中，符号 δ_a 基于上面的非对称序列，δ_+ 基于序列 $\tau^{-1}\Pi[(x-\frac{1}{2}\tau)/\tau]$，而 δ_- 基于序列 $\tau^{-1}\Pi[(x+\frac{1}{2}\tau)/\tau]$（$\tau$ 为正值）。

20. 证明下面的关系式

$$^2\delta(x,y)=\delta(r)/\pi\mid r\mid 。$$

21. 作图表示 $\mathrm{III}[(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}]$（各坐标轴应取相同大小的标度）。你如何解释从图上看到的等高度等间距的同心环状结构？

22. 函数 $f_r(x)$ 是由 $f(x)$ 翻转得到的，即 $f_r(x)=f(-x)$。证明由 $f(x)$ 得到 $f_r(x)$ 的操作可借助于冲激符号表示为

$$f\star\delta$$

因此，

$$(f\star\delta)\star\delta=f 。$$

23. 在什么条件下，下式成立：

$$(f\star\delta)\star\delta=f\star(\delta\star\delta)?$$

24. 60 页给出的所有 $f(x,\tau)$ 序列都具有这样的性质：$\tau\to0$ 时，$f(0,\tau)$ 会无限增长。证明序列 $\frac{1}{2}\tau^{-1}\Lambda[(x/\tau)-1]+\frac{1}{2}\tau^{-1}\Lambda[(x/\tau)+1]$ 是它们的等效序列，但是当 $\tau\to0$ 时，对于所有的 x

其极限都存在且为 0。证明 $\tau\to 0$ 时，$f(0,\tau)$ 非但不趋向 ∞，反而可能趋向 $-\infty$。

25. 证明

$$f(x)\delta''(x)=f(0)\delta''(x)-2f'(0)\delta'(x)+f''(0)\delta(x),$$

并证明，更一般地

$$f(x)\delta^{(n)}(x)=f(0)\delta^{(n)}(x)-\binom{n}{1}f'(0)\delta^{(n-1)}(x)+\cdots$$

$$-\binom{n}{n-1}f^{(n-1)}(0)\delta'(x)+f^{(n)}(0)\delta(x)。$$

26. 冲激和序列　δ 函数具有"筛选特性"

$$L=\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)h(x,\tau)\mathrm{d}x=f(0)。$$

若函数 $h(x,\tau)$ 可看作是当 τ 依次取逐渐减小的常数时关于 x 的函数所形成的序列，则在此情形下我们得出了上述筛选特性。

(a) 请给出一个函数 $h(x,\tau)$，使得筛选特性不成立。

(b) 为使筛选特性成立，$h(x,\tau)$ 应满足什么条件？

(c) ① 请写出满足(b) 条件的一个具体的 $h(x,\tau)$。

② 用你给出的 $h(x,\tau)$ 作用于

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x\geqslant 0\\ 1 & x<0\end{cases}。$$

对于这个例子，筛选特性成立吗？

(d) 某特殊的 $h(x,\tau)$ 具有这样的性质：当 x 给定时，$\lim_{\tau\to 0}h(x,\tau)=0$，对于所有的 x 都是如此。这样的函数 $h(x,\tau)$ 满足筛选特性的要求吗？

(e) 请给出一个 $h(x,\tau)$，使 $L=f(2)$。

(f) 请给出一个 $h(x,\tau)$，使 $L=f'(0)$。

(g) 请给出一个 $h(x,\tau)$，使 $L=\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$。

(h) 请给出一个 $h(x,\tau)$，使 $L=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)$ （n 为整数）。

27. 极限　输入电压 $V_1(t,\tau)$ 通过一个冲激响应为 $I(t)$ 的线性时不变系统以后，得到响应 $V_2(t,\tau)$，其中

$$V_1(t,\tau)=[1+\tau^{-2}(1-2\tau)\mid x\mid]\Pi\left(\frac{x}{2\tau}\right)。$$

判断下列各式是否成立：

(a) $\lim_{\tau\to 0}V_2(t,\tau)=I(t)$；

(b) $\lim_{\tau\to 0}V_1(t,\tau)=0$；

(c) $\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}V_1(t,\tau)\mathrm{d}t=0$；

(d) $\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{\tau\to 0}V_1(t,\tau)\mathrm{d}t = 0$ 。

28. 定义 $\delta(x)$ 的序列　构造一个序列 $f(x,\tau)$ 用于定义 $\delta(x)$，它满足下列条件：由极好性态函数形成并且对于所有的 x 都有 $\lim_{\tau\to 0}f(x,\tau)=0$。

29. 广义函数　考虑 $\tau\to 0$ 时，函数 $\tau^{-1}\cos(\pi x^2/4\tau^2)$ 生成的序列。对于 x 的所有的值，函数值无极限地不停地摆动。这样的序列在 $x=0$ 处能展现出冲激的筛选特性吗，即下式成立吗？

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\tau^{-1}\cos\left(\frac{\pi x^2}{4\tau^2}\right)F(x)\mathrm{d}x = F(0)$$

30. 非对称冲激　利用零函数的导数(68 页) 证明习题 5.19 引入的 $\delta_+(x)$ 和 $\delta(x)$ 不同，

$$\delta_+(x)=\delta(x)-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta^0(x) \text{ 。}$$

31. 电压冲激的能量　电压 $V(t)=A\delta(t)$ 作用于电阻 R。

(a) 通过电阻的电荷有多少？

(b) 电阻上消耗了多少能量？

32. δ 符号　电压 $V(t)$ 在电阻 R 上作用一段有限的时间，在该段时间内有 2 焦耳能量通过电阻。如果令电压的强度更强，持续时间越来越短，直到短得不能再短，请问用 δ 记号如何表示该电压？

33. δ 符号的乘积　一维情况下，冲激的乘积没有定义，但是，在二维情况下，乘积很自然地产生了并且很容易解释。考虑 $\delta(x)\delta(y)$，每个因式都认为是关于两个参变量的函数且描述的是 (x,y) 平面上单位高度的竖直叶片。(单位高度的意思是单位线密度或者每单位弧长的单位双重积分。) 按照下面的步骤计算 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\delta(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

(1) 依据 60 页给出的法则，用 $\tau^{-1}\Pi(x/\tau)$ 代替 $\delta(x)$，用 $\tau^{-1}\Pi(y/\tau)$ 代替 $\delta(y)$；

(2) 计算积分；

(3) 求 $\tau\to 0$ 时的极限。

证明当两叶片在角度为 θ 处相交时，上面的双重积分按系数 $1/\sin\theta$ 增加。

34. 环形冲激的自相关　总强度为 $2\pi a$ 的环形脉冲，记为 $\delta(r-a)$，在光学中用于处理环形缝隙问题，当然也可以用于其它一些领域。证明

$$\delta(r-a)\star\star\delta(r-a)=\left(\frac{r}{2a}\right)^{-1}\left[1-\left(\frac{r}{2a}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\Pi\left(\frac{r}{4a}\right)\text{。}$$

画出这个 r 的函数并解释它的基本特征。例如，为什么自相关函数在 $r=0$ 与 $r=a$ 处变成无穷大？为什么这些奇异点不相等？为什么在 $r/2a=2^{-\frac{1}{2}}$ 处的值是 2？研究 $\Pi(r/21)-\Pi(r/19)$ 的自相关函数，它在 $r=0$ 与 $r=20$ 处的值是多少？最小值是多少？此时 r 取多少？(本题中 $\star\star$ 代表自相关运算)

35. δ 符号　作为 δ 符号的练习，计算下面的积分。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\sin x)\Pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x,\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\cos x)\Pi\left(\frac{x}{4}\right)\mathrm{d}x,\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\sin 2x)\Pi\left(\frac{x}{4}\right)\mathrm{d}x \text{ 。}$$

36. 冲激的积分 如果$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x$等于 1，那么你对$\int_{0}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$有异议吗？

37. 两个变量 用解释包含 δ 函数的表达式的方法解释 $\delta(x,y)$ 的含义。

38. 用计算机检验分析 有人说 $\mathrm{III}(x)\mathrm{sgn}x$ 的傅里叶变换是 $-\mathrm{i}\cot\pi s$，最里边的脉冲对 $-\delta(x+1)+\delta(x-1)$ 的傅里叶变换是 $-2\mathrm{i}\sin 2\pi s$，那么逐对的变换可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}-2\mathrm{i}\sin 2\pi ks=-\mathrm{i}\cot\pi s。$$

为了检验一个符号错误，差一个因子 2 的错误，或者更严重的错误，对 s 的某一个值计算等式的两边，例如 $\sin 1^{\circ}+\sin 2^{\circ}+\sin 3^{\circ}+\cdots$ 加起来总和等于$\frac{1}{2}\cot\frac{1^{\circ}}{2}$吗？作出 N 项的和对 N 的图形，并讨论你的发现。

第 6 章

基本定理

在研究傅里叶变换时，少数几个定理起了基础性的作用。我们熟悉其中大多数定理的一种或另一种形式，但在这里，只是把这些定理作为傅里叶变换的简单数学性质列出。它们中大部分的推导都十分简单，而且通过引入矩形序列或其他合适的脉冲序列，很容易验证它们也适用于冲激函数。为便于说明，在第 5 章中提到的基于广义函数的代数证明在本章最后列出。

本章的重点在于说明定理的含义并熟悉它们。因此，我们首先列出常用的特殊变换对以便于用它们来解释遇到的每一个定理的含义。

一些用于说明的变换

下面列出 6 个供参考的变换对，它们是众所周知的，在第 7 章将会对这些积分进行计算，这里我们暂且认为下列积分是可以证明的。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-i2\pi xs} dx = e^{-\pi s^2} \quad 和 \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi s^2} e^{i2\pi sx} ds = e^{-\pi x^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}\, x e^{-i2\pi xs} dx = \Pi(s) \quad 和 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(s) e^{i2\pi sx} ds = \mathrm{sinc}\, x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2 x e^{-i2\pi xs} dx = \Lambda(s) \quad 和 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(s) e^{i2\pi sx} ds = \mathrm{sinc}^2 x$$

可见，高斯函数的变换还是同样的高斯函数，sinc 函数的变换是单位矩形函数，sinc^2 的变换是具有单位高度和单位面积的三角函数。

这些公式的说明见图 6.1 中的前三个变换对。注意图中第二行，它说明 $\Pi(s)$ 是 $\mathrm{sinc}\,x$ 的变换，在这里我们还可以补充一个图，即将第二行中左图与右图交换一下，也就是说 $\mathrm{sinc}\,s$ 是 $\Pi(x)$ 的变换。这是傅里叶变换互易性的结果，这个附加的图看起来会有些多余。然而，表达式

$$\Pi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}\, x e^{-i2\pi xs} dx$$

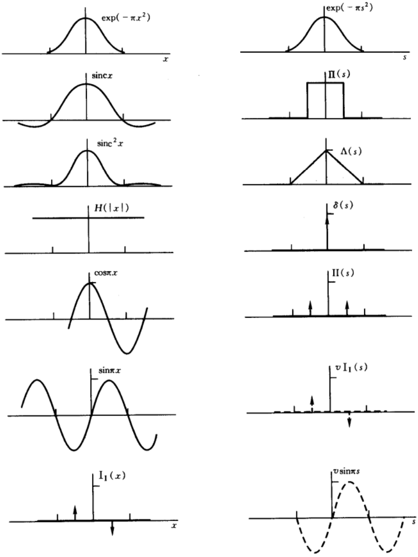


图 6.1　一些供参考的傅里叶变换对

和

$$\mathrm{sinc}\,s=\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\mathrm{d}x$$

的性质有很大差别。第一个式子说明当常数量 s 的绝对值小于 1/2，比如无论是 0.3 还是 0.35 时，某些常规函数乘积的积分值恒等于 1。但是，当 $|s|$ 的值大于 1/2 时，情况发生突变，积分结果变为 0，而且会持续下去，无论 s 的具体值是多少，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi x}{\pi x}e^{-i2\pi xs}dx=\begin{cases}1 & |s|<\frac{1}{2}\\ 0 & |s|>\frac{1}{2}\end{cases}$$

这一相当奇特的现象对许多情形是具有代表性的，这里，傅里叶积分把左边常规的、连续的、可导的函数与右边难以对付的、需要逐段定义的突变函数联系了起来。第二个式子可以重写为：

$$\frac{\sin\pi s}{\pi s}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}e^{-i2\pi xs}dx$$

这里，一个指数函数的基本定积分等于一个带有参数 s 的普通函数。这样变换与反变换表达了不同的内容。稍后就会看到，可以将两个单独的、截然不同的物理含意与每一变换对联系起来。

用来阐明基本定理的三个进一步的变换是前面讨论过的变换对的极限情况。使用高斯函数的结果，做一简单的变量代换，我们有[①]

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi(ax)^2}e^{-i2\pi sx}dx=|a|^{-1}e^{-\pi(s/a)^2}$$

当 a 趋近于 0 时，式子右边代表一个 $\delta(s)$ 的定义序列。式子左边在极限情况下是 1 的傅里叶变换。结论是：

1 是 $\delta(s)$ 在极限情况下的傅里叶变换。

剩下的两个例子来自于可以证明的关系式

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\pi x}e^{-(ax)^2}e^{-i2\pi sx}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\pi^2[(s-\frac{1}{2})/a]^2}$$

据此

$e^{i\pi x}$ 是 $\delta(s-\frac{1}{2})$ 在极限情况下的傅里叶变换；

或者，把式子左边分成实部和虚部，式子右边分为奇部和偶部，$\cos\pi x$ 是在极限情况下

$$\frac{1}{2}\delta(s+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\delta(s-\frac{1}{2})=\mathrm{II}(s)$$

的傅里叶变换。$i\sin\pi x$ 是在极限情况下

$$-\frac{1}{2}\delta(s+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\delta(s-\frac{1}{2})=-\mathrm{I_I}(s)$$

的 $-i$ 傅里叶变换。把以上例子总结如下：

$$e^{-\pi x^2}\supset e^{-\pi s^2}$$

$$\mathrm{sinc}\,x\supset\Pi(s)$$

$$\mathrm{sinc}^2x\supset\Lambda(s)$$

$$1\supset\delta(s)$$

$$\cos(\pi x)\supset\mathrm{II}(s)\equiv\frac{1}{2}\delta(s+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\delta(s-\frac{1}{2})$$

① 本公式中使用 a 的绝对值是为了抵消当 a 为负值时由交换积分限引起的符号反转。

$$\sin(\pi x) \supset \mathrm{i}\mathrm{I_I}(s) \equiv \frac{1}{2}\mathrm{i}\delta(s+\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\mathrm{i}\delta(s-\frac{1}{2})$$

$$\mathrm{I_I}(x) \supset \mathrm{i}\sin\pi s$$

所有以上为说明起见而选的傅里叶变换对都有物理含义，稍后将作详细的解释。在选出的参考变换对中呈现出许多特性，包括不连续性、冲激特性、有限范围特性、非负性和奇异性。惟一展示复数特性或非对称特性的例子是：

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x} \supset \delta(s-\frac{1}{2})$$

和

$$\delta(x-\frac{1}{2}) \supset \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi s}。$$

相似性定理

如果 $f(x)$ 的傅里叶变换是 $F(s)$，则 $f(ax)$ 的傅里叶变换是 $|a|^{-1}F(s/a)$。

推导：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(ax)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|}\int f(ax)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(ax)(s/a)}\mathrm{d}(ax)$$
$$= \frac{1}{|a|}F\left(\frac{s}{a}\right)。$$

这个定理在波形和频谱上的应用是大家所熟悉的，它表明时间域尺度的压缩对应于频率域尺度的扩展。但是，当变换对中的一个函数在水平方向扩展时，另一个函数不但在水平方向上压缩，而且会在垂直方向上增长，以保持函数曲线下方的面积不变，如图 6.2 所示。

周期函数和冲激出现了一种特殊情况。如图 6.3 所示，余弦函数的扩展只是导致构成其变换的冲激发生了移位。这不是 s 尺度简单的压缩，因为那样的话必然会带来冲激强度的减弱。

对这个定理可以进一步做如下对称的描述：

如果 $f(x)$ 的傅里叶变换是 $F(s)$，则 $|a|^{\frac{1}{2}}f(ax)$ 的傅里叶变换是 $|b|^{\frac{1}{2}}F(bs)$，其中 $b=a^{-1}$。

因此，当函数扩展或压缩时，它在垂直方向上会压缩或增长（见图 6.4）以作补偿。（如此，函数平方的积分将保持不变，稍后将在能量定理中看到这一点）。

加性定理

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的傅里叶变换分别为 $F(s)$ 和 $G(s)$，则相应地 $f(x)+g(x)$ 的傅里叶变换是 $F(s)+G(s)$。

推导：

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f(x)+g(x)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\mathrm{d}x$$
$$= F(s)+G(s)。$$

通过图 6.5 的例子对上述定理的说明，反映出傅里叶变换适合用于处理线性问题。它的一个推论是：$af(x)$ 的傅里叶变换是 $aF(s)$，其中 a 是常数。

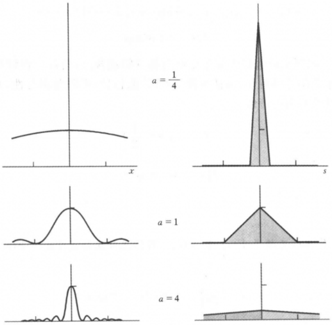


图 6.2 相似性定理所描述的坐标轴尺度变化的效果，图中阴影面积不变

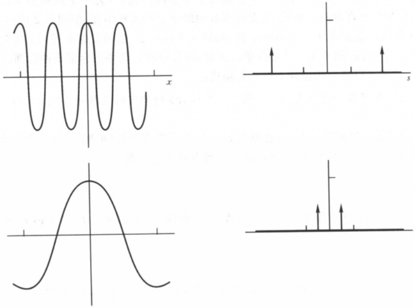


图 6.3 余弦的扩展及相应的频谱移位

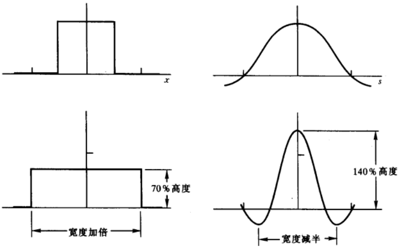


图 6.4　相似性定理的一种对称的形式

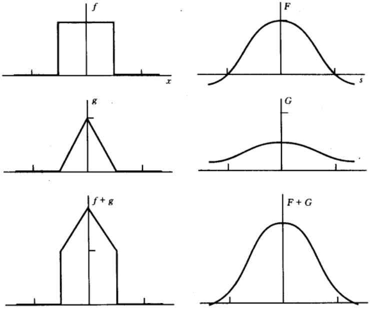


图 6.5　加性定理 $f+g \supset F+G$

移位定理

如果 $f(x)$ 的傅里叶变换是 $F(s)$，则 $f(x-a)$ 的傅里叶变换是 $e^{-i2\pi as}F(s)$。

推导：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-i2\pi xs}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-i2\pi(x-a)s}e^{-i2\pi as}\,d(x-a) = e^{-i2\pi as}F(s)。$$

如果一个给定函数向正向移动一个量 a，它的傅里叶变换的幅度不会变，因此可以预料傅里叶变换的变化将局限于相位的变化。根据这个定理，每一分量在相位上的延迟与 s 的值成正比，即频率越高，相角的变化越大。这是由于绝对位移量 a 在一个谐波分量的周期 s^{-1} 中占有很大的一部分，而谐波分量的周期与它的频率成正比。因此，相位延迟是 a/s^{-1} 个周期或 $2\pi as$ 弧度。相位随 s 线性变化的比例常数是 $2\pi a$，偏移量 a 越大，相位随频率的变化率也越大。

从特定的物理含义上看，时移定理是不言而喻的。考虑一束平行的单色光正常地照射在一个孔隙上。为了把衍射光束移动一个小的角度，我们只需改变光束同样的入射角度就可以了。这仅仅是一种线性地改变跨过孔隙的照射光相位的简单方法；另一种方法是使用薄棱镜，它在孔隙的每一点引入正比于棱镜厚度的延迟。这些用来改变光束传播方向的易于理解的方法在第 13 章中用来对移位定理进行说明。

在图 6.6 的例子中，函数 $f(x)$ 的傅里叶变换 $F(s)$ 是实的。它经过移位后的函数 $f(x-1/4)$ 的傅里叶变换，可以通过把 $F(s)$ 经每单位 s 均匀扭转 $\pi/2$ 角度后得到。该图试图说明包含 $F(s)$ 的平面变形为螺旋面。通过分别显示模和相位的方法，可以克服用三维图形中表示关于 s 的复函数的实际困难，但是三维图形通常更便于观察。

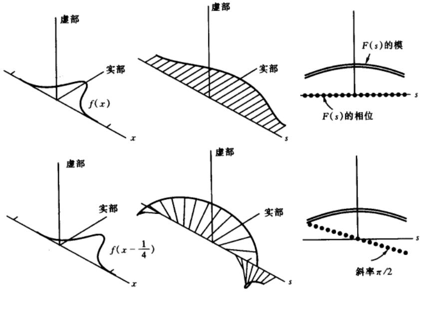


图 6.6 $f(x)$ 沿 x 轴移动 $\frac{1}{4}$ 单位，$F(s)$ 相应地将以 90° 每单位 s 均匀地扭转

第二个例子(见图 6.7)显示了余弦函数和正弦函数也有类似的结论,并且显示了余弦沿 x 轴滑动的中间情况。图中画出了余弦函数移动时的各种情况。在这些例子中没有给出螺旋面,而是用实部和虚部一起显示的方法,结合以前的惯例用虚线代表虚部来图示。一个小的移位很明显使实部几乎是完整的,但产生了奇的虚部。随着移位的增加虚部不断增加,直至移位量增至 $\pi/2$,此时实部已经不存在了。然后实部从负方向开始重新出现,当移位量增至 π 时,两个分量的相位都经历了一个完全反转的过程。

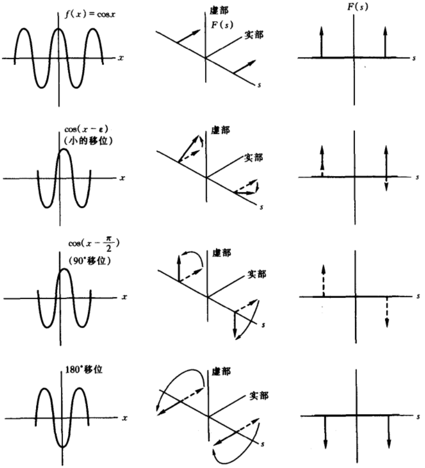


图 6.7 余弦函数移位后的结果

调制定理

如果 $f(x)$ 的傅里叶变换为 $F(s)$,则 $f(x)\cos\omega x$ 的傅里叶变换是

$$\frac{1}{2}F(s-\omega/2\pi)+\frac{1}{2}F(s+\omega/2\pi)。$$

推导:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(s-\omega/2\pi)x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(s+\omega/2\pi)x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}F(s-\omega/2\pi) + \frac{1}{2}F(s+\omega/2\pi)。$$

新的变换将会被看作是 $F(s)$ 和 $\frac{1}{2}\delta(s+\omega/2\pi)+\frac{1}{2}\delta(s-\omega/2\pi)=(\pi/\omega)\mathrm{II}(\pi s/\omega)$ 的卷积。这是卷积定理的一个特殊情形，但足以引起特别的重视。众所周知，在电视和广播中，载波被包络信号调制。包络信号的频谱被分为两部分，每部分的强度为原来的一半。这两个原频谱的复制品沿 s 轴分别移位了 $\pm\omega/2\pi$，如图 6.8 所示。

卷积定理

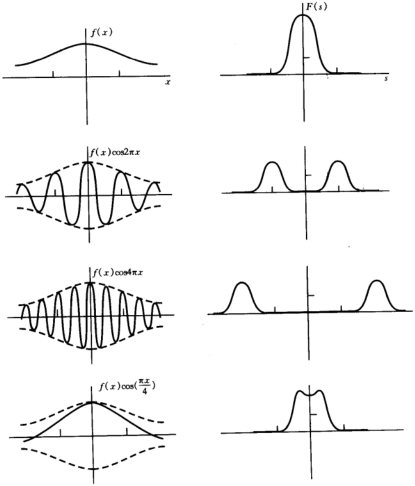


图 6.8 包络函数 $f(x)$ 与不同频率的余弦函数相乘及相应的频谱

如前所述,两个函数 f 和 g 的卷积是另一个用积分定义的函数 h:

$$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)g(x-u)\mathrm{d}u \text{ 。}$$

这个式子隐含了许多内容。比如说,$h(x)$ 是 $f(x)$ 的线性泛函;也即 $h(x_1)$ 是 $f(x)$ 的值的线性和,其中 $g(x)$ 是加权系数。但是它不是一般意义上的线性泛函,它的特殊性在于任何其它的 $h(x_2)$ 是用同样的方法对 $f(x)$ 的值进行线性加权得来的。另一种表达卷积定理这一特殊性质的方法是,$f(x)$ 沿 x 轴的移位直接导致 $h(x)$ 进行同样的移位;即如果 $h(x)=f(x)*g(x)$,那么

$$f(x-a)*g(x)=h(x-a)$$

假设一列火车慢慢经过一座桥。x 点的负荷是 $f(x)$,x 点的弯曲量是 $h(x)$。由于其结构构件的应变正比于压力,所以 x_1 点的形变就是负载分布 $f(x)$ 值的线性加权叠加。但是随着火车的前进,形变模式并没有变,因此不能用卷积积分表示。在这种情况下,只能说 $h(x)$ 是 $f(x)$ 线性泛函,即

$$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)g(x,u)\mathrm{d}u \text{ 。}$$

线性性和 x 移位不变性相结合才使得傅里叶分析变得十分有用,正如将在第 9 章看到的,它是输入为简单的谐波时,输出仍然是频率不变的简单谐波的条件。

如果把傅里叶分析的诸多众所周知的优点与卷积相结合,可望函数域中的卷积在变换域中有一个简单对应关系。这个对应关系用以下定理描述:

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的傅里叶变换分别为 $F(s)$ 和 $G(s)$,则 $f(x)*g(x)$ 的傅里叶变换是 $F(s)G(s)$,也就是说,两个函数的卷积的变换等于它们的变换的乘积。

推导:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x')g(x-x')\mathrm{d}x'\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\mathrm{d}x\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x')\left[\int_{-\infty}^{\infty}g(x-x')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x'\\
&=\int f(x')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi x's}G(s)\mathrm{d}x'\\
&=F(s)G(s) \text{ 。}
\end{aligned}$$

用顶上加横线来表示傅里叶变换,我们可给出定理及逆定理的简洁形式,即

$$\overline{f*g}=\overline{f}\,\overline{g},$$
$$\overline{fg}=\overline{f}*\overline{g}\text{。}$$

若用长横线表示反变换,等价的描述是:

$$\overline{\overline{f}\,\overline{g}}=f*g,$$
$$\overline{\overline{f}*\overline{g}}=fg \text{ 。}$$

先前我们给出了

$$f * g = g * f \quad （交换律）$$
$$f * (g * h) = (f * g) * h \quad （结合律）$$
$$f * (g + h) = f * g + f * h \quad （分配律）。$$

进一步的公式还有

$$\overline{f * g * h} = \overline{f}\,\overline{g}\,\overline{h},$$
$$\overline{f * (gh)} = \overline{f}\,(\overline{g} * \overline{h})。$$

这个强大的定理及其逆定理的重要作用在于，对一个函数进行的变换可以看作是两个函数的乘积或卷积。

下面是对上述一些公式的文字描述。

1. 卷积的变换是变换的乘积。
2. 乘积的变换是变换的卷积。
3. 两个函数的卷积是它们的变换的乘积的变换。
4. 两个函数的乘积是它们的变换的卷积的变换。

下面是常用来做检验的三个有价值的特性。

1. 卷积下的面积等于各因子下的面积的乘积，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}(f * g)\mathrm{d}x = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{d}x\right],$$

因为

$$\int\left[\int f(u)g(x-u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x = \int f(u)\left[\int g(x-u)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u$$
$$= \left[\int f(u)\mathrm{d}u\right]\left[\int g(x)\mathrm{d}x\right]。$$

2. 重心坐标相加，即

$$\langle x\rangle_{f*g} = \langle x\rangle_f + \langle x\rangle_g$$

其中

$$\langle x\rangle_h = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xh(x)\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\mathrm{d}x}。$$

3. 若$\langle x\rangle_f = 0$或$\langle x\rangle_g = 0$，二阶矩满足加法，一般地，

$$\langle x^2\rangle_{f*g} = \langle x^2\rangle_f + \langle x^2\rangle_g + 2\langle x\rangle_f\langle x\rangle_g$$

其中

$$\langle x^2\rangle_h = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2h(x)\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\mathrm{d}x}$$

由此可得方差一定满足可加性。(126 页)

我们已经阐明了卷积定理：$f(x)*g(x)$ 的傅里叶变换是 $F(s)G(s)$。写成完整的形式，就是，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)G(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi xs}\mathrm{d}s$$

或

$$F(s)G(s) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\mathrm{d}u\mathrm{d}x$$

当我们考虑到复共轭和变量的符号反转时，经常用到卷积定理不少于 20 种的形式。这里有 10 个简写的公式：

$$f*g \supset FG$$
$$f*g(-) \supset FG(-)$$
$$f(-)*g(-) \supset F(-)G(-)$$
$$f*g^*(-) \supset FG^*$$
$$f*g^* \supset FG^*(-)$$
$$f(-)*g^*(-) \supset F(-)G^*$$
$$f(-)*g^* \supset F(-)G^*(-)$$
$$f^*(-)*g^*(-) \supset F^*G^*$$
$$f^*(-)*g^* \supset F^*G^*(-)$$
$$f^* * g^* \supset F^*(-)G^*(-)$$

自卷积公式是

$$f*f \supset F^2$$
$$f(-)*f(-) \supset [F(-)]^2$$
$$f^*(-)*f^*(-) \supset [F^*]^2$$
$$f^* * f^* \supset [F^*(-)]^2$$

对自相关，我们有

$$f\star f \supset FF(-)$$
$$f(-)\star f(-) \supset FF(-)$$
$$f^*(-)\star f^*(-) \supset F^*F^*(-)$$
$$f^*\star f^* \supset F^*F^*(-)$$

瑞利定理

一个函数模的平方的积分等于它的频谱模的平方的积分。即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |F(s)|^2\mathrm{d}s\ 。$$

推导：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f^*(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f^*(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs'}\mathrm{d}x & s'=0\\ &= F(s')*F^*(-s') & s'=0\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(s)F^*(s-s')\mathrm{d}s & s'=0\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(s)F^*(s)\mathrm{d}s\ 。\end{aligned}$$

这个定理对应于傅里叶级数中的帕塞伐尔定理，是瑞利(1889) 在他的关于黑体辐射的论文中首先使用的。这里，和其它许多关系式一样，每一个积分代表一个系统的能量。一个积分覆盖坐标轴上所有的区域，另一个则涵盖所有的频谱分量(见图 6.9)。

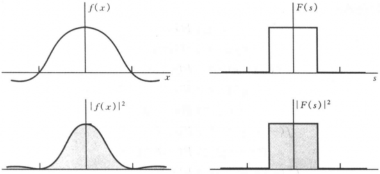


图 6.9 瑞利定理：阴影部分的面积相等

这个定理在数学领域有时称为 Plancherel 定理(见 Titchmarsh, 1924)，M. Plancherel 在 1910 年确立了定理成立的条件。如果两个积分都存在，那么定理即成立。距现在更近一些，Carleman(见第 2 章参考书目)证明了只要其中一个积分存在，定理即成立。瑞利在他的推导中简单地假设两个积分存在。

功率定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g^*(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)G^*(s)\mathrm{d}x\ 。$$

推导：其证明与瑞利定理的证明相似，只是将其中的 f^* 换成 g^*，F^* 换成 G^*。下面的形式说明简记法是十分有用的。

$$\int fg^*\,\mathrm{d}x = \overline{fg^*}\Big|_0 = \overline{f} * \overline{g^*}\Big|_0 = F*G^*(-)\Big|_0 = \int FG^*\,\mathrm{d}s\ 。$$

在许多物理解释中，这个等式的每一边都代表能量或功率(见图 6.10)，是计算能量或功率的两种方法。在第一种方法中，瞬时或局部的能量或功率用一对正则共轭变量的乘积(电场和磁场，电压和电流，力和速度)在时间或空间域上积分来计算。在第二种方法中，时间或空间的频谱分量相乘并在整个频谱域上积分。

正如所举的第三个例子，f 和 g 通常是实数量。那么，F 和 G 可以是复数，并且

$$FG^* = (\mathrm{Re}F + \mathrm{i}\mathrm{Im}F)(\mathrm{Re}G - \mathrm{i}\mathrm{Im}G)$$
$$= (\mathrm{Re}F)(\mathrm{Re}G) + (\mathrm{Im}F)(\mathrm{Im}G) + \text{奇数项}\ 。$$

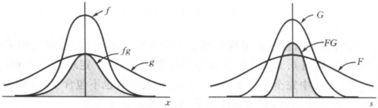


图 6.10　功率定理：阴影部分的面积相等，本例中 f 和 g 是实的偶函数

研究表明，最后一项是奇的，这是因为 F 和 G 是 hermitian 的；也就是说，他们的实部是偶的，虚部是奇的，奇项的无穷积分等于零。因此，对实函数 f 和 g：

$$\int_{-\infty}^{\infty} fg\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} FG^*\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{\infty} [(\mathrm{Re}F)(\mathrm{Re}G) + (\mathrm{Im}F)(\mathrm{Im}G)]\mathrm{d}s,$$

如图 6.11 所示。

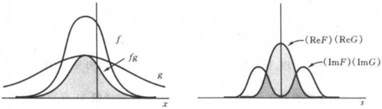


图 6.11　功率定理：f 和 g 是实的，F 和 G 是复的，左图中阴影的面积等于右图所有阴影面积之和

练习　设 f 和 g 是实函数，证明功率定理也可以表示为：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(-x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)G(s)\mathrm{d}s$$

通过令 $f(x) = g(x)$，我们得到瑞利定理，它适用于物理系统，其中 f/g 和 F/G 是常量（一般地可解释为阻抗），能量或功率可表示为对其中一个变量的平方。这个定理本身并没有一个与众不同的名字，有些作者称它为 Parseval 定理，即在傅里叶理论中公认的名称（第 10 章）。

自相关定理

如果 $f(x)$ 的傅里叶变换是 $F(s)$，那么它的自相关函数 $\int_{-\infty}^{\infty} f^*(u)f(u+x)\mathrm{d}u$ 的傅里叶变换是 $|F(s)|^2$。

推导：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(s)|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi xs}\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)F^*(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi xs}\mathrm{d}s$$

$$= f(x) * f^*(-x)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(u-x) \mathrm{d}u$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(u) f(u+x) \mathrm{d}u$$

作为卷积定理的特例，自相关定理在通信中常见的形式是，信号的自相关函数是它的功率谱[①]的傅里叶变换，如图 6.12 所示。和自卷积定理相比，这个定理有一个独特的特性，$F(s)$ 的相位信息在 $|F(s)|^2$ 中完全丢失了。相应地，自相关函数也不包含 $f(x)$ 的傅里叶变换分量的相位信息，正如第 34 页所述，即使相位变了，自相关函数也不变。

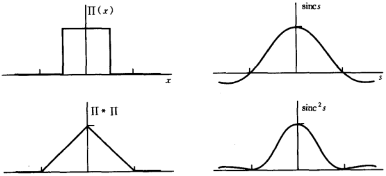


图 6.12　自相关定理：对函数进行自相关相当于对它的傅里叶变换的模进行平方

练习　证明归一化的自相关函数 $\gamma(x)$，即 $\gamma(0)=1$（参考第 31 页），它的傅里叶变换是归一化的功率谱函数 $|\Phi(s)|^2$，其无穷积分为 1。定义为：

$$|\Phi(s)|^2 = \frac{|F(s)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |F(s)|^2 \mathrm{d}s}$$

还要补充说明的是我们在第 3 章用自相关函数序列 $\gamma_X(x)$ 定义的 $C(x)$ 函数，$\gamma_X(x)$ 序列是当 $X \to \infty$ 时，由函数 $f(x)\Pi(x/X)$ 生成的。如果 $\gamma_X(x)$ 趋近于一个极限，这个极限就称为 $C(x)$。与归一化自相关函数序列相对应，$\gamma_X(x)$ 是具有归一化功率谱 $|\Phi_X(s)|^2$ 的序列。如果当段长度 X 增加时，$\gamma_X(x)$ 趋于一极限，那么归一化功率谱趋近于极限形式 $|\Phi_\infty(s)|^2$。在此情况下自相关定理取如下形式：

$$C(x) \supset |\Phi_\infty(s)|^2。$$

正如我们前面通常所说的，自相关函数是功率谱的傅里叶变换，使定义符合了这种情况的需要。

显然存在下面的情况，$\gamma_X(x)$ 的傅里叶变换序列并非对所有 s 都存在极限，但具有可以用冲激符号 $\delta(s)$ 描述的性质。所以需要接受 $C(x)$ 的傅里叶变换是广义函数的情况。比如，单一频

① 对随时间的推移不趋于零的信号，相应的定理有时称为维纳定理(1949)。

率和有限功率信号具有的理想线谱的情况。我们知道，如果 $f(x)=\cos\alpha x$，则 $C(x)=\cos\alpha x$。$C(x)$ 的傅里叶变换就是一个广义函数 $\frac{1}{2}\delta(s+\alpha/2\pi)+\frac{1}{2}\delta(s-\alpha/2\pi)$，如果有必要，我们可以写出用来定义它的 $\gamma_X(x)$ 的变换序列。然而，有趣的是，作为广义函数的功率谱不能从自相关定理推出，因为我们不能解释 $[\delta(x)]^2$ 是什么。

练习　尝试把自相关定理用于 $f(x)=\cos\alpha x$，给出 $[\delta(x)]^2$ 的一个解释，并用一些简单的例子检验，比如 $f(x)=1$。

练习　说明用序列 $\gamma_X(x)$ 表示 $C(x)$ 不需要涉及 $\delta(x)$。

练习　我们希望讨论功率谱的理想情况，即在频域上既是平坦的又扩展到无穷远处。确定 $C(x)$ 和它的变换。证明非归一化自相关函数自身需要满足这个要求，构造出一个好的自相关定理的形式，使得功率谱能被归一化，以使其在原点等于 1。当 $f(x)=\cos\alpha x$ 时，这种形式的定理如何解释？

微分定理

如果 $f(x)$ 的傅里叶变换是 $F(s)$，那么 $f'(x)$ 的傅里叶变换是 $\mathrm{i}2\pi sF(s)$。

推导：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+\Delta x)}{\Delta x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\,\mathrm{d}x - \lim\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{\Delta x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\Delta xs}F(s)-F(s)}{\Delta x} \\ &= \mathrm{i}2\pi sF(s)。\end{aligned}$$

由于对函数的微分等价于对它的傅里叶变换乘以 $\mathrm{i}2\pi s$，我们可以说微分加强了高频分量，衰减了低频分量，抑制了直流分量。如图 6.13 和图 6.14 给出的例子。

与 $\mathrm{i}2\pi s$ 相乘经常会使 $|\mathrm{i}2\pi sF(s)|$ 的积分发散。相应地，微分 $f'(x)$ 会有无限多个间断点。可用冲激符号和它的微分来处理。

卷积的微分

微分定理与卷积定理共同作用的情况下，如果

$$h=f*g,$$

那么

$$h'=f'*g,$$

或者

$$h'=f*g'。$$

推导：

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)*g(x)]\supset \mathrm{i}2\pi s[F(s)G(s)]\\ &f'(x)*g(x)\supset[\mathrm{i}2\pi sF(s)]G(s)\\ &f(x)*g'(x)\supset F(s)[\mathrm{i}2\pi sG(s)]\end{aligned}$$

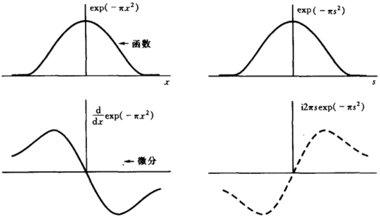


图 6.13　对函数的微分对应于它的傅里叶变换乘以 $-\mathrm{i}2\pi s$

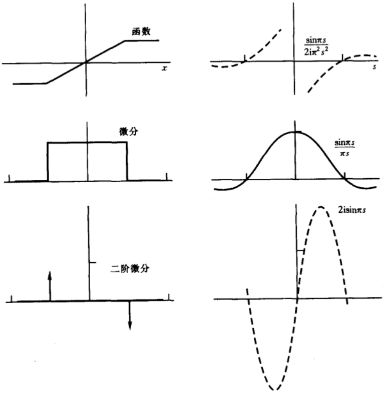


图 6.14　微分定理的连续应用

这些结论可以用如下的另一种形式表述为：

卷积的微分是其中任一个函数与另一个函数的微分相卷积。

这样，

$$(f*g)' = f'*g = f*g',$$
$$f*g = f'*\int^x g\,\mathrm{d}x$$

进一步有

$$= f''*\iint^x g\,\mathrm{d}x\mathrm{d}x$$
$$\cdots$$

练习 用分部积分证明公式 $f'*g = f*g'$。

根据冲激符号的微分，我们有

$$h = \delta * h,$$

因此

$$h' = \delta' * h = \delta' * f * g = (\delta' * f) * g = f' * g = f * (\delta' * g) = f * g'$$
$$f * g = \delta * f * g = (\delta' * H) * f * g = (\delta' * f) * (H * g),$$

这里引用的公式可应用于特殊卷积积分的解析或数值计算，但主要的是其理论价值（比如，根据冲激响应和阶跃响应来推导滤波器响应公式和它的不确定关系）。

δ 标记法和卷积的其它性质及结合律的结合带来的代数上的便利，使得我们可以快速得到所要研究问题的关系式。出现了许多有趣的可能性，比如考察下式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f*g) \supset \mathrm{i}2\pi sFG$$

我们将式子右边分解因式可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f*g) = \frac{\mathrm{d}^{\frac{1}{2}}f}{\mathrm{d}x^{\frac{1}{2}}} * \frac{\mathrm{d}^{\frac{1}{2}}g}{\mathrm{d}x^{\frac{1}{2}}} \supset (\mathrm{i}2\pi s)^{\frac{1}{2}}F(\mathrm{i}2\pi s)^{\frac{1}{2}}G。$$

广义函数的变换

设 $p(x)$ 为第 5 章中用序列 $p_\tau(x)$ 定义的广义函数，$p_\tau(x)$ 定义序列的傅里叶变换为 $P_\tau(s)$，其中

$$P_\tau(s) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\tau(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi sx}\,\mathrm{d}x 。$$

或许这个新序列 $P_\tau(s)$ 定义了一个广义函数。我们知道序列中的每一项都是极好性态函数；我们通过一个傅里叶变换是 $\overline{F}(s)$ 的一任意极好性态函数 $F(x)$ 来检测序列的正则性。由能量定理得

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_\tau(s)\overline{F}(s)\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{\infty} p_\tau(x)F(-x)\,\mathrm{d}x$$

从而有

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} P_\tau(s)\overline{F}(s)\,\mathrm{d}s = \lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} p_\tau(x)F(-x)\,\mathrm{d}x ,$$

我们知道后者的极限存在。因此 $P_\tau(s)$ 定义了一个广义函数，我们用符号 $P(s)$ 来表示，它的意思是"广义函数 $p(x)$ 的傅里叶变换"。

关于 $p(x)$ 与 $P(s)$ 可以如下表达：

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(s)\overline{F}(s)\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)F(-x)\mathrm{d}s$$

其中 $F(x)$ 是任意的极好性态函数，$\overline{F}(s)$ 是它的傅里叶变换。

设 $\phi(x)$ 是一函数，比如一个多项式函数，它在任意点存在任意阶导数，但当 $|x|\to\infty$，$\phi(x)$ 不像极好性态函数那么严格有界。我们允许 $\phi(x)$ 与 $|x|^N$ 趋于无穷大，其中 N 有界。不包括诸如 $\exp x$ 和 $\log x$ 这样的函数。那么，$\phi(x)$ 与任意极好性态函数的乘积当 $|x|\to\infty$ 时最终由后者的作用所压制，因为极好性态函数比 $|x|^{-N}$ 更快地趋近于 0。更进一步，因为乘积项在任意点有任意阶导数，所以乘积项本身就是极好性态的。

考虑一个序列 $\phi(x)p_\tau(x)$，它是极好性态的，而且

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}[\phi(x)p_\tau(x)]F(x)\mathrm{d}x = \lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} p_\tau(x)[\phi(x)F(x)]\mathrm{d}x$$

是存在的，因为 $p_\tau(x)$ 是正则序列，并且 $[\phi(x)F(x)]$ 是极好性态的。我们把如此定义的广义函数记作 $\phi(x)p(x)$。

实际上，就像脉冲序列 $\tau^{-1}\Pi(x/\tau)$ 那样，当它在无穷远处的情况无关紧要时，我们使用这个含有足够阶导数并且包括指数性增长函数的 $\phi(x)$ 作为标记。

我们没有对两个广义函数的乘积进行介绍，两个定义序列的积不一定是一个正则序列，从而它们通常不能定义一个广义函数。

定理的证明

在前几节已被证明很有用的许多傅里叶理论中的定理，也适用于带有冲激符号 $\delta(x)$，*shah* 符号 $\mathrm{III}(x)$，复制符号 $\mathrm{II}(x)$ 以及其它熟知的非函数符号的情况。前面有关这些定理的证明并不严格，并且定理适用性的前提条件在实际中是观察不到的（实际上在现实生活中是不存在的）。上文通过引入极限条件下的变换和冲激符号在极限下的特殊表述来处理这种情况。

在为广义函数建立了代数系统以后，我们就能给出各种定理的系统证明，而不受一些苛刻条件的限制；当我们的注意力局限于那些满足规则变换存在条件的函数时，会遇到这些条件。因为广义函数有任意阶导数，所以函数不存在导数的困难也就不存在了。甚至有些更无法接受的困难问题，比如纯直流的频谱不存在（在频域是个冲激），也就迎刃而解了。上面给出的这些简洁的推导对学习这些定理来说很有用，但是对 Lighthill(1958) 提出的严格证明来说是不够的。为了说明正式的证明，下面给出了使用序列 $p_\tau(x)$ 定义的广义函数证明的一些例子。

相似性定理和移位定理 我们同时证明这两个定理。设 $p(x)$ 为一个广义函数，其傅里叶变换为 $P(s)$。那么

$$p(ax+b)\supset\frac{1}{|a|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi bs/a}P\left(\frac{s}{a}\right)。$$

证明：因为

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} p_\tau(ax+b)F(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|}\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} p_\tau(x)F(\frac{x-b}{a})\mathrm{d}x$$

存在，$p(ax+b)$ 是有意义的。现在，通过变量代换有

$$p_\tau(ax+b) \supset \frac{1}{|a|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi bs/a}P_\tau(\frac{s}{a})$$

因此可以得到这两个定理。

微分定理 $p'_\tau(x)$ 的傅里叶变换是 $\mathrm{i}2\pi sP_\tau(s)$，因此 $p'(x)$ 的傅里叶变换是 $\mathrm{i}2\pi sP(s)$。

功率定理 因为两个广义函数的乘积没有意义，所能证明的最好的定理是：

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(s)\overline{F}(s)\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)F(-x)\mathrm{d}x,$$

其中 $F(x)$ 是极好性态函数，$p(x)$ 是广义函数。定理可以由以下事实得到：

$$\begin{aligned}\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} P_\tau(s)\overline{F}(s)\mathrm{d}s &= \lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{F}(s)p(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi sx}\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\ &= \lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} p_\tau(x)F(-x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

以上所有定理很容易推广到二维的情况。在一维中不存在的旋转和剪切与一些新的基本定理相联系。循环对称引入了重要的特殊情形。在图形学中，把仿射定理应用在形如 $f(ax+by+c,\ dx+ey+f)$ 的函数中有着丰富的含义(Bracewell 等，1993，Bracewell 1994)。

定理的总结

我们把前面已经介绍过的定理列于表 6.1 以供参考。

表 6.1 傅里叶变换定理

定理	$f(x)$	$F(s)$
相似性	$f(ax)$	$\frac{1}{\vert a\vert}F\left(\frac{s}{a}\right)$
加性	$f(x)+g(x)$	$F(s)+G(s)$
移位	$f(x-a)$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi as}F(s)$
调制	$f(x)\cos\omega x$	$\frac{1}{2}F(s-\omega/2\pi)+\frac{1}{2}F(s+\omega/2\pi)$
卷积	$f(x)*g(x)$	$F(s)G(s)$
自相关	$f(x)*f^*(-x)$	$\vert F(s)\vert^2$
微分定理	$f'(x)$	$\mathrm{i}2\pi sF(s)$
卷积的微分	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)*g(x)] = f'(x)*g(x) = f(x)*g'(x)$	
瑞利定理	$\int_{-\infty}^{\infty}\vert f(x)\vert^2\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\vert F(s)\vert^2\mathrm{d}s$	
功率定理	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g^*(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)G^*(s)\mathrm{d}s$	
(f 和 g 是实函数)	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(-x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)G(s)\mathrm{d}s$	

参考书目

Bell, R. J.: "Introductory Fourier Transform Spectroscopy", Academic Press, New York, 1972.

Bracewell, R. N.: "Affine Theorem for the Hartley Transform of an Image", *Proc IEEE*, 82: 388 - 390, 1994

Bracewell R N, Chang K Y, Jha A K, and Wang Y H.: "Affine Theorem for Two-dimensional Fourier Transform", *Electronics Letters*, 29:304, 1993

Lighthill M. J.: "An Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions", Cambridge University Press, Cambridge, England, 1958.

Lord Rayleigh: "On the Character of the Complete Radiation at a Given Temperature," *Phil. Mag. Ser.* 5, vol. 27, 1889, Scientific Papers, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1902, and Dover Publications, New York, vol. 3, p. 273, 1964.

Titchmarsh, E. C.: "A Contribution to the Theory of Fourier Transforms," *Proc. Lond. Math. Soc.*, vol. 23, p. 279, 1924.

Wiener, N.: "Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series," John Wiley and Sons, New York, 1949.

习题

1. 用给出的变换对作参考，应用适当的定理进一步地推出下列变换对。设 A 和 σ 为正数。

$$\frac{\sin x}{x} \supset \pi \Pi(\pi s) \qquad \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \supset \pi \Lambda(\pi s)$$

$$\frac{\sin Ax}{Ax} \supset \frac{\pi}{A} \Pi\left(\frac{\pi s}{A}\right) \qquad \left(\frac{\sin Ax}{Ax}\right)^2 \supset \frac{\pi}{A} \Lambda\left(\frac{\pi s}{A}\right)$$

$$e^{-x^2} \supset \pi^{\frac{1}{2}} e^{-\pi^2 s^2} \qquad \delta(ax) \supset \frac{1}{|a|}$$

$$e^{-Ax^2} \supset \left(\frac{\pi}{A}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\pi^2 s^2/A} \qquad \delta(ax+b) \supset \frac{1}{|a|} e^{i2\pi bs/a}$$

$$e^{-x^2/2\sigma^2} \supset (2\pi)^{\frac{1}{2}} \delta e^{-2\pi^2 \sigma^2 s^2} \qquad e^{-ix} \supset \delta\left(s - \frac{1}{2\pi}\right)$$

2. 用加性定理证明下面的变换对，并作图。

$$1 + \cos\pi x \supset \delta(s) + \text{II}(s)$$

$$1 + \sin\pi x \supset \delta(s) + i\text{I}_{\text{I}}(s)$$

$$\operatorname{sinc} x + \frac{1}{2}\operatorname{sinc}^2 \frac{1}{2}x \supset \Pi(s) + \Lambda(2s)$$

$$A^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi x^2/A} + A^{\frac{1}{2}} e^{-\pi A x^2} \supset e^{-\pi s^2/A} + e^{-\pi A s^2}$$

$$4\cos^2 \pi x + 4\cos^2 \frac{1}{2}\pi x - 3 \supset \delta\left(s - \frac{1}{2}\right) + \delta\left(s + \frac{1}{2}\right) + \delta(s) + \frac{1}{2}\delta(s-1) + \frac{1}{2}\delta(s+1)。$$

3. 利用移位定理推导下列变换对。

$$\frac{\cos\pi x}{\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)} \supset - e^{-i\pi s} \Pi(s)$$

$$\frac{\sin\pi x}{\pi(x-1)} \supset - e^{-i2\pi s} \Pi(s)$$

$$\Lambda(x-1) \supset \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi s}\operatorname{sinc}^2 s$$

$$\Pi(x-\frac{1}{2}) \supset \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi s}\operatorname{sinc}s$$

$$\Pi(x)\operatorname{sgn}x \supset -\mathrm{i}\sin\frac{1}{2}\pi s\operatorname{sinc}\frac{1}{2}s$$

$$\Pi\left(\frac{x-\frac{1}{2}a}{a}\right) \supset |a|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi a s}\operatorname{sinc}as \text{ 。}$$

4. 利用卷积定理求出下列函数的傅里叶变换并作图。

$$\operatorname{sinc}x\operatorname{sinc}2x, \quad (\operatorname{sinc}x\cos 10x)^2 \text{。}$$

5. 设 $f(x)$ 为周期函数，周期为 a，即对所有的 x，有 $f(x+a)=f(x)$。由时移定理得 $f(x+a)$ 的傅里叶变换等于 $\exp(\mathrm{i}2\pi as)F(s)$，也一定等于 $F(s)$。关于一个周期函数的变换能得到什么结论？

6. 画出 $f(x)\sin\omega x$ 在 ω 较大和较小时的变换，并作图解释对于较小的 ω，$f(x)\sin\omega x$ 的变换为何正比于 $f(x)$ 的变换的导数。

7. 为 $\exp(-x)H(x)\cos\omega x$ 的变换作图，它是 s 的偶函数吗？

8. 证明 $\Pi(x/X)\cos 2\pi fx$ 所描述的脉冲信号的频谱为

$$\frac{1}{2}X\{\operatorname{sinc}[X(s+f)]+\operatorname{sinc}[X(s-f)]\} \text{ 。}$$

9. 证明已调制脉冲 $\Pi(x/X)(1+M\cos 2\pi Fx)\cos 2\pi fx$ 的频谱是

$$\frac{1}{2}X\{\operatorname{sinc}[X(s+f)]+\operatorname{sinc}[X(s-f)]\}+\frac{1}{4}MX\{\operatorname{sinc}[X(s+f+F)]$$
$$+\operatorname{sinc}[X(s+f-F)]+\operatorname{sinc}[X(s-f+F)]+\operatorname{sinc}[X(s-f-F)]\} \text{ 。}$$

画出频谱图，适当放大刻度以表示在一个脉冲中含有 100 个调制信号周期和 100 000 个载波周期，调制系数 M 是 0.6。用相互间的尺寸比较说明因子 100，100 000，0.6 是如何体现在频谱的形状中的。

10. 函数 $f(x)$ 定义为

$$f(x)=\begin{cases}0 & |x|>2\\ 2-|x| & 1<|x|<2\\ 1 & |x|<1\end{cases} \text{，}$$

证明：

$$f(x)=2\Lambda(\frac{x}{2})-\Lambda(x)=\Lambda(x)*[\delta(x+1)+\delta(x)+\delta(x-1)]$$

从而有：

$$F(s)=4\operatorname{sinc}^2 2s-\operatorname{sinc}^2 s=\operatorname{sinc}^2 s(1+2\cos 2\pi s) \text{ 。}$$

11. 证明：$f*g*h \supset FGH$，因此有 $f^{*n} \supset F^n$。

12. 符号 f^{*n} 是指 $f(x)$ 和自己卷积 $n-1$ 次，其中 $n=2,3,4\cdots$，设想分数阶自卷积的观

点。证明卷积的这种推广是很容易的，比如 $f(x)$ 与自己的$\frac{1}{2}$ 次卷积的合理表达式是：

$$f^{*1\frac{1}{2}} \equiv \int e^{i2\pi sx}\left[\int e^{-i2\pi su} f(u)\,du\right]^{1\frac{1}{2}} ds$$

13. 证明：

$$(f*g)(h*j) \supset (FG)*(HJ)$$

以及

$$(f+g)*(h+j) \supset FH+FJ+GH+GJ。$$

14. 利用卷积定理求出下列表达式：$e^{-ax^2} * e^{-bx^2}$。

15. 证明：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(u)g^*(x-u)\,du \supset F^*(-s)G^*(-s)。$$

16. 证明：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(u)g^*(u-x)e^{-i2\pi xs}\,du\,dx = F^*(-s)G^*(s)。$$

17. 用瑞利定理证明：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2 x\,dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^4 x\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} [\Lambda(x)]^2\,dx = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [J_0(x)]^2\,dx = \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}$$

18. 完成下列参考图表，包括函数的略图。

函数 ⊃ 变换
自相关 $f \star f$ ⊃ 功率谱 $\lvert F(s)\rvert^2$

$\Pi(x)$	

$\Lambda(x)$	

$\gamma(x)$	

sinc x	

$\Pi(x)\cos 2\pi fx$	

19. 指出下列推理的错误之处：因为$\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$ 的微分是 $f(x)$，所以$\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$ 的傅里叶变换是 $F(s)/i2\pi s$；而且因此由微分定理得出如下事实，$f(x)$ 的变换是 $F(s)$。

20. 给出关于函数不定积分傅里叶变换的积分定理。

21. 利用微分定理求 $xe^{-\pi x^2}$ 的傅里叶变换。

22. 证明：$2\pi x \Pi(x) \supset \mathrm{i}\,\mathrm{sinc}'s$。

23. 下列简短的推导似乎证明了函数微分后围成的面积为 0，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\mathrm{d}x = \overline{f'(x)}\Big|_0 = \mathrm{i}2\pi sF(s)\mid_0 = 0。$$

如果正确，请给予证明；反之，请指出错误之处。

24. 证明：

$$f(ax-b) \supset \frac{1}{|a|}e^{-\mathrm{i}2\pi bs/a}F(\frac{s}{a})。$$

25. 利用能量定理证明：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\cos 2\pi ax\,\mathrm{d}x = e^{-\pi a^2}。$$

26. 利用能量定理证明：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2 x\cos\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}。$$

27. 证明：函数的傅里叶变换为 $|\,\mathrm{sinc}s\,|$ 时，它的自相关函数是三角函数。

28. 通常，自相关函数要比原来的函数扩展很多。但是证明：

$$\frac{1}{\pi x} * \frac{-1}{\pi x} = \delta(x)。$$

同时证明 $(\pi x)^{-1}$ 具有平坦的能谱，并由此推导和考察自相关函数是冲激的其他函数。

29. $F(s)$ 的麦克劳林级数是：

$$F(0) + sF'(0) + \frac{s^2}{2!}F''(0) + \cdots$$

考虑 $F(s) = \exp(-\pi s^2)$ 的情况，它的级数收敛，并收敛于 $F(s)$。因此，在这种特殊情况下，

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!}F^{(n)}(0)。$$

如果 $F(s)$ 是 $f(x)$ 的傅里叶变换，则通过变换上述等式得：

$$f(x) = \delta(x)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x - \delta'(x)\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x + \delta''(x)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{2!}f(x)\mathrm{d}x + \cdots$$

对此结果你怎样解释？

30. 傅里叶变换对 推导下列傅里叶变换对：

a) $e^{\mathrm{i}\pi x^2} \supset e^{\mathrm{i}\pi/4}e^{-\mathrm{i}\pi s^2}$

b) $\cos(\pi x^2) \supset 2^{-\frac{1}{2}}[\cos(\pi s^2) + \sin(\pi s^2)]$

c) $\sin(\pi x^2) \supset 2^{-\frac{1}{2}}[\cos(\pi s^2) - \sin(\pi s^2)]$

d) $e^{-\pi\alpha x^2} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \pi\beta x^2 \supset (\alpha^2+\beta^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\pi\alpha s^2}{\alpha^2+\beta^2}\right) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)-\frac{\pi\beta s^2}{\alpha^2+\beta^2}\right)$

e) $e^{-\pi(\alpha+i\beta)x^2} \supset (\alpha+i\beta)^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi s^2/(\alpha+i\beta)}$

31. 频率分析　太平洋底有一座火山，在一个有人居住的岛屿附近爆发，并引起海面时升时降，最大高度约 10 米。站在岸边的一位船长使用六分仪来测量水距悬崖顶端的距离，并将海面高度记录下来，后来研究表明高度 $h(t)$ 可近似用下式表示：

$$h(t) = 11\sin(45° - 72° t)\exp(-t^2/5)$$

其中 h 的单位是米，t 的单位是分钟。火山时常爆发，常常造成码头和船舶的损失。但这是第一次可以得到水面高度的波形，它将为重新设计港口打下基础。

a) 要特别注意数值的正确性，但不一定计算所有的值，求出 $h(t)$ 的傅里叶变换 $\overline{h}(f)$。

b) $h(t)$ 达到最大值的频率（每分钟的周期数）是多少？

32. 线性调频信号(Chirp)　线性调频信号是扫频信号，蝙蝠和人们将它们用在雷达上，以便在第一个反射波即将到达且发射仍在继续的情况下从回波中找出自己发射的信号。一个例子是：

$$s(t) = e^{-\pi t^2/T^2} e^{i2\pi(f_0 t+\beta t^2)}。$$

这个 Chirp 脉冲的等效持续时间为 T，脉冲中部的频率为 f_0，频率扫描速率为 2β。证明，功率谱的中心在 f_0 处，且其等效宽度为

$$\Delta = 2^{-\frac{1}{2}} T^{-1}(1+4\beta^2 T^4)^{\frac{1}{2}}。$$

33. Voigt 形　谱线通常有形如 $[1+4(f-f_0)^2/B^2]^{-1}$ 的曲线形式。比如，可以由谐振器的吸收造成。这是一个移位后的柯西形。其它谱线可能具有高斯形，比如当多普勒偏移超过本征线宽 B 时处于紊乱状态的气体的谱线。高斯与柯西形卷积的过渡形称为 Voigt 形，它们有一些有趣的性质。证明：两个 Voigt 形的卷积仍为 Voigt 形。

34. 逆定理　证明，微分定理和移位定理的逆定理分别为：

$$-i2\pi x f(x) \supset F'(s)$$
$$e^{i2\pi s_0 x} f(x) \supset F(s-s_0)$$

有没有和它的逆定理形式不一样的其它定理？

第 7 章

求解变换

前面介绍了许多阐明傅里叶变换基本性质的实例。当然，我们并非必须知道所有特殊的傅里叶变换关系才能正确理解变换性质的意义。关于傅里叶变换重要性的一系列论证中，大多数也不依赖于任何特殊的实例。不过，记得一些常见论证的特例，常常会起到心领神会的效果。

前面用作说明的傅里叶变换对的例子都只是没有推导的介绍，它们可以通过计算傅里叶积分得到验证。显然，当有必要产生新的傅里叶变换对时，这种方法是不会提供帮助的。因此，我们考虑求解傅里叶变换的不同方法。在第 11 章中将要讨论基于离散傅里叶变换并且可以使用快速傅里叶变换算法的数值方法，但本章主要讨论用求和简单计算积分的慢速傅里叶变换算法。这种算法的程序很短，而且使用者可以完全控制它，对于大多数的一般应用程序只需运行几秒钟。

要推导已知函数 $f(x)$ 的傅里叶变换，我们首先观察积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\,\mathrm{d}x,$$

如果对于所有 s 这个积分都可以计算出来，那么问题就解决了。

在随后的小节里将从积分的角度出发分别讨论一些不同方法。

除了这个直接的方法，我们还可以在已经建立起来的基本定理中获得强有力的信息。许多定理都有这样的形式：“如果 f 和 F 是傅里叶变换对，那么 g 和 G 也是傅里叶变换对。”因此，如果开始我们知道一对变换对，就可以生成其它的变换对。在已有的基础上，的确可以根据定理来构建傅里叶变换表。我们可以想象，某些类别的函数是永远不会以这种方法被偶然发现的；另一方面，一些物理可实现的函数是可以通过这种方法获得的。定理的推广在后面用例子给出。最后，在表格中提取想要的变换也是可能的。

闭式积分

若 $f(x)$ 在一些范围内的 x 上取零，并且在非零区域函数比较简单，这是一种有利的情况。这样如果

$$f(x) = \Pi(x),$$

则

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi xs}dx &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-i2\pi xs}dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos 2\pi xs\,dx \\ &= \frac{\sin\pi s}{\pi s} \\ &= \operatorname{sinc} s\ 。\end{aligned}$$

如果 $f(x)$ 在横坐标的几段中非零并且在每段中保持常数，那么同样可以使用闭式积分法。如果我们设

$$f(x) = a\Pi\left(\frac{x-b}{c}\right),$$

则

$$\begin{aligned}F(s) &= \int_{b-\frac{1}{2}c}^{b+\frac{1}{2}c} a e^{-i2\pi xs}dx \\ &= a\int_{-\frac{1}{2}c}^{\frac{1}{2}c} e^{-i2\pi(u+b)s}du \\ &= a e^{-i2\pi bs}\int_{-\frac{1}{2}c}^{\frac{1}{2}c} \cos 2\pi us\,du \\ &= ac\,e^{-i2\pi bs}\operatorname{sinc} cs\ 。\end{aligned}$$

由此可得，如果

$$f(x) = \sum_n a_n \Pi\left(\frac{x-b_n}{c_n}\right),$$

那么

$$F(s) = \sum_n a_n c_n e^{-i2\pi b_n s}\operatorname{sinc} c_n s\ 。$$

用矩形函数分段构造的函数包括阶梯函数和适用于讨论摩尔斯电码、电传打印机信号、开关自动控制装置的函数。这些函数不但在工程中经常出现，而且能够以所希望的逼近程度仿真各种变化。

如果 $f(x)$ 几乎处处为零，就是一种更简单的情况；例如，$f(x)$ 是在 x 的不同点上具有不同强度的一组脉冲：

$$f(x)=\sum_n a_n\delta(x-b_n)\ ,$$

那么只有在 $x=b_n$ 这些点上 $a_n\exp(-\mathrm{i}2\pi xs)$ 的值才是有关的。根据冲激符号的筛选定理，

$$\begin{aligned}F(s)&=\int_{-\infty}^{\infty}\sum a_n\delta(x-b_n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\mathrm{d}x\\&=\int_{b_{1-}}^{b_{1+}}a_1\delta(x-b_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\mathrm{d}x+\int_{b_{2-}}^{b_{2+}}a_2\delta(x-b_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\mathrm{d}x+\cdots\\&=a_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi b_1 s}+a_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi b_2 s}+\cdots\end{aligned}$$

如果 $f(x)$ 有特殊的函数形式，也可以使用积分法，但是没有一般的规则。下面举一些简单的例子：

1. 设 $f(x)=\operatorname{sinc}x$，则

$$\begin{aligned}F(s)&=\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi x\cos2\pi xs}{\pi x}\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\sin(\pi x+2\pi xs)}{2\pi x}+\frac{\sin(\pi x-2\pi xs)}{2\pi x}\right]\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1+2s}{2}\operatorname{sinc}[(1+2s)x]+\frac{1-2s}{2}\operatorname{sinc}[(1-2s)x]\right\}\mathrm{d}x\\&=\frac{1+2s}{2\,|\,1+2s\,|}+\frac{1-2s}{2\,|\,1-2s\,|}\\&=\Pi(s)。\end{aligned}$$

上面的计算中我们使用了下面的结论：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}ax\,\mathrm{d}x=\frac{1}{|\,a\,|}$$

2. 设 $f(x)=\mathrm{e}^{-|x|}$，那么

$$\begin{aligned}F(s)&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\mathrm{d}x\\&=2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\cos2\pi xs\,\mathrm{d}x\\&=2\mathrm{Re}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi xs}\mathrm{d}x\\&=2\mathrm{Re}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{(\mathrm{i}2\pi s-1)x}\mathrm{d}x\\&=2\mathrm{Re}\,\frac{-1}{\mathrm{i}2\pi s-1}\\&=\frac{2}{4\pi^2s^2+1}\end{aligned}$$

3. 设 $f(x)=\mathrm{e}^{-\pi x^2}$，则

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\pi x^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x^2+i2xs)} dx \\
&= e^{-\pi s^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+is)^2} dx \\
&= e^{-\pi s^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+is)^2} d(x+is) \\
&= e^{-i\pi s^2} 。
\end{aligned}
$$

在这个例子中，我们用到了已知的结论：$\exp(-\pi x^2)$ 在无穷区间的积分为 1。下面是一个围线积分的例子。

4. 设 $f(x) = x^{-1}$。函数在原点处的无穷的间断性导致标准傅里叶积分发散，因此我们考虑用下面的极限：

$$\lim_{\epsilon \to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{e^{-i2\pi sx}}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty}\right) 。$$

现在考虑

$$\int_C \frac{e^{-i2\pi sz}}{z} dz,$$

其中围线 C 是 z 平面上以 R 为半径的一个半圆，圆的直径位于实轴上，在原点处有一个半径为 ϵ 的小缺口。由于围线内没有极点，因此围线积分为零。从而有

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{-i2\pi sx}}{x} dx + \int_{\pi}^{0} ie^{-i2\pi s\epsilon e^{i\theta}} d\theta + \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{-i2\pi sx}}{x} dx + \int_{0}^{\pi} ie^{-2\pi sRe^{i\theta}} d\theta = 0 。$$

当 R 趋于无穷大时，第四项的傅里叶积分化为零，而第二部分等于 $\pm i\pi$（这里的正负号取决于 s 的符号），因此我们得到

$$\lim_{\epsilon \to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{e^{-i2\pi sx}}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty}\right) + i\pi \operatorname{sgn} s = 0 ,$$

从而所求的极限意义下的傅里叶变换对是

$$\frac{1}{x} \supset -i\pi \operatorname{sgn} s$$

5. 设 $f(x) = \operatorname{sgn} x$，这和前面的例子相反，由于此函数不是绝对可积的，所以在这种情况下，标准意义下的傅里叶积分是不存在的。因此我们考虑在极限上趋近于 $\operatorname{sgn} x$ 的可做变换的函数序列。例如：当 τ 趋近于零时，序列 $\exp(-\tau \mid x \mid)\operatorname{sgn} x$ 趋于 $\operatorname{sgn} x$。可作如下变换：

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau|x|} \operatorname{sgn} x e^{-i2\pi xs} dx &= \int_{-\infty}^{0} -e^{(\tau-i2\pi s)x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(\tau+i2\pi s)x} dx \\
&= -\frac{1}{\tau - i2\pi s} + \frac{1}{\tau + i2\pi s} ,
\end{aligned}
$$

当 τ 趋近于零时，上述表达式的极限是 $1/i\pi s$。从而，我们得到了极限意义下的傅里叶变换对

$$\operatorname{sgn} x \supset \frac{1}{i\pi s} 。$$

数值傅里叶变换

如果依靠物理测量得到了一个函数的值，并且需要求它的傅里叶变换，那么存在几种可能性。首先，物理数据具有一定的取值范围，这将影响到变换的结果。我们首先从数值变换这方面着手进行讨论。

对于独立变量 x，数据将以离散的形式给出。间隔 Δx 可能会非常精确以至于不需插入中间值，但是不管怎样我们可以认为数据很少包含周期小于 $2\Delta x$ 的傅里叶分量的有效信息，因此没有必要计算频率高于 $(2\Delta x)^{-1}$ 时傅里叶变换的值。

另外，观察所得的数据是对于有限范围内的 x 给出的，我们假设范围为 $-X < x < X$。根据上面的讨论，傅里叶变换不需要对于采样间隔小于 $(2X)^{-1}$ 的 s 值进行计算。如果 $F(s)$ 中有重要的精确细节需要用小于 $(2X)^{-1}$ 的列表间隔来描述，则需要在 $x = X$ 之外取更多的 $f(x)$。

对数据分析员来说这些简单而又重要的事实可以总结为：在 $2X$ 长度的区间内以间隔 Δx 采样的函数 $f(x)$ 有 $2X/\Delta x$ 个自由度，实际上自由度的个数是相对于用于变换的数据量而言的。在第 10 章和第 14 章将详细介绍这一思想的本质。

再者，物理数据有可能出现误差。因此，在计算傅里叶变换值的时候有一个精度的约束。这个约束可以简明地用误差分量的功率谱来表达（或者，可以等效地使用误差分量的自相关函数来表达）。有时，只能得到误差的大小，而得不到它们的谱；有时大小也是未知的。虽然如此，误差的约束使我们对计算变换过程中的有效位数有所要求。

我们用 $x = n$ 处的值表示 $f(x)$，其中整数 n 介于 $-X$ 和 X 之间。在计算 $f(x)$ 的傅里叶变换之前，需要知道 $f(x)$ 在 x 的无穷区间的信息。因此，可以利用我们的物理知识对测量范围之外的函数特性作一些假设。在这种情况下，假设 $f(x)$ 在 $|x| > X$ 时为零。则下面的和式

$$\sum_{-X}^{X} f(n) e^{-i2\pi sn}$$

近似等于 $F(s)$。该和式可分解为下面的实部和虚部：

$$C = \sum_{-X}^{X} f(n)\cos 2\pi sn \text{ 和 } S = \sum_{-X}^{X} f(n)\sin 2\pi sn\text{。}$$

对于每个选定的 s 值，都要做一个 $2X+1$ 项的叠加，计算量很大。由于这个原因，利用适当 s 值的正弦和余弦表就方便多了；但它们并不是限制在一个象限内，而是不断地延伸并且会出现负值，这些和 X 的取值也有关。正如第 14 章将要讨论的，由于对称的缘故，只要计算 0 到 X 的叠加就足够了。

20 世纪 60 年代中期，Cooley 和 Tukey(1965) 对信号处理界做出了重要的贡献。如果我们将数据分成两部分，分别进行变换，再将它们合并，就会使工作量减小近一半。分得更细，则效果更佳。1942 年 C. Lanczos 就出版了有关的著作。实际上，C. F. Gauss 在 1805 年就将这一思想用于彗星数据的数值傅里叶分析，当时他写道："经验告诉我们，这种方法大量地减少了单调冗长的计算。" 因此，几年后提出了有利于进行快速傅里叶变换的"Cooley-Tukey 算法"。FFT 的常用形式是预先建立正弦和余弦表。O. Buneman 指出使用 $\sin\theta$ 和 $\tan\frac{1}{2}\theta$ 表的速度较快（见 R. N. Bracewell，1986），但是，随着处理器速度的逐年增加，算法自身的速度就显得不是那么重要了。

有关傅里叶分析以及相关的信号处理和图形表示的子程序库在书中都是可以找到的。例如,1986 年的 W. H. Press 等人的著作和后来的用不同的语言,如 BASIC,C,FORTRAN,PASCAL 等编写的带有子程序的书籍。

许多高级软件包对数值傅里叶分析提供了极大的方便。这些软件包括 Argonne 国家实验室免费提供的 LINPACK,还有诸如 MATHEMATICA,FORTRAN90,尤其是 MATLAB,它十分便于学生使用,在第 11 章中将结合数据序列的谱分析进行讨论,并附有练习。

F = fft(f);这样一条简单的 MATLAB 语句,作用于一个给定的序列$\{f\}$,不论此序列元素的个数能否进行分解,是素数还是 2 的幂,实际上都可以立即求出其复的傅里叶变换$\{F\}$。语句 **ifft** 可以执行反变换。

在 FORTRAN 中,出版了数不清的各种快速傅里叶运算法,可以在诸如 IMSL(1980) 和 NAG(1980) 的通用数学子程序包或"库"中找到。调用语句 **CALL Fourier (f,N,sign)**,它用复的变换值代替$\{f\}$中的 N 个数据。当 **sign** 为 1 和 -1 时,上述语句分别对应于快速傅里叶变换和反变换。实际上,FORTRAN 90 和 MATLAB 一样的方便。

使用 Hartly 变换(第 12 章)也可以达到数字傅里叶变换的所有目的,该变换既实现傅里叶分析也实现傅里叶综合,不需要一个分离的求逆程序,而且在输入实数时不产生复的输出。

其实,由于计算机速度大大加快,利用直接计算 C 与 S 和的慢变换的运行速度对于某些用途来说已经足够快了。它的一种用途是使学习谱分析的学生在面对难以理解的巧妙的快速算法之前能够做一些数值工作。另外一种用途是在课堂上证实图示集中的一些条目,并且通过把算法应用于这些条目中,来加深对一些定理的理解。依赖代数学或者微积分学的推导可能会引入符号错误、差一个 2 或 π 的因子,或者其它的笔误,这些错误可以用对一个数值的例子进行核对的方法来修正,这种方法比仔细地重复推导要快得多。最后,如果不理解封装程序中的晦涩的内容,那么就不能放心地使用其中的程序,因此与一个明晰的程序做比较是有益的。我们将提到一个普通的经验,那就是有些过早使用了封装的快速傅里叶变换包的学生,令他们困惑的是当对矩形函数数据进行傅里叶变换时,得不到所期望的 sinc 函数的波形或幅度。

下面的代码段很短,使用者可以用自己偏爱的语言和符号改写它们。

慢速傅里叶变换程序

令 $f(x)$ 的自变量 x 取 $-X$ 到 X 之间的整数,在未定义的部分,给 $f(x)$ 赋值为零。如果整数间隔不合适,则按要求重新标度独立变量。读取数据并存入数组 **f( )**。由于计算机语言不允许数组的下标为负数,因此建立一个用户定义的函数来保存这些数据。

由于变换的实部和虚部并不来自频率 s 的整数值,所以我们引入一个整数 k 作为序列的下标,k 与 s 成正比并从 0 到 K 变化,频率 s 为 $k/2K$。于是实部 $R(k)$ 和虚部 $I(k)$ 可由和式 $f(x)\,{\cos \atop \sin}2\pi sx$ 来计算。最后,当 $k \geqslant 0$ 时复变换由 $R(k)+\mathrm{i}I(k)$ 给出;当 k 取负值时,是复共轭 $R(k)-\mathrm{i}I(k)$。K,X 的取值必须事先声明,数组也必须事先赋值,并且所有对于变量类型的声明、数组维数的声明,以及其他用户所用语言的强制协议都必须事先给出。下面给出求 $R(k)$ 和 $I(k)$ 的程序段:

```
FOR k = 0 TO K              频率数组指针有 K + 1 个值
    s = k/(2 * K)           频率变量，最大值为 0.5
```

```
        P = 2 * PI * s
        R(k) = 0              F(s) 的实部
        I (k) = 0             F(s) 的虚部
        FOR x = - X TO X      x 从 - X 到 X 递增,步长为 1
            R(k) = R(k) + f(x) * COS(P * x)
            I (k) = I (k) + f(x) * SIN(P * x)
        NEXT x
    NEXT k
```

对于许多波形来说,波的形状并不依赖于选取哪个时刻作为起始时刻,所以对波形原点的选取并不重要。而由于实部和虚部都很大程度上受用户对原点选择的影响,所以对这两者也通常不作明确的要求。事实上,R 和 I 仅仅是为了获得功率谱 R^2+I^2,它是波形本身的内在性质。作为频率函数的相位谱 $\arctan(I/R)$ 比 R 和 I 本身更有用;原点的选取不影响相位,只是相对于频率做了一个简单的线性移动。

数据取单位间隔时,可以表示的最小周期是 2;因此,从数据中可以获得的最高频率是 $s_{\max}=0.5$。最长周期为数据的整个区间,即 $2X$;相应的最低频率为 $s_{\min}=\frac{1}{2}X$,也等于 Δs。

当取 $K=X$ 时,可以得到 $X+1$ 个 R 值和 X 个 I 值(不包括零值的 $I(0)$),其个数加起来正好与由 $2X+1$ 个原始数据值确定的独立常量的个数相同。在 $0\leqslant s\leqslant 0.5$ 区间内,间隔 $\Delta s_{\text{crit}}=\frac{1}{2}K$ 所产生的 R 和 X 的值的个数对恢复原始数据来说既是必要的又是充分的,称 Δs_{crit} 为临界间隔。当取 $K=4X$ 时,间隔 Δs 将减小为临界间隔的四分之一;当不包含额外的信息时,为计算 $F(s)$ 引入的额外插入值将使傅里叶变换的谱图与原来的图有很大的不同,这是因为每点之间的间隔更紧凑了。相反地,令 k 从 0 到 $X/2$ 变化,将会使 Δs 拉大为临界间隔的 1 倍,当调试程序或关心 $F(s)$ 的微小细节时这种方法非常有用。

当 K 取 $12X$ 时,我们令 k 从 $5X$ 到 $7X$ 变化,这样我们就选择了一个以 $s=0.25$ 为中心,$\Delta s=1/24X$ 的频带,这个我们所关注的窄频带将会使分辨率提高 12 倍。用户编写的程序具有标准的快速算法所没有的灵活性。

最后,为了检查变换对的总误差,我们可以用 $R(0)$ 是否等于数据值的和以及 $I(0)$ 是否等于 0 的方法来验证。在不计算 R 和 I 的负数频率时,与标准的快速傅里叶变换相比较,我们可以节约大约一半的时间。Hartly 变换也有这样的特点。

例:输入数据

$$\{\frac{1}{2}\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \frac{1}{2}\}$$

表示 $f(x)=\Pi(x/12)$ 的采样值,已知它的变换为 $12\operatorname{sinc}12s$。数据的个数为 13,$X=6$。选择 $K=2X=12$,将得到半临界间隔处的变换值。程序将给出:

$R(k)=\{12\quad 7.596\quad 0\quad -2.414\quad 0\quad 1.303\quad -.767\quad 0\quad .414\quad 0\quad -.132\quad 0\}$

由于 $f(x)$ 是偶函数,所有的 $I(k)$ 都为 0。正如我们前面所说的,$R(0)$ 等于所有数据值的和;用已知的变换验证剩余的数值,可以看出 $R(1)$ 比 $12\operatorname{sinc}0.5$ 大 0.56%。

例:选择 $K=24$,并且保持 $X=6$ 时的数据不变,将得到:

$R(k)=\{$**12**$\quad 10.788\quad$ **7.596** $\quad 3.555\quad$ **0…0** $\quad -.141\quad$ **−.132** $\quad -.046\quad$ **0**$\}$

粗体字的值是上个例子中频率 s 对应的值，新插入的频率使图形变得更加光滑。此时频率间隔 Δs 是临界间隔的四分之一。

例：将 X 变为12，并且在原来的每个数据前后插入0，将数据变为25个，K 仍然取24。可以看出，在插入零后，变换的值没有改变。

例：X 仍取12，把数据扩充到25个值，第一个和最后一个值为 $\frac{1}{2}$，中间是23个1，K 仍取24。结果为

$R(k)=2\times\{12 \quad 7.629 \quad 0 \quad -2.514 \quad 0 \quad 1.473 \quad 0 \quad -1.014 \quad 0 \quad .749 \quad 0 \quad -.570 \quad 0 \quad .439 \quad 0 \quad -.334 \quad 0\}$

可以看出用两倍的点来表示 $\Pi(x)$ 就把 $R(1)$ 与 24sinc0.5 之间的差异减小到了 0.14%，改善了四倍。还可以验证，随着 k 的增加，绝对误差没有减小。

例：回到第一个例子，即 $K=12, X=6$，将代码的第一行改为 **For k = 0 To 2 * K**，计算 s 大于0.5的 $R(k)$ 值。当 k 增加到 $2K$ 时，s 增加到1.0，R 与 $s=0$ 时有相同的值。这个练习说明了 R 和 $12\mathrm{sinc}12s$ 之间的差异主要是由于 $12\mathrm{sinc}[12(s-1)]$ 的重叠而引起的，一般来说 R 的实际值是 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}12\mathrm{sinc}[12(s-n)]$。这可以帮助我们理解上一例子中所说明的误差的改善，并且说明了如何通过增加数据密度的方法来提高精度。

用定理生成变换

如果我们能够找到一些允许定理简单化使用的特性，那么有很多种函数，特别是在理论工作中出现的函数，就可以进行变换。例如，考虑一个连续分段线性函数(ploygonal function)，如图7.1所示。如果我们认识到这个函数可以表示为一个三角窗函数和一系列冲激函数的卷积，那么我们就可以用前面所述的方法处理冲激，把冲激函数的傅里叶变换和三角窗函数的傅里叶变换相乘。于是，

$$\Lambda(x) * \sum_n A_n\delta(x-a_n) \supset \mathrm{sinc}^2 s\sum_n A_n e^{-i2\pi a_n s}。$$

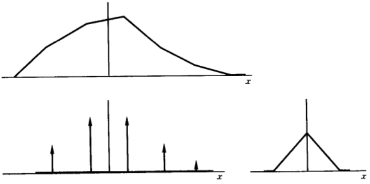


图7.1 一个连续分段线性函数(上)可以看作一组冲激和一个三角窗函数(下)的卷积

作为一个例子，取梯形脉冲 $\Lambda(x)*\Pi(x)$，显然，

$$\Lambda(x)*\Pi(x)\supset \mathrm{sinc}^2\cos\pi s\ 。$$

实际上，卷积定理经常被用来推导傅里叶变换。应用卷积定理和其它定理的一些例子将在本章的习题中给出。

对分段函数应用微分定理

微分定理有一个特殊应用，它被广泛地用于开关波形。考虑如图 7.2a 所示的一个分段的线性函数，它的一阶导数如图 7.2b 所示，包含一个冲激。由于冲激函数的变换是已知的，我们去掉这个冲激，再求一次微分（见图 7.2c）。这时只剩下一系列的冲激 $\sum C_n\delta(x-c_n)$。如果一阶导数包含一系列冲激 $\sum B_n\delta(x-b_n)$，而不是例子中那样只有一个冲激，或者如果原来的函数 $f(x)$ 中包含冲激 $\sum A_n\delta(x-a_n)$，那么显然变换 $F(s)$ 为：

$$(\mathrm{i}2\pi s)^2F(s)=(\mathrm{i}2\pi s)^2\sum A_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi a_n s}+\mathrm{i}2\pi s\sum B_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi b_n s}+\sum C_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi c_n s}\ 。$$

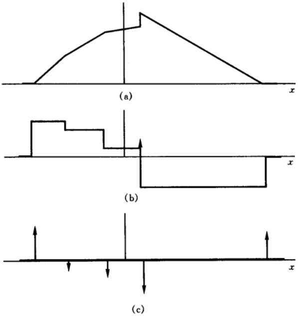


图 7.2 通过连续微分把连续分段函数变为冲激的技术

这种方法也可以扩展到由多项式分段组成的函数，在这种情况下，就需要进行进一步的微分。举个简单的例子，考虑抛物线脉冲 $(1-x^2)\Pi(x/2)$，这里

$$(1-x^2)\Pi(\frac{x}{2})\supset F(s)。$$

进行两次微分，我们可以得到

$$-2x\prod(\frac{x}{2}) \supset \mathrm{i}2\pi sF(s)$$

$$2\delta(x+1)-2\prod(\frac{x}{2})+2\delta(x-1) \supset (\mathrm{i}2\pi s)^2F(s) \text{。}$$

现在等式左边的变换是已知，即 $4\cos2\pi s-4\mathrm{sinc}2s$。因此，所求的变换 $F(s)$ 为

$$F(s)=\frac{4\cos2\pi s-4\mathrm{sinc}2s}{(\mathrm{i}2\pi s)^2}+K_1\delta(s)+K_2\delta'(s) \text{。}$$

这里的 K_1 和 K_2 是积分常量，这是因为给初始的抛物线脉冲加上一个常量 K_1 并不影响它的一阶微分，同样，二阶微分也是如此。对给定脉冲的积分表明目前没有叠加常量(零阶项）或线性项(一阶项)，所以本例中 $K_1=K_2=0$ 并且有

$$F(s)=-\frac{\cos2\pi s}{\pi^2s^2}+\frac{\sin2\pi s}{2\pi^3s^2} \text{。}$$

谱的测量

从数学角度来看，谱可以由代数表达的波形或离散的数据来数学地确定，艾萨克·牛顿(Isaac Newton)在1704年发表的“光学”中最早对此作了解释。谱是由棱镜和其它光学仪器，特别是衍射光栅和 Fabry-Perot 干涉仪产生的。

下面的小节讨论了两种以物理形式存在的信号确定谱的特例。

无线电频率谱分析 无线通信、雷达、电视、实验仪器都利用频谱分析仪来显示信号强度，它是频率的函数。当旋转一个无线电接收机的调谐旋钮时，该接收机就可以作为一个简单的频谱分析仪来使用；想象这样的一个商用设备，它机械地改变一个调谐回路的电容并且将其响应显示在阴极射线管上，阴极射线管上的点与调谐电容的变化同步水平移动。这样的一个仪器，即使用压控电容代替机械调谐电容，也只有有限的带宽。随着时间的流逝，各种高级技术应用于数字示波器，使得其频带覆盖了从直流到毫米波的范围。这种仪器用传统电路对被测波形进行采样，用计算机进行快速的谱分析，并可以显示和储存谱和其他数字信号处理中需要的结果。到1990年，基于 hartley 变换的全可编程仪器的分辨率已经达到皮秒级(10^{-12})，并已商用。

另一种可供选择的方法是使用一组用计算机实现的定频滤波器，保证在20MHz频带上可以获得和1Hz同样好的分辨率。SETI学会搜索来自非太阳系行星的无线信号就证明了这一点。

光学傅里叶变换光谱学 在光学波长范围内，谱分析要用大量的并行模拟装置，即三棱镜和衍射光栅来实现。但还有另一种方法，这种方法并没有沿着电路的习惯发展，它可以通过分子的红外谱检测和辨识分子，所以尤其重要。如果我们可以确定一个电磁信号 $s(t)$ 的时间自相关，那么通过傅里叶变换，我们就可以得到信号的功率谱。这个方法的具体做法就是将信号分解为两个部分然后得到二者的积 $s(t)s(t+\tau)$，其中 τ 是一个可变的时延。通过把聚酯薄膜胶片旋转45度就可以高效率地实现光的分解。其中一束光仍沿着入射方向，功率是入射功率的一半；另一束光沿一适当的方向反射。在两束光重新合成并且通过检测器之前，对其中的一束光插入相对时延 τ，经过延迟的光通过一个平面镜反射后回到原来的路径上。若此时移开平面

镜，将产生更大的时间延迟。对最大时延 τ_{max}，可以达到 $\frac{1}{2}\tau_{max}$ 的谱分辨率带宽。覆盖的总带宽将扩展到高频 $\frac{1}{2}\Delta\tau$，其中 $\Delta\tau$ 为移动平面镜时在每个 τ 处的停留时间。如果分析要进行得很快，比如要研究动态的化学反应时，平面镜就可以连续地移动，甚至可用来分析高速和爆炸性的化学反应。在这种情况下，$\Delta\tau$ 是最终的被检测输出信号的一个积分区间内 τ 的变化。对瞬时分析所需的最高的机械速度和重复率，不能依靠上面的线性运动。取而代之，镜子的位置可以通过对光的干涉条纹，或者莫里埃条纹的计算来获得，这个计数可用来使检测器的输出同步于移动镜子的位置。

实际上只计算正的时延就足够了，因为自相关函数是偶对称的，$s(t)s(t+\tau)$ 时间平均等于 $s(t)s(t-\tau)$ 的时间平均。然而，如果当 τ 从正到负变化时，自相关图的原点就会由于少许的不平衡而变得明显。这是一个实际的点，但是也支持仪器的不同功能。

如果我们不用入射射线的谱，而是用一个已知的谱，比如一个黑体放射物，那么把一个透明的样本放在一束光里，并且记录得到的互相关图。这个函数不是偶函数，它的傅里叶变换是复的，从它的傅里叶变换中我们可以发现所有谱范围上的样本的某些性质，如介电常数和电导率，折射指数和吸收系数等。这样，获得的结果比简单的吸收谱更加丰富。给定一个不透明的物体，我们可以用它当作移动的镜子，来测量复的反射系数，以及包括电导率、介电常数和穿透深度等电磁特性（贝尔，1972）。

虽然用于谱分析的仪器是在电气工程领域外的应用中发明和发展起来的，但是通过工程师们的改造，它们现在也广泛地应用于医学诊断、医学治疗、时钟，以及航海设备中，这些都例证了 Lord Kelvin 对傅里叶定理所说的话。

参考书目

Bell, R. J.: "Introduction to Fourier Transform Spectroscopy," Academic Press, New York, 1972.

Bracewell, R. N.: "The Hartley Transform," Oxford University Press, New York, 1986.

Cooley, J. W., and J. W. Tukey: "An Algorithm for the Machine Caculation of Complex Series," *Math. of Comput.*, vol. 19, pp. 297-301, 1965.

IMSL: "IMSL Library Reference Manual," IMSL Inc., Houston, Texas, 1980.

NAG: " NAG Fortran Library Manual Mark 8," NAG Central Office, Oxford, England, 1980.

Press, W. H., B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling: "Numerical Recipes, the Art of Scientific Programming," Cambridge University Press, Cambridge, U. K., 1990. See also successor volumes devoted to programs and example in BASIC, C, FORTRAN 77, FORTRAN 90, and PASCAL.

习题

1. 验证二阶矩 关系式 $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = -F''(0)/4\pi^2$ 是否可以作为对 $f(x)$ 的傅里叶变换实部 $R(k)$ 进行数值验证的基础（$f(x)$ 在 $-X$ 到 X 区间上以 x 的单位间隔进行采样）。计算出的二阶矩 $\sum_{-X}^{X} x^2 f(x)$ 应与 $R(k)$ 的什么性质一致？

2. $\cos\pi x^2$ 的变换 计算$\int_{-\infty}^{\infty}\cos\pi x^2\cos 2\pi sx\,dx$ 以证明 $\cos\pi x^2$ 的傅里叶变换是 $F(s) = 2^{-1/2}(\cos\pi s^2 + \sin\pi s^2)$。在计算积分之前，思考如何进行数值检验以避免由于省略系数$\sqrt{2}$ 或$\sqrt{\pi}$ 带来的总误差。

3. $\exp i\pi x^2$ 的变换 证明：

$$e^{i\pi x^2} \supset \sqrt{i}e^{-i\pi s^2}。$$

4. 更对称的变换 证明：

$$e^{i\pi(x^2-\frac{1}{8})} \supset e^{-i\pi(s^2-\frac{1}{8})}$$

5. 非对称函数 x 的函数 $\Lambda(x/16)+\Lambda(x/8+1)$ 仅在 $-16<x<16$ 内非零，而且既不是奇函数也不是偶函数。

(a) 证明它的精确傅里叶变换为：

$$F(s) = 16\text{sinc}^2 16s + 8\text{sinc}^2 8s\exp(i2\pi 8s)。$$

(b) 列出当 $x=-16,-15,\cdots,16$ 时的 33 个 $f(x)$ 的值，并将这些值代入慢速傅里叶变换的程序中，计算当 $0\leqslant s\leqslant 0.5,\Delta s=1/64$ 时变换的实部和虚部，间隔是 FFT 所产生的临界间隔的一半。

(c) 讨论结果与精确 $F(s)$ 的实部和虚部的一致性。

6. 非对称函数 一个确定的函数 $f(i)$ 在 $i=-4\sim 4$ 时其值为{1 2 3 4 5 6 7 8 9}。使用慢速傅里叶变换，求当 s 从 $0\sim 0.5$ 以 $\Delta s=1/8$ 为间隔的值，并且将结果与 $g(x)=x\Pi[(x-5)/9]$ 的变换相比较。

7. 中心极限定理 随着 N 的增大，对 $s\ll 1$，乘积

$$(1-s^2)(1-s^2/4)(1-s^2/9)\cdots(1-s^2/N^2)$$

是否趋于高斯形式？

8. 每周求和一次 某些事件的出现依赖于一周的七天日，或者与其有关。涉及偶然的例子有很多种，诸如急救室的准入，大气的清洁度和噪声污染。把这些事件的数目加起来作为一周七天的函数，这样就对研究提供一个统计工具。给定一组数据 $g_j, j=0\sim 6$，它是对整个一周的数据的累加，一个调查者考虑用傅里叶分析。因为恰好有 7 个值，所以通过表达方式的这种变化应产生不超过 7 个的独立数字 $F(k)$(k 从 0 到 6)。从星期天到星期六，在 $g_j=\{5\ 4\ 9\ 8\ 7\ 6\ 10\}$ 这样一组数据的情况下，F_k 的七个数字是什么？

9. 正弦变换 求 $f(x)=\Lambda(x/a-1)$ 的正弦变换。

10. 余弦变换 求 $f(x)=\Lambda(x/a-1)$ 的余弦变换。

第 8 章

两个域

我们可以在两个域上研究函数和它们的变换形式，有时我们把这两个域称为上域和下域，好像函数本身是在地面上，而其变换形式是在地下(Doetsch，1943)。把原函数和它在另一个域中对应的函数(它是原函数经过傅里叶变换后得到的一种惟一映像）放在一起研究是很合理的，当原函数改变时，另一个域中对应的函数也随之改变。因此，用图形把函数及其对应的傅里叶变换一起表示出来，会带来一定的方便。在本章给出的图表中，统一约定函数在左边，其对应的傅里叶变换在右边。

前面给出的定理可以看作是同时在函数域和变换域上进行相应操作的一系列操作对。例如，在函数域压缩横轴，对应着变换域中扩展横轴和压缩纵轴；函数域中函数的平移引起变换域中某种形式的扭曲；函数域中的卷积对应变换域中的乘积。

把这些理论用于日常问题，我们就能随意地在这两个域之间变换，并且在最方便的域中进行所需要的操作。在我们讨论问题达到一定结论时，可能会发现所在的域不对，这结论是对于我们感兴趣的函数变换的一种表述。

因此，现在我们来考虑一些相应的性质对应关系，一个函数与 x 轴所包围的面积和其傅里叶变换的中心幅度就是这样的一对。假设我们感兴趣的是函数与 x 轴所包围的面积，但是我们只知道该函数的傅里叶变换。可以证明，我们所求的结果就等于该变换的中心幅度。因此，我们就不需要对已知的变换求反变换，再对函数积分来求面积。

很多情况下，我们所需要知道的是一个函数的特殊性质。因此，这里所汇总的相应的性质对应关系就起到了非常重要的作用，它使我们可以绕过变换的细节而直接得到答案。

定积分

一个函数在$(-\infty,+\infty)$区间上的定积分等于其傅里叶变换在原点处的值，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(0) 。$$

推导如下：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\mathrm{d}x\bigg|_{s=0} = F(0) \ 。$$

我们通常称这个积分就是函数与 x 轴所包围的面积，如图 8.1 中阴影的面积。术语"中心幅度"是指函数在横轴原点处的值，图中用粗线表示。

由傅里叶变换的对称性可知，函数的变换形式所包围的面积等于 $f(0)$。从这些简单的对应性质，可以推导出很多有趣的结论。例如，任何对 $f(x)$ 的操作，只要保持它的面积不变，如沿着 x 轴的平移，则其变换的中心幅度不变。对于平移这种情况，此结论可以用移位定理验证，因为：

$$\overline{f(x-a)}\bigg|_0 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi as}F(s)\ |_0 = F(0) \ 。$$

一个更深奥的例子是，将给定函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处分为相等的两部分，并平移分开距离为 $2a$，表示为 $f(x-a)H(x-a)+f(x+a)H(-x-a)$，则由于函数与 x 轴所包围的面积不变，其变换的中心幅度也不变；另一方面，由于该函数的中心幅度为 0，则其变换所包围的面积必然为 0。这两个例子充分说明了利用函数及其变换的对应性质可以给研究问题带来很大的方便。

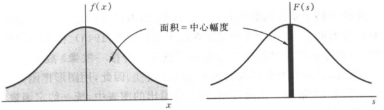


图 8.1　函数所包围的面积等于其傅里叶变换的中心幅度

练习　如果 $f(x)$ 是一个矩形函数，则前面讲到的分离操作将会产生一对矩形脉冲。使用调制理论求解傅里叶变换的完整形式，并验证一个脉冲对的频谱在无穷区间的积分为 0。

练习　你能指出摩尔斯码信号的谱有什么与众不同的性质？

表 8.1 中列举了一些特殊的情况，右边表示的是左边函数与 x 轴包围的面积。

表 8.1　一些函数及它们的面积

$f(x)$	$F(0)$	$f(x)$	$F(0)$
$\Pi(x)$	1	$\cos x$	0
$\operatorname{sinc} x$	1	$\mathrm{I_I}(x)$	0
$\Lambda(x)$	1	$\sin x$	0
$\operatorname{sinc}^2 x$	1	$\mathrm{III}(x)$	∞
$\mathrm{e}^{-\pi x^2}$	1	$\delta(x)$	1
$J_0(x)$	1	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$	0
$\dfrac{J_1(x)}{x}$	1	$H(x)$	∞
$\mathrm{II}(x)$	1	$\operatorname{sgn} x$	0

练习 $\cos x$ 与 $\sin x$ 的无穷积分是振荡的，但是它们的傅里叶变换的中心幅度有确定值 0。然而，这里的傅里叶变换是极限意义下的变换。定积分与中心幅度的联系用于极限意义下的变换时，必须对正弦（或余弦）曲线的积分有一些约定的规则。研究这一问题。提示：应用卷积和移位定理，考察函数 $\cos x \prod(x/M)$ 和 $\cos x \prod[(x-\frac{1}{4}\pi)/M]$ 在 $M \to \infty$ 时的变换。

练习 考虑表中的函数 $H(x)$ 和 $\mathrm{sgn}x$ 的面积取值。

一阶矩

类似于直线上的质量分布，$f(x)$ 的一阶原点矩定义为：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x\ 。$$

下面的定理将函数的一阶原点矩和它的变换的中心斜率联系起来。

如果 $f(x)$ 的傅里叶变换为 $F(s)$，则 $f(x)$ 的一阶矩等于 $F(s)$ 在 $s=0$ 处的斜率的 $-(2\pi\mathrm{i})^{-1}$ 倍，即：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \frac{F'(0)}{-2\pi\mathrm{i}}\ 。$$

推导：由微分定理，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -(2\pi\mathrm{i}x)f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\mathrm{d}x = F'(s)\ ,$$

因此，

$$-2\pi\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = F'(0)\ 。$$

图 8.2 所示为脉冲对 $-\mathrm{I_I}(x)$ 及其傅里叶变换 $-\mathrm{i}\sin\pi s$。每个冲激的矩为 $+\frac{1}{4}$，因此总的一阶原点矩为$\frac{1}{2}$。这样，

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{I_I}(x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\frac{1}{2}\delta(x+\frac{1}{2})\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} x\,\frac{1}{2}\delta(x-\frac{1}{2})\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ 。$$

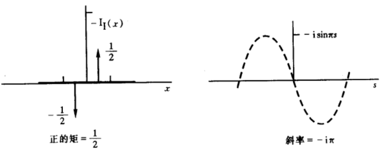


图 8.2 函数的矩正比于其傅里叶变换的中心斜率

因此， $$F'(0)=(-2\pi i)\frac{1}{2}=-i\pi\text{。}$$

图 8.3 所示为一个截断的指数函数和它的傅里叶变换。其傅里叶变换的实部在原点处的导数为零，因此“原点处的斜率”由虚部的导数单独给定，为 $-i\tan\theta$。指数函数的一阶原点矩为 $(\tan\theta)/2\pi$，是一个正实数。

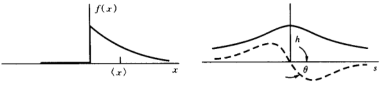


图 8.3 重心的横坐标等于 $(\tan\theta)/2\pi h$

作为一个特例，我们考虑一个一阶矩为 0 的函数，它的傅里叶变换在原点处的斜率为零。反过来说，如果一个函数在原点处的斜率为 0，则它的傅里叶变换的一阶矩为 0。进一步，如果一个函数在原点处的值不为 0，但斜率为 0，那么它的变换的重心在原点处。

练习 讨论 a 从 0 趋于 ∞ 时，函数 $\Pi(x-a)$ 的一阶原点矩和它的傅里叶变换的重心。

练习 函数 $(x-z)\Pi(x-z)$ 在原点处的取值为 0，斜率为 0，且与 x 轴包围的面积也为 0，它的傅里叶变换有什么性质？

练习 $f(x)$ 满足什么条件时，$F(s)$ 在 $s=0$ 处的导数是纯虚的？

质心

$f(x)$ 的质心是一个横坐标为 $\langle x\rangle$ 的点，使得函数 $f(x)$ 与 x 轴所包围面积乘以 $\langle x\rangle$ 的积等于其一阶原点矩。这样，

$$\langle x\rangle=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x}\text{。}$$

粗略地讲，$\langle x\rangle$ 告诉我们函数 $f(x)$ 主要集中在哪个点上，或当一个脉冲信号被表示为时间的函数时，$\langle t\rangle$ 表示了该脉冲信号（发生）的时刻。在静力学中，$\langle x\rangle$ 是一根质量分布密度为 $f(x)$ 的杆的重心的横坐标。后面我们会发现，当 $f(x)$ 可能为负值时，函数 $[f(x)]^2$ 的质心更适合于用来度量坐标或时刻。在最坏的情况下，若 $f(x)$ 与 x 轴所包围的面积为 0，则 $\langle x\rangle$ 为无穷。

既然 $\langle x\rangle$ 是一阶矩与 $f(x)$ 和 x 轴所包围面积的比值，从前面的章节中，我们立即可以得到 $\langle x\rangle$ 与 $F(s)$ 的关系为：

$$\langle x\rangle=-\frac{F'(0)}{2i\pi F(0)}\text{。}$$

也就是说，函数质心的横坐标可以由其傅里叶变换在原点处的斜率与中心幅度的比值给出，比例系数为 $-(2i\pi)^{-1}$。

在图 8.2 用来解释一阶矩的例子中，函数 $f(x)$ 与 x 轴所包围的面积为 0，所以重心的概念就没有意义。我们从力学上给出类似的解释，如果 $\mathrm{I}_{\mathrm{I}}(x)$ 表示作用在杠杆上的力的分布，则无法找到一个平衡点，以便用一个力来平衡原来的分布。

图 8.3 中，$f(x)$ 的重心落在 x 的一个有限正值处。因为 $F(s)$ 是 hermitian，它在原点处的导数为纯虚数，等于 $\mathrm{i}\tan\theta$；中心幅度 h 由 $F(s)$ 的实部的值单独给出，因此

$$\langle x\rangle=\frac{\tan\theta}{2\pi h}\text{。}$$

惯性矩(二阶原点矩)

函数 $f(x)$ 的惯性矩或二阶原点矩的定义为：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x\text{。}$$

我们发现，一个函数的二阶原点矩越大，其傅里叶变换在原点处的曲率就越大(图 8.4)。由于二阶矩中有因子 x^2，可以清楚地看到，函数的二阶矩对于函数在 x 取值较大时的特性更为敏感。因此，$f(x)$ 在 x 较大处的特性可以由傅里叶变换在原点处的特性反映出来。这个结论对于一阶矩的理论也是适用的。

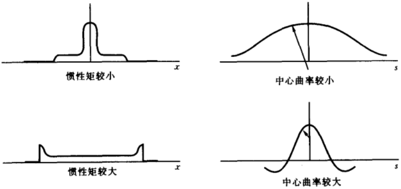


图 8.4　惯性矩与傅里叶变换的中心曲率成正比

函数 $f(x)$ 的惯性矩等于其傅里叶变换在原点处的曲率乘以 $-(4\pi^2)^{-1}$，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{4\pi^2}F''(0)\text{。}$$

推导：由微分定理，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(-\mathrm{i}2\pi x)^2f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\mathrm{d}x=F''(s)\text{。}$$

因此，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{4\pi^2}F''(0)\text{。}$$

图 8.5 所示是一种常见的特殊情况，即：函数的二阶矩是无穷，其傅里叶变换的中心曲率也是无穷，也就是说，傅里叶变换的斜率在原点处有突变。

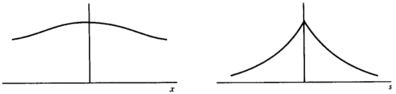


图 8.5　二阶矩无限的函数其傅里叶变换在原点处的斜率不连续

矩

假设 n 阶矩存在，$f(x)$ 的 n 阶矩等于 $F(s)$ 在原点处的 n 阶导数乘以 $(-2i\pi)^{-n}$，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\mathrm{d}x = \frac{F^{(n)}(0)}{(-2i\pi)^n}。$$

如果 $f(x)$ 在 $|x|$ 较大时，其性态与 $|x|^{-m}$ 相同，其中 m 大于 0，则只有前 $[m]$ 阶矩存在，并且 $F(s)$ 在 $s=0$ 处只有前 $[m]$ 阶导数存在；在 $s=0$ 处将会有 $[m+1]$ 阶的间断点。（函数 $[m]$ 表示小于 m 的最大的整数）

例如，m 是正整数 M，$f(x)$ 与 x^{-M} 的衰减速度相同，则 M 阶矩为无穷且 $F(s)$ 的第 M 阶导数含有冲激。反过来说，如果 $f(x)$ 的第 M 阶导数是冲激，则其傅里叶变换 $F(s)$ 的衰减速度与 s^{-M} 一样。

均方横坐标

我们用 $\langle x^2\rangle$ 表示均方横坐标，它是 x^2 根据 $f(x)$ 的分布的加权平均值，即

$$\langle x^2\rangle \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x 。$$

由前面已知的结论，我们得到

$$\langle x^2\rangle = -\frac{F''(0)}{4\pi^2 F(0)} 。$$

在动力学中，一根质量分布密度为 $f(x)$ 的杆的回转半径的平方就是 $\langle x^2\rangle$。在统计学中，对于一个概率分布函数 $f(x)$ 来说，$\langle x^2\rangle$ 是一个重要的概念（与函数 $f(x)$ 的方差一样），了解它和它的傅里叶变换（"特征函数"）的关系非常有用。在卷积运算中，均方横坐标具有可加性。

如果 f（或者 g）的质心在原点处，则 $f*g$ 的均方横坐标等于 f 与 g 的均方横坐标的和。

在某种意义上，我们知道 $f*g$ 能够比它的任一个卷积分量（f 或者 g）更宽，这个定理就是卷积的扩散效应或平滑效应的定量描述。

推导：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(f*g)\mathrm{d}x = \overline{x^2(f*g)}\Big|_0 = -(4\pi^2)^{-1}\,\overline{(f*g)''}\Big|_0$$
$$= -(4\pi^2)^{-1}(FG)''\Big|_0$$

$$= -(4\pi^2)^{-1}[F''G + 2F'G' + FG'']\Big|_0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(f * g)\mathrm{d}x = FG\,|_0$$

$$\langle x^2\rangle_{f*g} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(f*g)\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{+\infty}(f*g)\mathrm{d}x} = -(4\pi^2)^{-1}\left[\frac{F''}{F} + 2\,\frac{F'G'}{FG} + \frac{G''}{G}\right]\Big|_0$$

$$= \langle x^2\rangle_f + \langle x^2\rangle_g + 2\,\frac{F'(0)}{2\pi \mathrm{i} F(0)}\,\frac{G'(0)}{2\pi \mathrm{i} G(0)}\,。$$

等式右边的最后一项，是 f 和 g 的质心的横坐标乘积的两倍，如果 f 或者 g 的质心在原点，则这一部分为 0。

令 $g(x) = \delta(x-a)$，则 $\langle x^2\rangle_g = a^2$，我们得到的结论类似于一个轴线不通过重心的物体的惯性矩时的情形。如果 $f(x)$ 的质心位于原点，则

$$\langle x^2\rangle_{f(x-a)} = \langle x^2\rangle_f + a^2\,。$$

还有其它衡量 x^2 均值的方法，例如，如果 $f(x)$ 有部分取值为负，则这些为负值的部分会使方差减小，但是我们可能感兴趣是衡量 $f(x)$ 的散布而不考虑它的符号。在这种情况下，需要考察的两个量为

$$\langle x^2\rangle_{|f|} \quad 和 \quad \langle x^2\rangle_{|f|^2}\,。$$

回转半径

回转半径表示 x 的均方根，即均方横坐标的平方根，它的方便之处在于：它与 x 有同样的量纲。一些性质，比如它们的傅里叶变换中心曲率、可加性以及坐标平移后的回转半径之间的关系，通常用均方横坐标表达比使用其平方根更为方便。

方差

方差 σ^2 是由相对于质心的均方差，表示为：

$$\sigma^2 = \langle(x - \langle x\rangle)^2\rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\langle x\rangle)^2 f(x)\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x}$$

$$= -\frac{F''(0)}{4\pi^2 F(0)} + \frac{[F'(0)]^2}{4\pi^2[F(0)]^2}\,。$$

对于 $\langle x^2\rangle$ 的讨论同样可以适用于方差，因为我们可以选择横坐标的原点使得 $\langle x\rangle$ 为 0，这就意味着此时 $\langle x^2\rangle$ 与方差完全相同。所以，有时也把 $\langle x^2\rangle$ 称为方差。

$f * g$ 的方差等于 f 与 g 的方差的和。

证明方法与前面均方横坐标中的结论相似。

平滑性与积聚性

我们用一个函数的所有连续导数的最高阶数来衡量该函数的光滑程度。一个函数越光滑，

它的傅里叶变换就越积聚，也就是说，傅里叶变换随着 s 的增大衰减越快。

如果一个函数和它的 $n-1$ 阶导数都连续，则它的傅里叶变换在 s 较大时，其衰减速度至少和 $|s|^{-(n+1)}$ 一样快，即

$$\lim_{|s|\to\infty} |s|^n F(s) = 0 。$$

用 Landau 符号表示方法，该式为 $F(s) = O(|s|^{-n})$。在这个定理的证明过程中，前 $n-1$ 阶导数的傅里叶变换存在，并且有必要指出的是，定理的严格表述应为：前 n 阶导函数都应是绝对可积的。

图 8.6 中举例说明了几种常见的情况。一个大家所熟知的事实是：$\mathrm{sinc}^2 x$ 比 $\mathrm{sinc}x$ 衰减得更快，这是因为 $\mathrm{sinc}^2 x$ 的傅里叶变换更加平滑的缘故。我们可以说，一个斜率不连续（"拐角"）即二阶导数含有冲激的函数，其傅里叶变换的衰减速度与 $|s|^{-2}$ 一样。一般情况下，我们可以说，如果函数第 k 阶导数含有冲激，则它的变换在无穷远的性态和 $|s|^{-k}$ 相同。这样简化了陈述，不像我们在上面给出的那样，在同一个句子中包含了 $n-1$，n 和 $n+1$。

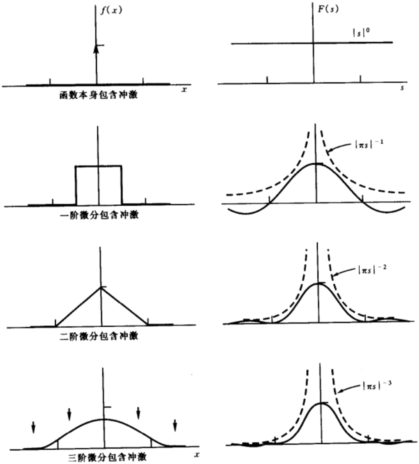


图 8.6　如果一个函数 k 次微分后出现冲激，则其傅里叶变换在无穷远处的特性与 $|s|^{-k}$ 一样

注意到函数 $\exp(-\pi x^2)$ 是连续的，并且它的任意阶导数都连续，因此该函数在目前的意义上是极其光滑的。这一特性并非 $\exp(-\pi x^2)$ 所独有，其它很多变换对都有类似的性质(例如，自互易对 $\operatorname{sech}\pi x$，$\operatorname{sech}\pi s$)。

为了证明上述结论，假设 $f(x)$ 具有绝对可积的导数(当然，$f(x)$ 本身是绝对可积和可微的)。因为 $f'(x)$ 绝对可积，则

$$g(x)=\int_{-\infty}^{x}f'(\xi)\mathrm{d}\xi$$

存在，并且 $g'(x)=f'(x)$，

$$f(x)=g(x)+c\text{ 。}$$

当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to 0$。如果 c 不等于 0，则 $f(x)$ 就不是绝对可积的。因此，$g(x)=f(x)$，由此，当 $x\to-\infty$ 时，我们也有 $f(x)\to 0$。

现在，设

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f'(\xi)\mathrm{d}\xi=c_1$$

那么

$$f(x)=\int_{-\infty}^{x}f'(\xi)\mathrm{d}\xi=c_1-\int_{x}^{+\infty}f'(\xi)\mathrm{d}\xi\text{。}$$

因此，$c_1=0$ 并且当 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to 0$。

$$F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi sx}\mathrm{d}x=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi sx}\mathrm{d}x}{\mathrm{i}2\pi s}$$

在推导中使用分部积分，并注意到当 $x\to\pm\infty$ 时，$f(x)\to 0$。

于是我们得到，

$$\text{当 } s\to\pm\infty \text{ 时}, sF(s)\to 0,$$
$$sF(s)=O(|s|^{-1})\quad\text{或者}\quad F(s)=O(|s|^{-2})\text{ 。}$$

继续上面的讨论，如果 $f(x)$ 的 n 阶导函数绝对可积，我们有 $F(s)=O(|s|^{-n})$。

卷积的平滑

从数值计算的经验中我们知道，卷积具有加宽和平滑的效果。在一些物理应用中，我们也期望有同样的效果，例如扫描影片中的音轨，卷积就描述了这一物理现象。对于加宽这个总体概念已经有了一种精确的定义方法，就是我们所知道的标准差 σ_f，它可以用来衡量函数 $f(x)$ 的散布。根据下面的结论，与 $g(x)$ 卷积后函数标准差增大。这个结论是：

$$\sigma_{f*g}^2=\sigma_f^2+\sigma_g^2\text{。}$$

还有一些其它的方法来度量扩展和平滑。假如一辆汽车在一条高度服从 Π^{*2} 或 $\Lambda(x)$ 变化的道路上行驶，则这个行驶过程是不平滑的；但是比起在高度以 $\Pi(x)$ 变化的道路上行驶已经平滑了很多，因为后者有悬崖。一条由 2 段直线和 3 段抛物线组成的，路面起伏服从 Π^{*3} 变

化的道路，其路面高度和坡度都不会有突变，因此将会更加平滑。但是不可能达到完全的平滑，因为在四个接头的地方都会有离心力的突变，这与路面曲率的突变有关。在这些情况下，平滑性随着函数所具有的最高阶导数的阶数的增加而增加。

如果函数的第 k 阶导数含有冲激，我们说该函数有 k 阶平滑度。假如 $f(x)$ 有 m 阶平滑度，$g(x)$ 有 n 阶平滑度。在我们的定量定义下，它们的卷积结果是否会如我们所期望的一样更加平滑？

因为

$$F(s) \sim s^{-m},\ G(s) \sim s^{-n},$$

由此可得

$$F(s)G(s) \sim s^{-(m+n)},$$

但 $F(s)G(s)$ 是 $f * g$ 的傅里叶变换，因此 $f * g$ 的 $(m+n)$ 阶导数含有冲激，所以它的平滑度为 $m+n$。显然，它比 f 或者 g 都更加平滑；事实上，卷积结果的平滑度与 σ^2 一样，也有可加性。

"平滑"有时用作卷积的同义词。"逆平滑"和"锐化"等术语则用来表示求解卷积积分方程。从本节的观点来看，一件有趣的事情是："锐化"过程要利用进一步的平滑。因此，平滑度的定量测量并不总是与平滑度定性的概念一致。作为一个特殊的例子，我们考查函数 $\Lambda(x) * \tau^{-1}\exp(-\pi x^2/\tau^2)$，$\tau$ 非常小。这个函数是无限光滑的，但是却非常近似于不光滑的函数 $\Lambda(x)$。它们只在拐角处稍有不同，在拐角的极小邻域内被平滑了，因而阻止了导数中冲激的出现。然而，在卷积后得到的新路面上行驶也许和在旧路面是一样不光滑的。

渐近性态

众所周知，定性地说波形的尖锐和陡峭特性表示频谱中有高频分量的存在。现在我们进一步定量地讨论随着频率增加，频谱是如何变化的。

我们已经看到，如果一个函数是连续的，但它的一阶导数不连续，或者说它没有阶跃但存在拐角，那么该函数傅里叶变换按 s^{-2} 规律衰减，功率谱按 s^{-4} 规律衰减。用电路的语言来描述这种特性就是：它每倍频程衰减 12 分贝或者每 10 倍频程衰减 40 分贝。

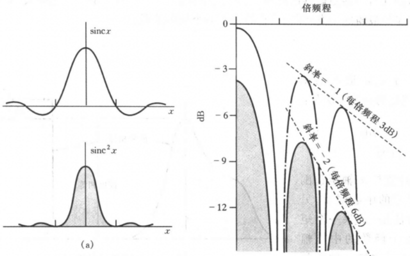
在双对数坐标图中，按照 s^{-2} 衰减的函数将变为斜率为 -2 的直线。对数单位，例如倍频程、十倍频程、分贝、奈培等，本身都是没有量纲的。

图 8.7 所示为两个常见函数在线性坐标和双对数坐标下的曲线（函数为负值时，则对其绝对值取对数）。函数的某些方面，特别是针对渐近的过程表现和渐近线的接近程度，使用对数坐标比线性坐标表示得更清楚。鉴于此，在表示电子滤波器特性和天线方向图时常用对数坐标。

这样我们就提出一个问题，在前面章节中讨论各种类型的间断点时，为什么只涉及到斜率为每倍频 0，3，6… 分贝？我们通过考查一个每倍频衰减 4.5 分贝，即按 $s^{-\frac{3}{2}}$ 速度衰减的傅里叶变换来研究这个问题，并讨论其对应原函数的间断点类型。

变换域中除以 s 对应函数域中的积分运算，因此，除以 $s^{-\frac{1}{2}}$ 对应函数域中的半阶积分。这里，我们忽略了 $2\pi i$ 的幂。

表 8.2 的例子用于显示函数的渐近特性，它表明在阶跃和冲激之间确实存在着不同严重程度的间断点。在函数的斜率从水平变为垂直的拐角（表 8.2 中的 A 点）处的不连续程度介于简单的拐角和简单的阶跃之间。图中所示 B 点的不连续性介于简单的阶跃和无限冲激之间，这种情况下，间断的严重程度稍低。

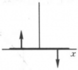
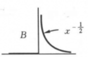
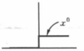
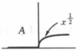
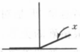
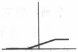


(a)　　(b)

图 8.7　双对数坐标下的渐进特性

(a) 用于比较的线性坐标；(b) 对数坐标（负瓣用点划线表示）

表 8.2　分数阶不连续

频谱的渐近特性	$H(x)$	$\prod(x)$
一阶微分　s^0		
半阶微分　$s^{-\frac{1}{2}}$		
原函数　s^{-1}		
半阶积分　$s^{-\frac{3}{2}}$		
积分　s^{-2}		

在这方面还有一些更微妙的问题。比如$\delta(x)$和x^{-1}在$x=0$处是同阶无穷大，而$\log x$的无穷间断点可能是最弱的一类间断点，它等价于一个简单阶跃。

等效宽度

对于一个确定形状的函数，衡量其宽度的简单方法是：

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x}{f(0)},$$

也就是说，函数与x轴所包围的面积除以它的中心幅度。另一种表示方法是，如果一个矩形的高度等于函数的中心幅度，面积等于函数与x轴所包围的面积，则该矩形的宽就是这个函数的等效宽度。如图8.8所示。

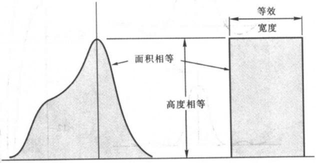


图8.8 函数的等效宽度

我们可以从很多方面举例说明。在光谱学中，谱线的等效宽度定义为与这条谱线有相同中心亮度和面积的矩形的宽度。在天线理论中，天线的有效波束宽度也有等效宽度的特征（第15章）。在辐射线测定中也有这样的例子（第17章）。图8.9列出了一些函数的例子，并画出了相应的矩形来表示它们的等效宽度；所有例子具有相同的等效宽度。

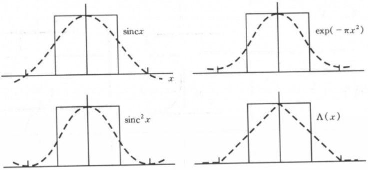


图8.9 一些常见分布的等效宽度

如果$f(0)=0$，则等效宽度不存在。然而，对于$f(0)\neq 0$且$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$存在的所有情况，等效宽度都存在（在分光镜谱的情况下，这种等效性没有意义）。

我们知道一个函数越宽，则它的频谱越窄。但是对于各种形状的函数，我们是否可以定量地表示这个相反的关系？这里存在一个很精确的关系。不论等效宽度是否存在，都有以下优良的性质：函数的等效宽度等于它的傅里叶变换的等效宽度的倒数，即

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x}{f(0)} = \frac{F(0)}{\int_{-\infty}^{+\infty} F(s)\,\mathrm{d}s}。$$

这个定理使我们想起前面的相似性定理，根据该定理，函数的压缩或扩展和它的傅里叶变换的行为是正好相反的。然而，相似性定理受限于给定形状的函数。而最新给出的定理指出了这种互易特性的度量，并且可以根据这种度量对不同的函数进行排序。

等效宽度并不总是宽度的最好度量标准。例如，在表示滤波器带宽或者天线的波束宽度时，更常用的是“半功率宽度”。根据这一度量标准，上面第二个例子比第一个例子的宽度窄，在某些场合，这更加符合我们的直观感觉。

一个有趣的矛盾是：一个局部的涡旋运动在空间中向外传播时其频谱将展开到更高的波数。在这种情况下，用等效宽度来衡量散布是错误的。

将其推广到二维，天线方向图（等于 $4\pi/$ 方向性）的有效立体角是方向图的等效宽度。

练习 从相对宽度不同的高斯函数和矩形函数入手，考察卷积运算对于等效宽度的影响。

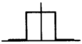
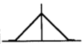
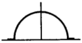
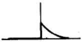
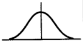
表 8.3 列举了一些常见函数的等效宽度以及将在下一节中介绍的自相关宽度。表中用到了以下的缩写：

$$f\star f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+u)f(u)\,\mathrm{d}u$$

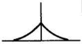
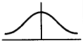
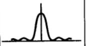
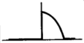
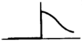
$$W_f = \frac{1}{f(0)}\int_{-\infty}^{+\infty} f\,\mathrm{d}x$$

$$W_{f\star f} = \frac{1}{f\star f\,|_0}\int_{-\infty}^{+\infty} (f\star f)\,\mathrm{d}x$$

表 8.3 等效宽度和自相关宽度

$f(x)$		$\int f\mathrm{d}x$	$f(0)$	W_f	$f\star f$	$\int(f\star f)\mathrm{d}x$	$f\star f\,\|_0$	$W_{f\star f}$
$\prod(x)$		1	1	1	$\Lambda(x)$	1	1	1
$\Lambda(x)$		1	1	1	$\Lambda * \Lambda$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$
$\cos\pi x\prod(x)$		$2/\pi$	1	$\frac{2}{\pi}$	$\{\frac{1}{2}(1-\|x\|)\cos\pi x + \frac{1}{2\pi}\sin\pi\|x\|\}\prod(\frac{\pi}{2})$	$\frac{4}{\pi^2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{\pi^2}$
$e^{-x}H(x)$		1	1①	1	$\frac{1}{2}e^{-\|x\|}$	1	$\frac{1}{2}$	2
$e^{-\pi x^2}$		1	1	1	$2^{-\frac{1}{2}}e^{-\pi x^2/2}$	1	$2^{-\frac{1}{2}}$	$2^{\frac{1}{2}}$

续表 8.3

$f(x)$		$\int f\mathrm{d}x$	$f(0)$	W_f	$f\star f$	$\int(f\star f)\mathrm{d}x$	$f\star f\mid_0$	$W_{f\star f}$
$\mathrm{e}^{-\lvert x\rvert}$		2	1	2	$(\lvert x\rvert+1)\mathrm{e}^{-\lvert x\rvert}$	4	1	4
$\frac{1}{1+x^2}$		π	1	π	$\frac{2\pi}{4+x^2}$	π^2	$\frac{\pi}{2}$	2π
$\mathrm{sinc}x$		1	1	1	$\mathrm{sinc}x$	1	1	1
sinc^2x		1	1	1	$\frac{1}{\pi x^2}(1-\mathrm{sinc}2x)$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$
$\delta(x)$		1	∞	0	$\delta(x)$	1	∞	0
$\mathrm{II}(x)$		1	0	∞	$\frac{1}{4}\delta(x+1)+\frac{1}{2}\delta(x)+\frac{1}{4}\delta(x-1)$	1	∞	0
$2K_0(2\pi x)$					$\frac{1}{1+x^2}$ 的傅里叶变换	1	π	$\frac{1}{\pi}$
$\Lambda(x)H(x)$		$\frac{1}{2}$	1①	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}\prod(\frac{x}{2})(\lvert x\rvert^3-3\lvert x\rvert+2)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$
$\cos\pi x\prod(x)H(x)$		$\frac{1}{\pi}$	1①	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{4}(1-2\lvert x\rvert+\sin2\pi\cdot\lvert x\rvert)\cos^2\pi x\prod(x)$	$\frac{1}{\pi^2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{\pi^2}$
$\frac{H(x)}{1+x^2}$		$\frac{\pi}{2}$	1①	$\frac{\pi}{2}$	…	$\frac{\pi^2}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	π
$x\prod(x-\frac{1}{2})$		$\frac{1}{2}$	0	∞	$\frac{1}{6}\prod\left(\frac{x}{2}\right)(\lvert x\rvert^3-3\lvert x\rvert+2)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{1+\mathrm{i}2\pi ax}$		$\frac{1}{2}a$	1	$2a$	…	…	…	…
$\frac{1}{(1+x^2)^2}$		$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{\pi}{2}$	…	$\frac{\pi^2}{4}$	$\frac{5\pi}{16}$	$\frac{4\pi}{5}$

① 所给的值是 $f(0+)$。

自相关宽度

另一种有趣的"宽度"是自相关函数的等效宽度，我们称之为自相关宽度：

$$W_{f^*\star f}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}(f^*\star f)\mathrm{d}x}{f^*\star f\,|_0}=\frac{\int f\mathrm{d}x\int f^*\,\mathrm{d}x}{\int ff^*\,\mathrm{d}x}$$

这样定义的自相关宽度没有指出函数在原点处的集中程度。例如，图 8.10 所示的两个函数有相同的自相关宽度，这是因为它们有相同的自相关函数，但是它们的等效宽度不同。对于一个矩形脉冲来说，沿横轴简单平移就可能使等效宽度的概念不成立，因为这种平移会使中心幅度为 0。但如果使用自相关函数的等效宽度，就可以避免这种情况，因为自相关函数在原点处达到最大值，不可能为 0。

函数的等效宽度及其傅里叶变换的等效宽度互为倒数，从这一关系我们可以得到，函数自相关宽度是它的功率谱的等效宽度的倒数。因此，如果函数功率谱的等效宽度不存在，则自相关宽度的概念也就没有了意义。当功率谱的中心幅度为 0 时就发生这种情况，但这意味着原函数(及其自相关函数）与 x 轴所包围面积为 0。

因此，考虑到那些用来表示波包的函数，它们的直流分量很小或者为 0，那么自相关宽度就不再适合用来衡量该函数的"范围"或持续期。

一个函数的傅里叶变换的自相关宽度的倒数是函数的模的平方的等效宽度：

$$\frac{\int ff^*\,\mathrm{d}x}{f(0)f^*(0)}。$$



图 8.10　等效宽度不同但自相关宽度相同的函数

用自相关宽度来衡量函数的分散程度，最大的优点(相对于等效宽度而言）在于，它去除了等效宽度对中心幅度的敏感性。两个功率谱相同的函数，它们的自相关函数也相同，但是它们的频谱分量可以相差任意的相对相位。因此，使用自相关宽度 $W_{f^*\star f}$ 解决了两个问题：(1) 使得函数相对于原点的不同移位不影响函数的自相关宽度；(2) 也使得仅由各频率分量间的相位差异所产生的不同的函数并不影响自相关宽度。然而，两个功率谱相同的函数，在时域宽度可能不同。比如，在与光孔平行的平面上，菲涅耳衍射场有相同的自相关，但是从直觉来看，照明宽度随着与光源距离的增大而增大。

我们也可以使用相对于质心的等效宽度来解决问题(1)。问题(2) 表明：(a) 不能忽略不同频率分量的内部相位关系；(b) 这种宽度度量的结果对特定函数值($f(0)$) 的选取总是敏感的。

很明显，这两种度量方法都是严格的，而且针对特定的物理环境，等效宽度和自相关宽度

均会产生适当的度量。因此，批评天线方向性对某个坐标的变化反应敏感是没什么意义的。

白噪声通过滤波器的处理就用到了自相关宽度的度量。众所周知，定性地说，有效独立输出值之间的平均时间间隔与滤波器的通带"宽度"成反比。实际上，正是功率传输特性的自相关宽度精确地定量描述了这个关系。

在很多应用中都适用的自相关宽度的一个重要性质是自相关宽度的混组不变性(invariance under shuffling)(见习题)。

均方宽度

前述的等效宽度和集聚度不能满足所有的需要，因此有必要引入其它的方法来衡量函数的宽度。例如，x 的均方值定义为：

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x},$$

它被广泛地用来度量宽度，以及函数的中心不在坐标原点的方差：

$$\begin{aligned}\langle (x-\langle x\rangle)^2 \rangle &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \\ &= \frac{F''(0)}{-4\pi^2 F(0)} + \frac{1}{4\pi^2}\left[\frac{F'(0)}{F(0)}\right]^2。\end{aligned}$$

当函数与 x 轴包围面积为 0 时，这些方法也不适用，因此不能用来衡量振荡信号或波包的宽度。为应付这种情况，我们考虑使用能量密度以及能量分布的质心和方差。我们把相对于 $|f(x)|^2$ 的质心偏离的均方称为模平方的方差，表示为：

$$(\Delta x)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 \mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x} - \left[\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x |f(x)|^2 \mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x}\right]^2。$$

这看起来像是对信号包的持续期和带宽的简单物理概念的精确表达，但是对很多目的来说，它比起前面所讨论的更简单的衡量办法更加合理。

当然，一个给定函数的平方可能是没有有限的方差，例如，$\mathrm{sinc}x$ 和 $(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$ 这两个能量集中的尖锐函数都有合理的"等效宽度"和"自相关宽度"，而在基于方差的宽度度量中，它们的宽度是无穷的。在使用基于方差的宽度度量之前需要注意，看看它和特定情况下关于宽度的直觉想法有什么关系。

在下面将要提到的不确定关系的严格表述中，平方的不确定性是指模平方的方差。假定一个观测量的形式为 $\mathrm{sinc}x$(使用有限频率响应的接收设备对脉冲波形采样，或者一个无限平面波通过有限空间的小孔来采样，其输出就是这样的)，那么其散布服从不确定关系，这和人们对于高斯包络信号 $\exp(-ax^2)\sin x$ 的散布的直觉绝对不同。

表 8.4 列举了一些函数的质心和均方横坐标。

表 8.4　质心和均方横坐标

$f(x)$	$\langle x \rangle$	$\langle x^2 \rangle$	$F''(0)$	$f''(0)$	$\Delta(x)^2$
$\prod(x)$	0	$\frac{1}{12}$	$-\pi^2/3$	0	$\frac{1}{12}$
$\Lambda(x)$	0	$\frac{1}{6}$	$-2\pi^2/3$	∞	$\frac{1}{4}$
$\mathrm{sinc}x$	0	osc	0	$-\pi^2/3$	∞
$\mathrm{sinc}^2 x$	0	∞	∞	$-2\pi^2/3$	…
$H(x)$	∞	∞	∞	∞	∞
$\mathrm{e}^{-x}H(x)$	1	2	$-8\pi^2$	∞	$\frac{1}{4}$
$\mathrm{e}^{-\lvert x\rvert}$	0	4	$-16\pi^2$	∞	1
$\frac{1}{1+x^2}$	0	∞	∞	-2	…
$\cos\pi x\prod(x)$	0	$\frac{\pi^2-8}{4\pi^2}$	$-\frac{2}{\pi}(\pi^2-8)$	$-\pi^2$	…
$(1-x^2)\prod(\frac{x}{2})$	0	$\frac{4}{15}$	$-\frac{16\pi^2}{15}$	-2	…
$\mathrm{e}^{-\pi x^2 a^2}$	0	$\frac{1}{2\pi a^2}$	$-\frac{2\pi}{a^3}$	$-2\pi a^2$	$\frac{1}{4\pi a^2}$
$\mathrm{e}^{-\pi x^2 a^2}\cos wx$	0	$\frac{1}{2\pi}-(\frac{w}{2\pi a})^2$	$-\frac{2\pi}{a}(1-\frac{w^2}{2\pi a^2})\mathrm{e}^{-\pi(\frac{w}{2\pi a})^2}$	$-(w^2+2\pi a^2)$	…
$\mathrm{II}(x)$	0	$\frac{1}{4}$	$-\pi^2$	0	∞
$\mathrm{sech}\pi x$	0	$\frac{1}{4}$	$-\pi^2$	$-\pi^2$	…
$x\mathrm{e}^{-x}H(x)$	2	6	$-24\pi^2$	∞	…

采样与复制

函数 $f(x)$ 定义在$(-\infty,+\infty)$上，在单位间隔上对其采样，结果为一个样本集合：$\{\cdots f(x+2)\ f(x+1)\ f(x)\ f(x-1)\ f(x-2)\cdots\}$。$f(x)$ 在间隔 X 上复制，结果为 $\cdots+f(x+2X)+f(x+X)+f(x)+f(x-X)+f(x-2X)\cdots$。对于有些函数，例如 $f(x)=(1+x^2)^{-1}$（类似上式的），复制的和是不存在的，接下来的讨论不适合于这些函数。

如果我们先复制，然后采样，得到的结果是双重无穷的实体，此处用列矩阵或向量的形式表示，其元素是采样的集合。

$$\begin{bmatrix} \cdots+f(x+2)+\cdots \\ \cdots+f(x+1+2X)+f(x+1+X)+f(x+1) \\ \qquad +f(x+1-X)+f(x+1-2X)+\cdots \\ \cdots f(x+2X)+f(x+X)+f(x)+f(x-X)+f(x-2X)+\cdots \\ \cdots f(x-1+2X)+f(x-1+X)+f(x-1) \\ \qquad +f(x-1-X)+f(x-1-2X)+\cdots \\ \cdots+f(x-2)+\cdots \end{bmatrix}。$$

另一方面，假如我们先采样再复制，那么我们首先需要扩展复制的意义使其适用于样本集合，因为在前面所定义的复制是对函数的操作。首先规定复制的间隔 X 是一个整数。样本集合表示为 f_i，其中 $-\infty < i < +\infty$，则复制的样本集合定义为：

$$r_j = \cdots f_{j+2X} + f_{j+X} + f_j + f_{j-X} + f_{j-2X} + \cdots,$$

（假设该和式是存在的）。在这样的定义下，样本集合的复制和复制的采样是完全相同的。

这一结论的另一等价说法要用到样本集合 a_i 和广义函数 $\sum_i a_i \delta(x-i)$ 之间的等价性。在单位间隔上采样和与 $\text{III}(x)$ 的相乘运算是一致的，在间隔 X 上复制和与 $X^{-1}\text{III}(x/X)$ 的卷积是一致的。用采样操作符 $\text{III}(x)\times$ 和复制操作符 $X^{-1}\text{III}(x/X)*$，可以将采样与复制的可交换性表示如下：

$$X^{-1}\text{III}(x/X) * [\text{III}(x) \times f(x)] = \text{III}(x) \times [X^{-1}\text{III}(x/X) * f(x)]$$

参考图 10.16 也许对于理解这一关系有所帮助。

一些不等式

函数的间断点、尖端或其它陡峭的特征表示频谱中存在高频分量。实际上，函数陡峭性的定量描述是和频谱的衰减联系在一起的。如果一个函数十分连续，并且它的各阶导数都连续，那么它的斜率或曲率就有一个极限值。

如图 8.11 所示，如果一个这样的函数在横轴上一个非常小的间隔里发生很大变化（就是说函数在这个间隔中的斜率很大），这在一些实际应用中可以看作是不连续的，我们可以得到它相应的频谱。其渐近特性近似于连续函数，只是高频分量会超出感兴趣的范围。

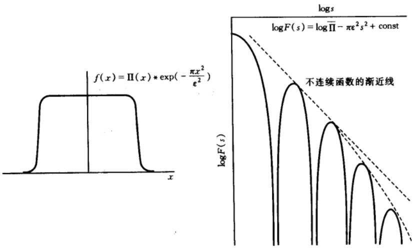


图 8.11　一个本身及各阶导数均连续的函数（在一些实际应用中看作不连续的）及其变换

幅度和斜率的上限　一个函数的斜率能有多大？首先我们考虑一个函数的最大取值问题。对此，有如下结果：

$$| f(x) | \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} | F(s) | \mathrm{d}s$$

从 $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{i2\pi xs} \mathrm{d}s$ 可以直接推论得到上面的结果。

在 $f(x)$ 的复平面上对于一个给定值 x 的傅里叶积分如图 8.12 所示。x 取其他值时，轨迹也许有所不同，但是弧线的长度$\int_{-\infty}^{+\infty} | F(s) | \mathrm{d}s$将保持不变。这条弧线的长度就是$| f(x) |$的最大可能取值，当存在 x 使得弧线伸展成为直线时，两者相等。换句话说，函数的最大取值不可能超过它在该点上所有的同相频率分量相加的和(如果存在的话)。

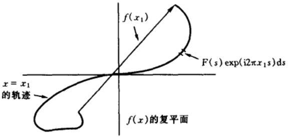


图 8.12　$f(x)$ 复平面上的轨迹

分量 $F(s)\exp(i2\pi xs)\mathrm{d}s$ 的斜率为 $2\pi i s F(s)\exp(i2\pi xs)\mathrm{d}s$，同时考虑到所有分量的斜率都同时达到最大值的可能性，我们得到不等式：

$$| f'(x) | \leqslant 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} | sF(s) | \mathrm{d}s。$$

以上我们所得到的两个不等式都源于一个几何现象，即：两点之间直线最短。这最终可以归结为：三角形两边之和大于等于第三边。用向量形式表示为：

$$| \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} | \leqslant | \boldsymbol{A} | + | \boldsymbol{B} |。$$

通常看来，不等式经常可以简化为某些几何上的不等关系。上面提到的就是贝塞尔不等式。

施瓦兹不等式　定义在区间(a,b)上的两个实函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，有如下关系：

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x \int_a^b [g(x)]^2 \mathrm{d}x。$$

相关的向量不等式表述为：两个向量的标量积小于等于它们的绝对值的乘积

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \leqslant AB$$

如果 F 和 G 都是 x 的复函数，就有了我们所需要的施瓦兹不等式形式：

$$\left[\int (F^* G + FG^*)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant 4\int FF^* \mathrm{d}x \int GG^* \mathrm{d}x。$$

为了证明施瓦兹不等式，令 ϵ 为一个实常数，则

$$0 < \int (F + \epsilon G)(F + \epsilon G)^* \mathrm{d}x$$

这是因为被积函数大于 0(除非 F 和 G 恰好成比例，而所选 ϵ 使得 $F + \epsilon G$ 等于 0，此时被积函数为 0，这种情况是必须要避免的)。将不等式展开，我们可以写成

$$0 < \int FF^* \mathrm{d}x + \epsilon \int (F^* G + FG^*)\mathrm{d}x + \epsilon^2 \int GG^* \mathrm{d}x$$

不等式右边是一个关于ε^2的二次方程，记为$c+b\varepsilon+a\varepsilon^2$，对任意实数$\varepsilon$，其大于0的条件为$b^2-4ac<0$。

应用施瓦兹不等式时，应该给出确定的积分区间。例如在不确定关系中，使用的是一个无穷区间的积分。实际上对于任何确定的积分区间，施瓦兹不等式都是成立的。

不确定性关系

众所周知，信号的带宽-持续期之积不能小于一个确定的值。这是由时间和频率的相互依赖关系所决定的，本质上是一个数学现象。它使得我们不能在时频平面上对信号进行任意精确的描述。我们可以分别任意指定一个信号的时域分辨率或者频域分辨率，但是不能同时指定这两种分辨率。因此，时频平面上一个有限面积只能包含有限的独立数据。信号的带宽-持续期之积不能小于只含有一个数据的基本信号的带宽(持续期积)。这样的信号要么是持续时间短，频带宽，要么是准单频(频带窄)，但持续时间长。

函数的等效宽度和其傅里叶变换的等效宽度互为导数，因此有以下结果：

$$\text{等效持续期}\times\text{等效带宽}=1\text{。}$$

根据前面章节的讨论，自相关宽度的积可以表示为：

$$\frac{|f(0)|^2\left|\int f\mathrm{d}x\right|^2}{\left[\int|f|^2\mathrm{d}x\right]^2}\text{。}$$

如果我们用均方宽度的表达式，则

$$\langle x^2\rangle\langle s^2\rangle=-\frac{f''(0)\int x^2f\mathrm{d}x}{4\pi^2f(0)\int f\mathrm{d}x}=\frac{f''(0)F''(0)}{16\pi^4f(0)F(0)}\text{。}$$

上面的两种宽度乘积都不是常数，其中第二个可以在0到无穷之间变换。

再来考虑能量函数。用$(\Delta x)^2$表示$|f(x)|^2$的方差，$(\Delta s)^2$表示$|F(s)|^2$的二阶矩。则不确定性关系为

$$\Delta x\Delta s\geqslant\frac{1}{4\pi}$$

不确定性关系的证明 本节所有的积分都在$(-\infty,+\infty)$区间上。推导需要用到结论

$$\int f'f'^*\mathrm{d}x=4\pi^2\int s^2FF^*\mathrm{d}s\text{，}$$

这可以通过微分定理和瑞利定理来验证。

我们也要用到以下形式的施瓦兹不等式：

$$4\int ff^*\mathrm{d}x\int gg^*\mathrm{d}x\geqslant\left|\int(f^*g+fg^*)\mathrm{d}x\right|^2\text{，}$$

以及在无限区间上的分部积分公式：

$$\left|\int xf'\mathrm{d}x\right| = \left|\int f\mathrm{d}x\right|。$$

取 $f(x)$ 和 $F(s)$，都集中在质心上，

$$
\begin{aligned}
(\Delta x)^2(\Delta s)^2 &= \frac{\int x^2 ff^* \mathrm{d}x \int s^2 FF^* \mathrm{d}s}{\int ff^* \mathrm{d}x \int FF^* \mathrm{d}s} \\
&= \frac{\int xf \cdot xf^* \mathrm{d}x \int f'f'^* \mathrm{d}x}{4\pi^2(\int ff^* \mathrm{d}x)^2} \\
&\geqslant \frac{\left|\int (xf^* \cdot f' + xf \cdot f'^*)\mathrm{d}x\right|^2}{16\pi^2(\int ff^* \mathrm{d}x)^2} \\
&= \frac{\left|\int x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ff^*)\mathrm{d}x\right|^2}{16\pi^2(\int ff^* \mathrm{d}x)^2} \\
&= \frac{\left|\int ff^* \mathrm{d}x\right|^2}{16\pi^2(\int ff^* \mathrm{d}x)^2} \\
&= \frac{1}{16\pi^2}
\end{aligned}
$$

因此 $\Delta x \Delta s \geqslant \frac{1}{4\pi}$。

不确定性关系举例　令 $f(x)$ 表示电压 $V(t)$，其傅里叶变换为 $S(f)$。为了图示方便，我们使用 $V(t)$，因为它的傅里叶变换是实的，而在通常情况下，$S(f)$ 是复的。另一方面，电压或电磁波的场只能是实的。信号的能量分布和能量谱如图 8.13 所示，其中 Δt 和 Δf 分别表示这两个函数均方值相对其能量分布的质心所偏离的距离。不确定关系表明，$\Delta t \Delta f$ 的乘积大于或等于 $(4\pi)^{-1}$。如果使用角频率 ω 代替 f，

$$\Delta t \Delta \omega \geqslant \frac{1}{2}。$$

如果 $f(x) = \exp(-\pi a^2 x^2)$，那么 $ff^* = \exp(-2\pi a^2 x^2)$，其中 x 的方差为 $1/4\pi a^2$，$\Delta x = (4\pi a^2)^{-\frac{1}{2}}$。类似地，对于傅里叶变换 $FF^* = [a^{-1}\exp(-\pi s^2/a^2)]^2$，其方差为 $a^2/4\pi$，$\Delta s = (4\pi/a^2)^{-\frac{1}{2}}$。因此，对于这个例子，

$$\Delta x \Delta s = \frac{1}{4\pi},$$

这是不确定性关系所允许达到的最小值。

然而，我们可以举出另外的例子，使带宽-持续时间之积远大于下限。假设一个雷达发射机发出频率为 10000 兆 MHz，持续时间为 1 μs 的脉冲。由不确定关系

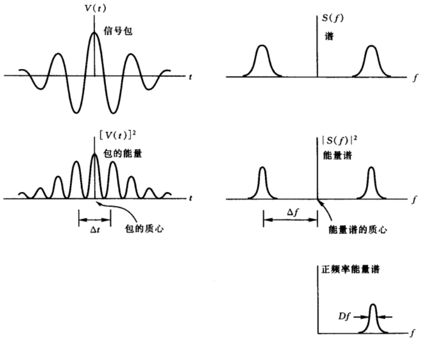


图 8.13　不确定性关系

$$10^{-6} \geqslant \frac{1}{4\pi \times 10^{10}}。$$

定义正频率能量谱为 $2\mid S(f)\mid^2, f>0$，其宽度 Df 表示为：

$$(Df)^2 = \frac{\int_0^{+\infty} \mid f - \langle f\rangle \mid^2 \mid S(f)\mid^2 \mathrm{d}f}{\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} [s(t)]^2 \mathrm{d}t}。$$

从无线接收机的实际工作经验中，我们知道，

$$\Delta t \sim \frac{1}{Df},$$

对于本例中持续时间为 1 μs 的脉冲，接收机的最佳检测带宽是 1 mHz。不确定关系确定了带宽-持续期之积的下限，但是在本例中这个理论值和实际经验值相差了 10^5 倍。

尽管正频率能量谱并不像根据 Δf 定义的传统意义上的谱 $S(f)$ 一样易于数学处理，但是如果我们用探测能量的可调谐共鸣器来做实验的话，我们会发现（正频率能量谱）很接近于所观察到的结果。

接下来我们考虑乘积

$$\Delta t Df,$$

它与我们在上面的例子中的经验是一致的，但并不服从在讨论 $\Delta t\Delta f$ 时所引入的下限 $(4\pi)^{-1}$。

关于 $\Delta t Df$ 是否存在下限这一问题，Uffink 和 Hilgevoord(1985，1988) 曾经研究过。举一个例子来说明它并不服从下限，考虑函数 $s(t) = \exp(-\pi t^2)\cos 2\pi f_0 t$，其傅里叶变换为 $S(f) = \frac{1}{2}\exp[-\pi(f+f_0)^2] + \frac{1}{2}\exp[-\pi(f-f_0)^2]$，其中 $f_0 = 0.218$，如图 8.14 所示。粗线条表示 Δt 和 Df。它们的乘积为 $0.400 \times (1/4\pi)$，远小于下限 $\Delta t \Delta f$。

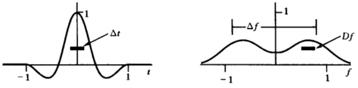


图 8.14　说明 Δf 和 Df 的差别，Δf 的下限服从 $\Delta f \Delta t \leqslant 1/4\pi$，$Df$ 是正频谱的宽度，它可以比 Δf 更小

有限差分

函数 $f(x)$ 在间隔 a 上的有限差分定义为：

$$\Delta_a f(x) = f(x + \frac{1}{2}a) - f(x - \frac{1}{2}a) \text{ 。}$$

由于经常和那些只在离散间隔上列表的函数一起使用，因此有限差分只定义在 x 的离散值上。当然，我们也可以对一个定义在所有 x 上的函数计算有限差分，在这种情况下，有限差分也是连续变量 x 的函数。当差分间隔 a 较小时，$\Delta_a f(x)$ 较小且近似正比于 $f(x)$ 的导数；当 a 取值较大时，$\Delta_a f(x)$ 可以分为两部分，分别为 $f(x)$ 的平移和一个 $f(x)$ 反转的平移，如图 8.15 和8.16 所示。

由于 x 域的有限差分运算对应于变换域上的简单乘法，所以我们有必要关注把函数表示为有限差分形式的可能性。

练习　图 8.17 所示为函数的有限差分形式，如果可能的话，写出它们的原函数。结论是惟一的吗？

练习　讨论 $\Delta_a f(x)$ 的奇偶性。

可以认为，有限差的计算过程

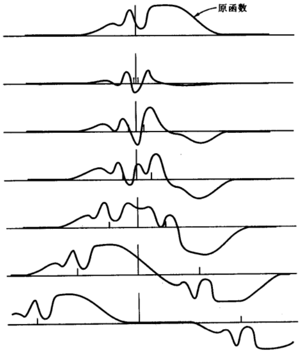
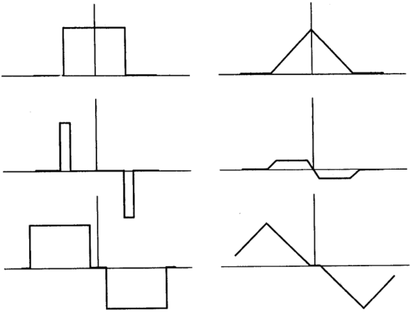


图 8.15　不同间隔上的有限差分



(a) (b)

图 8.16 短间隔和长间隔上的有限差分
(a) 矩形函数；(b) 三角窗函数

与卷积运算等价，也就是说：

$$\Delta_1 f(x) = 2\mathrm{I_I}(x) * f(x)。$$

前面已经讨论了奇对称脉冲对的傅里叶变换，因此我们知道

$$\frac{1}{|a|}\mathrm{I_I}\left(\frac{x}{a}\right) \supset \mathrm{i}\sin\pi as 。$$

根据卷积理论，我们可以得到两个域之间的准确关系：

如果 $f(x)$ 在间隔 a 上的有限差分是 $\Delta_a f(x)$，则 $\Delta_a f(x)$ 的傅里叶变换为 $2\mathrm{i}\sin\pi as F(s)$。

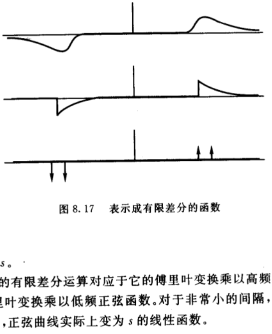


图 8.17 表示成有限差分的函数

函数域中的有限差分运算，在变换域中对应于原函数的傅里叶变换乘以 $2\mathrm{i}\sin\pi as$。

图 8.18 所示的例子表明，在大间隔上的有限差分运算对应于它的傅里叶变换乘以高频正弦函数；小间隔上的有限差分运算对应傅里叶变换乘以低频正弦函数。对于非常小的间隔，例如，比 $f(x)$ 中最精细的部分还要小的间隔，正弦曲线实际上变为 s 的线性函数。

在 x 域中，有限差分与微分的关系可以表示为：

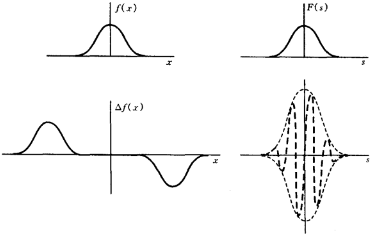


图 8.18　有限差分对应于傅里叶变换与正弦的乘积

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \equiv \lim_{a \to 0} \frac{\Delta_a}{a} ,$$

在变换域中表示为：

$$\lim \frac{2\mathrm{i}\sin \pi a s}{a} = \mathrm{i}2\pi s \text{ 。}$$

二阶差分 $\Delta_{aa}^2 f(x)$ 定义为：

$$\Delta_{aa}^2 = \Delta_a[\Delta_a f(x)] = f(x+a) - 2f(x) + f(x-a) \text{ 。}$$

我们可以对有限差的结果再次进行有限差运算得到 $\Delta_{aa}^2 f(x)$，对应在变换域中，原函数的傅里叶变换则连续两次乘以 $2\mathrm{i}\ \sin\pi a s$。所以，$\Delta_{aa}^2 f(x)$ 的傅里叶变换为 $-4\sin^2 \pi a s F(s)$。

图 8.19 所示为有限差分的几何解释。在有限间隔上，一阶有限差分与平均斜率成正比，二阶有限差分与平均曲率成正比。

练习　证明 $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2 \equiv a^{-2} \lim\limits_{a \to 0} \Delta^2$

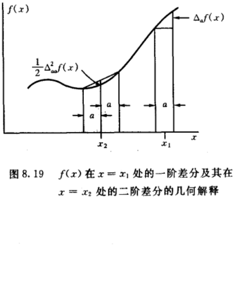


图 8.19　$f(x)$ 在 $x = x_1$ 处的一阶差分及其在 $x = x_2$ 处的二阶差分的几何解释

滑动平均

在处理气象数据时，例如降雨量，通常使用滑动平均将不重要的逐天的数据波动平滑掉，以便于揭示季节趋势。$f(x)$ 在间隔 a 上的滑动平均定义为：

$$\frac{1}{a}\int_{x-\frac{1}{2}a}^{x+\frac{1}{2}a} f(x')\mathrm{d}x' \text{。}$$

在实践中，当自动记录数据时，常常对不必要的快速波动进行平滑处理；例如，输入毫安表的信号要先通过平滑滤波器。滑动平均值是一种经过平滑处理的值。在电子计数器中对输入电压积分并在固定时间间隔的结束时刻输出结果，就可以得到滑动平均值。对电压积分的常用方法是把电压输入电压-频率转换器，然后在给定的时间间隔里对压控振荡器进行计数。

显而易见，滑动平均可以表示为函数与矩形函数的卷积形式，该矩形函数宽为 a，面积为 1：

$$a^{-1}\Pi\left(\frac{x}{a}\right)*f(x)$$

因为 $a^{-1}\Pi(x/a)$ 的傅里叶变换是 sincas，根据卷积理论可得，$f(x)$ 在间隔 a 上的滑动平均的傅里叶变换是 sinc$asF(s)$。因此，对函数求滑动平均，在变换域中对应于其傅里叶变换乘以 sincas。

练习 用滑动平均来解释下面两个性质：

$$\lim_{a\to 0}\operatorname{sinc}as=1 \quad 和 \quad \lim_{a\to 0}\operatorname{sinc}as=a^{-1}\delta(s)$$

对一个函数进行多次滑动平均运算，可以得到函数的高阶滑动平均。所以，二阶滑动平均表示为：

$$a^{-1}\Pi\left(\frac{x}{a}\right)a^{-1}\Pi\left(\frac{x}{a}\right)*f(x)\ 。$$

其傅里叶变换为：

$$\operatorname{sinc}^2 asF(s)\ 。$$

注意到，$\operatorname{sinc}^2 as$ 是 $a^{-1}\Lambda(x/a)$ 的傅里叶变换。因此，二阶滑动平均可以视为原函数与 $a^{-1}\Lambda(x/a)$ 卷积结果的加权滑动平均。

图 8.20 所示为一个矩形函数多次滑动平均的结果，以及相应的变换。从中我们可以看到以下关系：

$$a^{-1}\Pi\left(\frac{x}{a}\right)*\cdots n\text{ 次}\cdots *a^{-1}\Pi\left(\frac{x}{a}\right)\supset \operatorname{sinc}^n as。$$

中心极限定理

大量函数卷积后得到的结果将会非常平滑（如图 8.20 所示），并且随着参与卷积的函数的数量的增加，结果将会逼近高斯形式。连续多次卷积后所呈现的这种趋势，可以用中心极限定理严格表述。下面我们通过例子来说明。

图 8.20 画出了两列函数的轮廓，当 $n\to\infty$ 时，它们中间部分的形状都逼近高斯形式。右边的第一个函数 sinc$s$ 在 $s=0$ 附近很小的一个范围内，可以用抛物线 $1-ms^2$ 来近似。同样的，右边的第 n 个函数在 $s=0$ 附近可以近似为 $(1-ms^2)^n$。

$$(1-ms^2)^n=\left[1-nms^2+\frac{n(n-1)}{1.2}m^2s^4-\cdots\right]$$

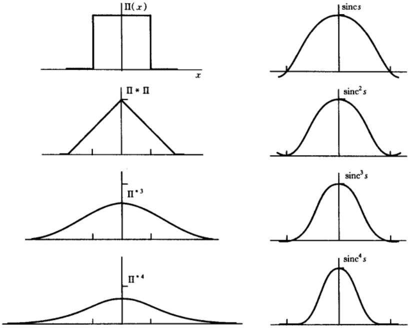


图 8.20 连续的滑动平均和它们的变换

$$= \left[1 - nms^2 + \frac{n^2 m^2 s^4}{1.2} - \cdots\right] + \text{余项}$$
$$= e^{-nms^2} + \text{余项}$$

固定 s 并令 $n \to \infty$，我们得到一个不断变窄的高斯项，其宽度按照 $n^{-\frac{1}{2}}$ 规律变化，加上一个相对重要性逐渐减小的余项。右边列曲线的中心曲率随 n 的增加成比例增加。

高斯项的变换具有高斯形式：

$$\left(\frac{\pi}{nm}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\pi^2 x^2 / nm}$$

随着 n 增大，高斯变换逐渐变宽，其方差与 n 成比例增加。很明显，这是因为函数卷积后的方差等于原函数方差的和这个性质所带来的结果。

一个有趣的现象是：在连续的自相关和自乘运算下，函数趋向于高斯形式。

练习 画出 s 较小时，$\cos^{10} s$ 和 $[J_0(s)]^{10}$ 的曲线。

Khinchin(1934) 对余项性质进行了一般性讨论。显然，并不是所有的函数通过连续的自卷积运算，都能趋近高斯形式。例如，$\Pi(x)\sin 2\pi x$ 就不行。然而，仍然有大量的函数可以通过卷积平滑趋近高斯形式，包括非对称函数 $e^{-x}H(x)$，还有一些是看起来不连续的函数，比如 $\Pi(x)$。甚至 Ш(x)，该函数有两个无穷间断点，也能逼近高斯形式。我们可以通过数值仿真来研究函数逼近高斯形式的速度（比如，计算连续的序列乘积 $\{1\ 1\}^{*n}$，$\{1\ 1\ 1\ 1\}^{*n}$，$\{3\ 2\ 1\}^{*n}$ 通过绘出序列各项对它们距中心的距离的平方的对数曲线进行测试）。

中心极限定理通常表述为，在适当的条件下，n 个函数卷积的输出（并不一定要求所有函数都相同）等于高斯函数，其方差是所有不同函数的方差和再加上一个余项，该余项随着 n 的增大以某种方式逐渐减小。

我们不再详细讨论条件的适用性，一个基本的事实是：参与卷积的函数的傅里叶变换在原点处应该具有隆起的特性，我们的例子就符合这一点，即它应当具有 $a-bs^2$ 一样的形式。其中 a 不能为 0，也就是说，所有 n 个函数与 x 轴所包围的面积都不能为 0，否则它们傅里叶变换的积在 $s=0$ 处为 0，并且卷积的结果与 x 轴所包围的面积也为 0。类似地，a 也不能为无穷。b 有时可以为 0，但是不能为无穷。显然，在原点处不能包含类似 $\Lambda(x)$ 的分量，因为类似 $\Lambda(x)$ 的函数在原点处将会有永久的拐角，从而使函数无法逼近高斯形式。

并不要求所有的变换在原点处都具有零斜率，但假设斜率不是无穷，通过相对于质心来表示函数的办法通常可以保证这一点。

在 x 域中，定理适用的条件可以表示如下。首先考虑相同实函数 $f(x)$ 的卷积，

$$f(x)*f(x)*f(x)*\cdots*f(x),$$

规定 $f(x)$ 的面积不能取负值。那么第一个条件（$a\neq 0$ 或 ∞）变为：

$$0<\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x<\infty\ 。$$

$F'(0)$ 应满足的条件为：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=0\ 。$$

要求 $F(s)$ 的二阶导数有限（b 有限）且非正，则

$$0\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x<\infty\ 。$$

还应该考虑二阶导数不连续的情况。但是 $f(x)$ 为实函数，$F(s)$ 的实部为偶函数，则 $F(s)$ 在原点两侧曲率相同。因此，所有的间断点都应在 $F''(s)$ 的虚部。但是 $F(s)$ 在 $s=0$ 处虚部为 0，因此取极限后，$F''(s)$ 在 $s=0$ 处的间断点的影响消失了。综上所述，只要 $f(x)$ 满足均值有限、方差有限且与 x 轴所包围的面积有限的条件就足够了。

对于不同函数卷积的情况，除了要求三阶矩绝对有限，Lyapunov 还提出要满足一个更复杂的条件以保证三阶矩不要太大。

练习 考虑 $(\mathrm{sinc}x)^{*n}$，$(\mathrm{sinc}^2x)^{*n}$，$[(1+x^2)^{-1}]^{*n}$，$[x\Pi(x)]^{*n}$，$[\Pi(x)\sin x]^{*n}$，$[\mathrm{e}^{-ax}\sin\beta x H(x)]^{*n}$ 的特性。

如果某个函数的傅里叶变换在有限点 $s=s_1$ 处为 0，所有变换的乘积也为 0，那么它们的乘积就不会是高斯形式。因此，在 x 域中所有的卷积函数都不能是矩形函数。这个结论也许没有什么实际意义，因为卷积的傅里叶变换在 $s>s_1$ 区间可以十分逼近高斯函数，使得对于一些场合和目的来说，0 与准确高斯值是不可分辨的。这就是有$[\Pi(x)]^{*n}$ 的情况。

两个域中对应关系的总结

表 8.5 列举了前面所讨论的结果，以供参考。

表 8.5　对应性质表

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(0)$	函数与 x 轴所包围的面积等于傅里叶变换的中心幅度
$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \frac{F'(0)}{-2\mathrm{i}\pi}$	一阶矩正比于傅里叶变换的中心斜率
$\langle x \rangle = -\frac{F'(0)}{2\pi \mathrm{i} F(0)}$	质心横坐标正比于傅里叶变换中心斜率与中心幅度的比值
$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = -\frac{F''(0)}{4\pi^2}$	二阶矩正比于傅里叶变换中心曲率
$\langle x^2 \rangle = -\frac{F''(0)}{4\pi^2 F(0)}$	x 的均方值正比于傅里叶变换中心曲率与中心幅度的比值
$\langle x \rangle_{f*g} = \langle x \rangle_f + \langle x \rangle_g$	函数卷积结果的质心横坐标等于函数质心横坐标的和
$\langle x^2 \rangle_{f*g} = \langle x^2 \rangle_f + \langle x^2 \rangle_g$	函数卷积结果的均方横坐标等于函数均方横坐标的和
$\sigma_{f*g}^2 = \sigma_f^2 + \sigma_g^2$	函数卷积结果的方差等于函数方差的和
如果 $f(x)$ 的 k 阶导数含有冲激，则 $F(s) \sim \vert s \vert^{-k}$	
如果 $f(x)$ 的 m 阶导数和 $g(x)$ 的 n 阶导数含有冲激，则 $f * g$ 的 $(m+n)$ 阶导数含有冲激	
$W_f = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x}{f(0)}$	$f(x)$ 的等效宽度等于它与 x 轴所包围面积除以它的中心幅度
$W_f = \frac{1}{W_F}$	函数的等效宽度和它的傅里叶变换的等效宽度互为倒数
$\vert f(x) \vert \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \vert F(s) \vert \mathrm{d}s$	最大可能幅度
$\vert f'(x) \vert \leqslant 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \vert sF(s) \vert \mathrm{d}s$	最大可能斜率
$\vert \int f(x)g(x)\mathrm{d}x \vert^2 \leqslant \int [f(x)]^2 \mathrm{d}x \int [g(x)]^2 \mathrm{d}x$	施瓦兹不等式
$\sigma_{\vert f \vert^2} \sigma_{\vert F \vert^2} \geqslant \frac{1}{4\pi}$	不确定性关系
$\Delta f(x) = 2 \mathrm{I_I}(x) * f(x)$	有限差是函数与奇脉冲对的卷积
$\Delta_a f(x) \supset 2\mathrm{i}\sin \pi a s F(s)$	间隔 a 上的有限差，对应变换域中乘以 $2\mathrm{i}\sin\pi a s$（注意：微分对应于乘以 $\mathrm{i}2\pi s$）
$a^{-1} \prod \left(\frac{x}{a}\right) * f(x) \supset \mathrm{sinc}\, as F(s)$	间隔 a 上的滑动平均，对应变换域中乘以 $\mathrm{sinc}\, as$
$\lim_{n \to \infty} f_1 * f_2 * \cdots * f_n = \mathrm{e}^{-ax^2}$	如果函数的傅里叶变换在原点处隆起，则大量这种函数的卷积结果逼近高斯函数（中心极限定理）

参考书目

Abramovitz, M., and I. A. Stegun: "Handbook of Mathematical Functions," U. S. Dept. of Commerce, Washington, D. C., 1964.

Doetsch, G.: "Theory and Application of the Laplace Transformation," Dover Publications, New York, 1943.

Jones, R. C.: "Phenomenological Discussion of the Response and Detecting Ability of Radiation Detectors," Porc. IRE, vol. 47, p. 1496, 1959.

Khinchin, Ya.: "Korrelationstheorie der Stationären Stochastischen Prozesse," *Math. Ann.*, vol. 109, pp. 604-614, 1934, reprinted in "Statistical Mechanics," Dover Publications, New York, 1949.

Uffink, J., and J. Hilgevoord: *Foundations of Physics*, vol. 15, pp. 925-945, 1985

Van der Merwe, A., et al., eds.: "Microphysical Reality and Quantum Description," pp. 91-114, 1988.

Wiener, N.: "The Fourier Integral and Certain of Its applications," Cambridge University Press (reprinted by Dover, New York), 1993.

习题

1. 推导 $\exp(-x^2) * \exp(-x^2)$ 的简单表达形式。

2. 证明：$(1+x^2)^{-1}$ 的自卷积和它本身只相差一个尺度因子。证明自卷积结果的宽度是原函数宽度的 2 倍，也就是说，在本例的卷积运算下宽度具有可加性。把这个结果与已知的方差的可加性统一起来。

3. 根据卷积函数宽度的性质，研究形如 $(1+x^2/a^2)^{-1} * (1+x^2/b^2)^{-1}$ 的函数及其宽度。

4. 用直接积分证明

$$\Lambda(x)H(x) \supset \frac{1}{\mathrm{i}2\pi s} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi s}\operatorname{sinc}s}{\mathrm{i}2\pi s}。$$

按照下面的步骤验证此结果：先用叠加和移位定理，求出 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)[\Lambda(x)H(x)]$ 的傅里叶变换，然后使用微分定理将其转换到 x 域。

5. 将上题的傅里叶变换分为实部和虚部，证明

$$\Lambda(x)H(x) \supset \frac{1}{2}\operatorname{sinc}^2 s + \frac{1-\cos\pi s\operatorname{sinc}s}{\mathrm{i}2\pi s}。$$

根据代数学，验证中心幅度和斜率分别与函数 $\Lambda(x)H(x)$ 的面积和一阶矩联系在一起。并注意到傅里叶变换是否是 hermitian 的。将 $\Lambda(x)H(x)$ 分为奇部和偶部两部分，分别求傅里叶变换。

6. 由于太阳黑子数的不规则变化，取连续 5 天的和对每日的黑子数序列做平滑处理；也就是说，每天的黑子数与前两天和后两天的黑子数相加。下面给出的是从 1900 年 1 月 1 日开始的 5 天连续和的序列：

45,35,25,15,5,0,0,0,0,15,50,80,100,125,125,100,80,70,45,30,30,30,35,60,80,90,95,100,90,85,75。

从这组平滑过的的序列中，我们能够推导出每天的实际黑子数是多少？

7. 证明：

$$W_{f\star g}=\frac{W_f W_g}{W_{fg}}$$

其中 W_f 是函数 $f(x)$ 的等效宽度。

8. 证明：对高斯函数的卷积，其等效宽度的平方具有可加性。

9. 证明：$4\text{sinc}^2 2s-\text{sinc}^2 s$ 的等效宽度是 1/3，并且计算 $\text{sinc}s+\text{sinc}^2 2s$ 的等效宽度。

10. 研究函数 $f(x)$ 的 Jones 带宽的性质，Jones 带宽定义如下：

$$\frac{\int_0^{\infty} FF^* \, \mathrm{d}s}{F_{\max}}$$

11. 证明 $f(x)H(x)$ 的自相关宽度是 $f(x)$ 的 2 倍。

12. 验证下列自相关宽度：

函数：	$x\Pi(x-\frac{1}{2})$	$\Pi(2x+\frac{3}{4})+\Pi(2x-\frac{3}{4})$	$e^{-x^2/2\sigma^2}$
宽度：	$\frac{3}{4}$	1	$2\pi^{\frac{1}{2}}\sigma$

13. 函数 $f(x)$ 的横坐标 x 被划分成有限个有限的区间(再加上两个半无穷的末端区间)，这些有限区间被不重叠地重新组合，形成一个新的函数，称之为 $f(x)$ 混组后的派生函数。例如，11 个脉冲的序列

$$\sum_{n=-5}^{n=+5}\Pi(11x-n)$$

和函数 $|x|\Pi(x/2)$ 分别是 $\Pi(x)$ 和 $\Lambda(x)$ 混组后的派生函数，反之亦然。证明若包含 $x=0$ 的区间在混组中没有被移动，则混组后的等价宽度不变；任何情况下混组后的自相关宽度不变。考虑混组对波形全部能量的影响，并且说出函数功率谱的哪些参数在混组后是不变的。

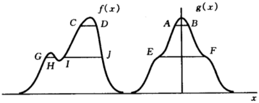


图 8.21 Steiner 对称

14. 偶函数 $g(x)$ 是由函数 $f(x)$ 经图 8.21 所示的对称化过程后得来的，图中 $AB=CD$，$EF=GH+IJ$，以此类推。这个转换过程被称为 Steiner 对称化过程，它被 Jacob Steiner 用来证明圆是指定面积下周长最小的图形。证明 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的自相关函数有相同的等效宽度。

15. 根据对称化过程说明函数 $\exp(-x)H(x)$ 和 $\exp(-|x|)$ 的关系，并且说明它们相应的功率谱是如何联系的。

16. 证明两个奇函数的卷积是偶函数。

17. 在函数和其自相关函数之间建立下列关系。

函数	自相关
$\Pi(x)$	$\Lambda(x)$
$e^{-\pi x^2}$	$2^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\pi x^2}$
$\delta(x)$	$\delta(x)$
$e^{-x}H(x)$	$\frac{1}{2}e^{-\lvert x\rvert}$
$e^{-\lvert x\rvert}$	$e^{-\lvert x\rvert}(1+\lvert x\rvert)$

18. 通过傅里叶变换域中的一个简单讨论，说明当 ω 很大时 $\exp(-\pi x^2)\cos\omega x$ 的自相关函数是 $2^{-\frac{3}{2}}\exp(-\frac{1}{2}\pi x^2)\cos\omega x$。

19. 在对 $\cos x$ 进行自相关时会出现一些问题。证明：在某种意义下余弦函数的自相关函数仍是余弦函数。

20. 证明函数自相关宽度的乘积及其变换满足下式：

$$W_{f\star f^*}\cdot W_{F\star F^*}=\frac{(\int f\mathrm{d}x)^2(\int F\mathrm{d}s)^2}{(\int f^2\mathrm{d}x)^2}$$

并且该乘积没有非零下界。

21. 证明下列表达式：

$$\lvert f*g\rvert\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\lvert FG\rvert\,\mathrm{d}s$$

22. 自互易变换 我们知道至少有一个函数 $f(\cdot)$ 同时也是它自己的傅里叶变换 $F(\cdot)$，因为

$$e^{-\pi x^2}\supset e^{-\pi s^2}。$$

有人说下式

$$f(x)=e^{-\pi(x/5)^2}+5e^{-\pi(5x)^2}$$

也是一个傅里叶变换与其自身相同的函数，也即 $F(s)=f(s)$，你能够证明或者证伪这个说法吗？

23. 波包谱 证明

$$\exp(-\beta x^2)\cos\alpha x\supset(\frac{\pi}{\beta})^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\left(\frac{\alpha^2+4\pi^2s^2}{4\beta}\right)\right]\cosh(\frac{\pi\alpha s}{\beta})$$

24. 冲浪 在冲浪者中间流传着一个传说，即每一次第七个浪会更大一些。在波谱域中相应的特征是什么？

25. Hermite 多项式对 从下列傅里叶变换式对

$$xe^{-\pi x^2} \supset -ise^{-\pi s^2}$$

$$(4\pi x^2-1)e^{-\pi x^2} \supset -(4\pi s^2-1)e^{-\pi s^2}$$

$$(4\pi x^3-3x)e^{-\pi x^2} \supset i(4\pi s^3-3s)e^{-\pi s^2}$$

$$(16\pi^2 x^4-24\pi x^2+3)e^{-\pi x^2} \supset (16\pi^2 s^4-24\pi s^2+3)e^{-\pi s^2}$$

可以得出，一般地，

$$H_n(\sqrt{2\pi}x)e^{-\pi x^2} \supset (-i)^n H_n(\sqrt{2\pi}s)e^{-\pi s^2}\text{。}$$

其中，$H_n(x)$ 为 Hermite 多项式：$1,2x,4x^2-2,8x^3-12x,16x^4-48x^2+12,\cdots,n=0,1,2,\cdots$。

26. 计算音乐　描述如何能够产生一种持续升调，但保持在人耳可听到的范围之内的声音。

27. 听觉　一个背对着小提琴手的音乐家能够判断出这个演奏者是正在缓慢地离开还是在减弱声音。当被问到这种能力时，音乐家回答说："小提琴手可以响亮或轻柔地演奏一个单音并保持音质不变，但是当他在持续演奏一个单音并向外走开时，音色将会有明显的改变。声音听起来会更纯 —— 因为泛音减弱了"。一个声学工程师说："在你听到滴答声的时候，你也接收了墙壁反射回来的能量。较远处同样的滴答声听起来更弱，但是耳朵接收到的反射能量是大致相等的。因此，主观感觉和一个近处较弱的滴答声是不一样的。既然冲激响应是不同的，自然地，小提琴的声音听起来也就不同"。如果这种解释是正确的，说明它和音乐家的解释是一致的。

28. 傅里叶变换相位的中心斜率　$F(s)$ 是给定实函数 $f(x)$ 的傅里叶变换，用 $\phi(s)$ 表示 $F(s)$ 的相位。证明，如果 $\phi(s)$ 经过原点，其在原点处的斜率是：

$$\phi'(0)=-2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x\Big/\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\text{。}$$

当 $f(x)=xe^{-x}H(x)$ 时，验证这一结论。

29. 滑动平均的恢复　已知 $g(x)$，它是 $f(x)$ 与矩形函数 $\Pi(x)$ 卷积平滑的结果，即：$g(x)=\Pi(x)*f(x)$。希望得到 $f(x)$，能否找出逆运算符 $\Pi^{-1}(x)$，使得 $\Pi^{-1}(x)*\Pi(x)=\delta(x)$，或者是否能求出 $(\mathrm{sinc}s)^{-1}$ 的傅里叶变换。

30. 加权滑动平均的恢复　试着找出用三角窗加权的滑动平均运算的逆运算，也就是说，如果 $g(x)=\Lambda(x)*f(x)$，求 $\Lambda^{-1}(x)$，满足条件：若已知 $g(x)$，则可以通过运算 $f(x)=\Lambda^{-1}(x)*g(x)$ 求得 $f(x)$。如果这种方法是有效的，那么 $\Lambda^{-1}(x)*\Lambda(x)=\delta(x)$。前提假设是：

$$f(x)=g''(x-1)+2g''(x-2)+3g''(x-3)+\cdots$$

对一些特例，通过画出前 2 项或 3 项来检验这个公式，并试着推导它。

31. 矩　确定常数 a,b 和 c，使得 $f(x)=a+b\cos 2\pi cx$ 在区间 $-1<x<1$ 上能够很好地拟合 $\mathrm{sinc}x$。在什么情况下，我们可以认为 $F(s)$ 与 $\Pi(s)$ 类似？

32. sinc 函数的性质　从本章参考书目 Abramovitz 和 Stegun(1964) 的著作第 75 页中，我们发现

$$\mathrm{sinc}x=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\text{。}$$

我们可以认为式中的每个抛物线因子通过 $x = 1,2,\cdots n$ 来逐渐改变乘积。证明 $(1-x^2)(1-x^2/4)(1-x^2/9)$ 的展开式系数和 $\mathrm{sinc}x$ 的泰勒级数展开的系数不同。为什么？为什么中心极限定理不适用？

33. 两种推理方法 一个在时域描述而要求在频域回答的问题，可以有两种途径来解决：把函数变换到频域并解决变换后的新问题，或者在时域中求解，然后将结果变换到频域。考虑下面的问题："一个短脉冲近似包含有直至其滚降频率（其数值为脉冲持续时间倒数的分数倍）的平坦频谱，但是对于一个由两个完全相同的而不是相当近似的连续脉冲组成的波形来说，是不是也是这样的？其频谱是否有不包含任何信息的频率点（零点）？"

推导这个结论的一种方法是：脉冲对可以表示为一个单脉冲波形和脉冲对 $\frac{1}{2}\delta(t)+\frac{1}{2}\delta(t-T)$ 的卷积，其中 T 是脉冲间的间隔。相应地，它的频谱包含因子 $\cos\pi Tf$，在特定的一些频率点处出现了零点。这个问题并不要求计算完整的频谱以及频谱零点处的频率，但是和一些重要的问题一样，我们所关注的仅仅是某种特定的现象是否存在。因此，这里的推理过程很简洁。试着用另一种方法来推导这个结论。

34. 波包横坐标的方差 推导波包 $f(x)=\exp[-\pi(x/W)^2]\cos 2\pi ux$ 的方差 $\langle x^2\rangle$。

35. 一个函数由一个不对称的三角形峰和它的反射构成，定义为：

$$f(x)=\begin{cases}k\mid x\mid,\cdots & 0\leqslant\mid x\mid<a\\ 1-\mid x\mid,\cdots & a\leqslant\mid x\mid<1\\ 0,\cdots, & \mid x\mid>1\end{cases}$$

其中 k 和 a 均位于 0 和 1 之间。求它的傅里叶变换 $F(s)$。

36. 雷达脉冲发生器 为了用持续时间 $\Delta=0.1\ \mu\mathrm{s}$ 的脉冲把功率为 1 MW 的无线电波输出到天线上，需要在发生器的输入端用 $15000\Pi\left(t-\frac{1}{2}\Delta\right)$ V 的电压来激励。一种实现的方法是花费大约 1 ms 时间把一个传输线导体的电压稳定地控制在 30 kV。传输线的特性阻抗 Z_0 要等于发生器的输入阻抗。在 $t=0$ 时，开关把充电的传输线和发生器接通，把 15 kV 的电压加到发生器的输入端。电荷以恒定的速率（持续 0.1 μs 直到全部的电荷都被消耗）流入传输线，于是，发生器激励将下降到零并且在发射天线端的 r.f.（射频）脉冲也将终止。(a) 请问传输线的长度必须长多少米？(b) 从发生器端看进去，到传输线部分的输入阻抗是多少？求出电压传递函数（它是频率的函数）。(c) 请问传输线部分的冲激响应是什么？

37. 用有限差分表示函数 依据图 8.17 做这个练习。

38. 阅读期刊 浏览近期期刊中有关本领域的研究，找到一篇你感兴趣的论文，并且以表格的形式总结一个提纲。这个表格要能够使你的教师给班里的同学就这个工作做一个 10 分钟左右的讲座，并且不需要引用原文。

39. 设计一个家庭作业 设计一个适合你们班的家庭作业问题，并把合适的解答一起上交。记住，问题和练习是有区别的。

40. 薛定谔方程 将量子力学的基本原理应用于一个谐波振荡器，谐波振荡器是一个受弹性（弹性限度内的抗挠性）为 k 的弹簧约束的质量为 m 的物体，它的空间波函数 $\Psi(x)$（它的模平方 $\Psi\Psi^*$ 给出了物体在 $x\pm\frac{1}{2}\mathrm{d}x$ 的之间的相对概率）服从二阶线性微分方程：

$$\frac{h}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}x^2}+E\Psi-\frac{1}{2}kx^2\Psi=0\ 。$$

对于各种允许的能量 $E_n = h\omega(n+\frac{1}{2})$，$n = 0, 1, 2, \cdots$ 方程的解为：

$$\Psi_n(x)=\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n n!}}H_n(\alpha x)\exp(-\alpha x^2/2),$$

其中 $\omega^2 = k/m$，$\alpha = (mk/h)^{\frac{1}{4}}$。$H_n$ 是列表在习题 8.25 中的 Hermite 多项式，其中 Hermite-Gauss 函数 $H_n(x)\exp(-x^2/2)$ 是其本身的傅里叶变换。这个解隐含了这样一个关系——如果对薛定谔方程逐项作傅里叶变换，所得到的变换 Ψ 的微分方程仍然是一个薛定谔方程。是不是这样呢？

第 9 章

波形、频谱、滤波器和线性性

本章从系统输入可以分解为指数或谐波分量的观点来讨论线性系统（比如电滤波器）的响应，并且提出了在时域考察滤波器作用的等效方法。此外，还推导了线性性（Linearity）与卷积之间的基本联系。

电波形与频谱

一个电信号 $V(t)$ 的波形是一个关于时间 t 的单值实函数，其中，t 代表物理意义上可实现的时间。显然，我们不可能产生一个不连续的、无限大的或是无始无终的电流或电压信号，但是通常我们还是习惯于将阶跃、冲激以及简谐波函数也叫作电信号的波形函数。当讨论电路的冲激响应或者阶跃响应时，我们隐含着一个更严格的表述，即当激励为一个趋于不连续阶跃或无穷脉冲的函数序列时系统的响应。这同样也适用于对输入为交流或直流情况的描述。

信号波形 $V(t)$ 的频谱 $S(f)$ 定义为它的傅里叶变换（或是极限意义下的傅里叶变换）：

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} V(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

据此

$$V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{i2\pi ft} df \text{ 。}$$

因为 $V(t)$ 定义为实函数，故频谱函数 $S(f)$ 的实部必定为偶函数，而它的虚部必定为奇函数（见第 2 章），即 $S(f)$ 是 Hermitian 的。

波形有时会有一些特殊的限制，表 9.1 给出了一些常见的限制。

我们在第 2 章中已经以方式 1 的形式给出了一种波形和频谱函数之间的变换公式，该变换有时写成方式 2 的形式，即

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} V(t)e^{-i\omega t}dt,$$

$$V(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{i\omega t}d\omega \text{。}$$

将方式 1 中的 $2\pi f$ 用 ω 代替，引入了系数 $1/2\pi$，当然，这个系数根据方式 2 的公式中 t,ω 和 x,s 的一致对应关系可以写在任一个积分的前面。这里给出的公式应用非常广泛，如果用 df 代替公式中的 $d\omega/2\pi$，那么公式是对称的，一些使用者就是基于这一事实来记忆非对称系数的位置的。方式 1 的公式可以直接不加变化地推广到多维情况中去，但在电路理论中这一事实不受重视，因为 t 没有高阶的推广。

表 9.1 对应的限制

名称	波形限制	频谱限制
实函数	$\text{Im}V(t) = 0$	$\text{Re}S(f)$ 为偶数，$\text{Im}S(f)$ 为奇数
开关函数	$V(t) = 0, t < 0$	$\text{Im}S(f)$ 是 $\text{Re}S(f)$ 的希尔伯特变换
非负函数	$V(t) \geqslant 0$	情况复杂
有限能量	$\int_{-\infty}^{\infty} V^2 dt = W$	$\int_{-\infty}^{\infty} SS^* df = W$
有限持续期	$V(t) = 0, \lvert t \rvert > T$	$S(f)$ 完全由 $\text{III}(Tf)S(f)$ 决定
带限函数	$V(t)$ 完全由 $\text{III}(Mt)V(t)$ 决定	$S(f) = 0, \lvert f - f_0 \rvert \geqslant M$

我们有时还可能遇到具有如下对称形式的方式 3：

$$S(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} V(t)e^{-i\omega t}dt,$$

$$V(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{i\omega t}d\omega\text{。}$$

$V(t)$ 也可以是一个幅度变化的冲激串。特别地，冲激串可以是等间隔的，在 $t = t_i$ 时刻幅度为 a_i，其中 i 和 t_i 都是整数。这样，一般的连续时间理论就涵盖了可以用系数序列 $\{a_i\}$ 表示的信号且直接产生了数字信号处理(DSP) 这个主题。

另外，Hartley(1942) 还给出了一个有趣的具有完全对称形式的公式对：

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} V(t)(\cos\omega t + \sin\omega t)dt,$$

$$V(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\omega)(\cos\omega t + \sin\omega t)d\omega\text{。}$$

就像在第 13 章所定义的那样，$\cos\omega t + \sin\omega t$ 显然是一个傅里叶内核函数。傅里叶定理有对应的内容(第 12 章)，并且自从 1983 年以来，已有数百篇论文研究过快速 Hartley 算法(见 Proc. IEEE, vol. 82, March 1994，带参考书目的特辑)。

滤波器

我们这里说的滤波器泛指那些有输入和输出的物理系统，其它的等效术语有变换器、四端

网络和双端口元件等。虽然下面采用的大多是电学术语，但其实这些见解同样适用于机械学或是声学中的变换器，或是其它领域传送振动或震荡的等效设备。当然，即使是在电学领域，滤波器也呈现为多种不同的形式，从大量的线圈和电容到难以理解的几何结构波导器件。

当一个波形 $A\cos 2\pi ft$ 输入到一个线性时不变滤波器时，正如后面将要证明的，其输出仍然是单谐波，但通常它的振幅和相位将发生改变。设输出波形为 $B\cos(2\pi ft+\phi)$，那么滤波器完全可以用一个与频率有关的复数量 $T(f)$ 来表征，复数量的模为 B/A，相位为 ϕ，即

$$T(f)=\frac{B}{A}e^{i\phi}。$$

我们把 $T(f)$ 称为传输因子、传递函数、系统函数，或称为滤波器的频率响应。

要求得输入波形 $V_1(t)$ 通过滤波器后的输出波形 $V_2(t)$，可以先求出 $V_1(t)$ 的频谱 $S_1(f)$，对各个频谱分量分别乘以对应的传输因子，得到 $V_2(t)$ 的频谱 $S_2(f)$，然后再利用傅里叶反变换还原出 $V_2(t)$，即

$$S_2(f)=T(f)S_1(f),$$

那么

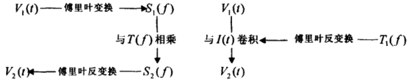
$$V_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}T(f)S_1(f)e^{i2\pi ft}\,df\ 。\tag{1}$$

由于频域的相乘相当于时域的卷积，所以 $V_2(t)$ 也可以由 $V_1(t)$ 与一个特定滤波器特征函数卷积而直接得到，即

$$V_2(t)=I(t)*V_1(t)。\tag{2}$$

其中，$I(t)$ 为 $T(f)$ 的傅里叶反变换。

这两个过程可以用图表示如下：



我们把所有的量合并在一个图中，根据惯例，时域函数在左边，其对应的变换在右边，两者的相互关系可以简明地总结如下：



由公式(1)可以看到，当输入波形的频谱 $S_1(f)=1$，即输入波形 $V_1(t)=\delta(t)$ 时，输出波形即为滤波器的特征波形 $I(t)$。通信中将其称为滤波器的“冲激响应”。很多情况下它可以像频率特征函数 $T(f)$ 一样用来表征一个滤波器的特性，而且更容易通过实验方法得到。公式(2)简单地将 $V_1(t)$ 分成冲激序列，并且把 $V_2(t)$ 表示为滤波器对每个冲激分量响应的和。

第三种表征滤波器特性的方法是用它的"阶跃响应"，即当输入为阶跃函数 $V_1(t) = H(t)$ 时，滤波器输出波形。令这个输出函数为 $A(t)$。同时，将 $V_1(t)$ 看作由阶跃序列 $V'_1(t)H(t-\tau)$ 构成，我们可以得到

$$V_2(t) = A(t) * V'_1(t)。\tag{3}$$

将式子两端进行傅里叶变换，并与公式(1) 比较，我们可以得到阶跃响应与滤波器传输特性之间的关系：

$$S_2(f) = \overline{A}(f)\mathrm{i}2\pi f S_1(f),\tag{4}$$

因此有

$$T(f) = \mathrm{i}2\pi f\,\overline{A}(f),$$

通过进一步的变换我们可以得到滤波器的阶跃响应和其冲激响应之间的关系：

$$I(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t)。$$

使用不同的因子，重新对公式(4) 进行变换，我们可以得到

$$V_2(t) = A'(t) * V_1(t),$$

或是一些含有更高次导数或者积分的公式，甚至包括分数阶的导数和积分。

图 9.1 给出了与阶跃响应 $A(t)$ 有关的一些关系。

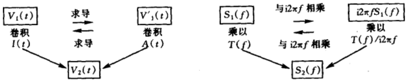


图 9.1 涉及冲激响应和阶跃响应的操作及其在变换域内的对应操作

把各种滤波过程总结如下表。

输入分解为以下形式	用以下特性描述滤波器	傅里叶变换
正弦或余弦波	传输特性 $T(f)$	$I(t)$
冲激函数	冲激响应 $I(t)$	$T(f)$
阶跃函数	阶跃响应 $A(t)$	$T(f)/2\pi\mathrm{i}f$

这样，在滤波器理论中有以下几种形式的傅里叶积分：

$$V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi ft}\mathrm{d}f$$

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} T(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi ft}\mathrm{d}f$$

$$A(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(f)}{f}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi ft}\mathrm{d}f,$$

所涉及到的卷积积分如下：

$$V_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}I(t-\tau)V_1(\tau)\mathrm{d}\tau=I(t)*V_1(t)=A'(t)*V_1(t)$$

$$V_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(t-\tau)V'_1(\tau)\mathrm{d}\tau=A(t)*V'_1(t)。$$

线性滤波器理论的通用性

本节中，符号 V 既用来表示输入也用来表示输出，但是讨论并不局限于电参数。所给的讨论不仅可以做出机械的、声学的、光学的解释，而且还可以输入是电压而响应是电流，或者反过来。当输入电压激励而输出电流响应时，$T(f)$ 称为传输导纳；而当输入是电压而响应是电流时，$T(f)$ 则称为传输阻抗。这里的术语*传输系数*包括传输阻抗、传输导纳，也包括当网络的输入和输出都是电压或是电流时无量纲的传输系数。尽管"传输"一词就像在"传输导纳"中表示的意思一样，包括了在一点激励，而在另一点产生响应的情况，然而"传输系数"却包括了在激励点处测量的响应。因而传输导纳包括了一点上的简单导纳。

只要满足时不变（见下面）的条件，那么前面所讨论的内容适用于速度／力、流／压力、电磁场比和其它可以适用线性叠加原理的主题。

数字信号是由序列，或是如{1　2.7　7.4　20.1　…}的数组组成的，它与连续时间的冲激函数串在信息内容上是等价的，本例中可以写成如下的形式：

$$\delta(t)+2.7\delta(t-1)+7.4\delta(t-2)+20.1\delta(t-3)+\cdots$$

因此，本节的理论也适用于离散时间信号。然而，当要进行数值计算时，实际的操作是不同的，它将简化为第 3 章所讲的卷积和。这种情形类似于通过对离散值求和的方式计算积分，此过程不同于通过分析计算积分。

在数字信号传输中，滤波器可以用于噪声的抑制、锐化，确保与频谱分配的一致性，对时钟电路进行同步，以及其它的目的。这些滤波器主要是用由导体、半导体和介电材料制成的电阻、电容、电感以及有源电路元件构成的。对于研究由这些器件组成的网络来说，电路图是一个必不可少的工具。电路图原是指表示线圈、彼此隔开的电容器、接头位置和联线等布局的一种示意图，而在这里，它根本不再表示一个物理器件，而是表示一组微分方程。这就很好地说明了电路图可以从电气工程移植到机械振动或声学领域。当然，从物理器件抽象出电路图的工作需要对物理概念的深入理解。

抽象工作完成后，得到的数学模型就可以直接处理而和实际的物理世界无关。信号理论是更高级的数学抽象，它把微分方程隐藏在"黑盒子"中并全部用操作符代替。信号发生器、滤波器、传输和反馈系统，以及检测器等之间的互连都可以用流程图来表示。虽然仍是由电路图而来，流程图却淡化了电路的概念而强调了全操作符的概念，例如矩阵操作符就是数字信号处理理论中一类重要的操作符，这样流程图再次与物理现实脱离了（这样通过两次抽象除去了具体的实现细节）。

数字滤波

离散时间信号，当时间 t 取整数时，可以看作是对连续时间信号 $V(t)$ 进行规则采样而得到的。采样得到的序列 $f(n)$，其中 n 为整数，是潜在的"真实"信号 $V(t)$ 的近似表示。这样说并不

是意味着信号 $f(n)$ 比 $V(t)$ 要差。正相反，测量值 $f(n)$ 是我们了解信号 $V(t)$ 的基础。

简单的采样装置包括一个时钟，它把 $V(t)$ 和一个电容连通一个短的充电时间，断开时刻电容上的电压被数字化并且记录下来。这就是采样保持电路。另一种通常更可取的间接方法是将 $V(t)$ 与一个压控振荡器连接一个短的时间，把信号传给一个计数器，对震荡的周期进行计数并记录。无论采用哪种装置，采样都是信号在一个有限时间内的加权平均。

并不是所有的离散信号都是某一个连续函数的采样，例如一座机场每日的着陆次数，某日的降雨量等，这种名副其实的离散时间信号是现实存在的。

离散时间信号 $f(n)$ 当作输入信号时，通常需要进行滤波：低通滤波器可以用来减少不期望的随机噪声和快速的系统波动；高通滤波器通常用来减少不期望的漂移；精密的带通滤波器则可以用来使数字信号满足电话线或无线传输的规定带宽的要求。

滤波操作实际上就是将输入信号与期望的离散时间冲激响应 $h(n)$ 进行卷积，多数情况下 $h(n)$ 可以通过对给定的频率响应进行傅里叶变换得到。设输出信号为 $g(n)$，我们有

$$g(n) = h(n) * f(n)。$$

可以与连续时间卷积积分进行比较：

$$V_2(t) = I(t) * V_1(t)\ 。$$

在第 3 章已经讨论了离散卷积的方法。在第 13 章中，我们将要讨论一种在控制系统分析中非常有用的等效 z 变换。理论上，滤波器的冲激响应 $h(n)$ 可以有无穷多项。这里可能存在一个误区，因为常见到术语"有限长冲激响应"(FIR) 滤波器，但是在数值计算中并没有说冲激响应是有限长的。

如果让一个离散时间信号 $f(n)$ 通过与一个连续时间冲激响应 $I(t)$（比如 $e^{-t}H(t)$）卷积进行滤波，我们可以很容易地计算或作图得到

$$V_2(t) = I(t) * \left[\sum f(n)\delta(t-n)\right],$$

但是输出 $V_2(t)$ 将不再是一个离散时间信号。这个过程相当于将 $I(t)$ 转化为一个离散时间冲激响应 $h(n)$。其中，$h(0) = 0.5$，$h(1) = e^{-1}$，$h(2) = e^{-2}$，…，初值 $h(0)$ 取为 $I(0-)$ 和 $I(0+)$ 的均值。

例：$h(n)$ 如前所述，取 $f(n) = \{1\ 2\ 1\}$，

$$\begin{aligned} g(n) &= \{0.5\ e^{-1}\ e^{-2}\ e^{-3}\ \cdots\} * \{1\ 2\ 1\} \\ &= \{0.5\ 1.37\ 1.37\ 0.69\ 0.25\ \cdots\} \end{aligned}$$

由图 9.2 可以看出，在 t 的整数点上，$V_2(t)$ 与 $g(n)$ 的值相等，从而可以说明离散序列 $h(n)$ 与连续的冲激响应 $I(t)$ 是等效的。

对定理的解释

第 6 章讨论过的关于函数及其傅里叶变换的所有定理都可以用波形、谱和滤波器来解释。为参考方便起见，表 9.2 列出了这些定理，所使用的符号与本章一致。下面只对前四个定理进行讨论。

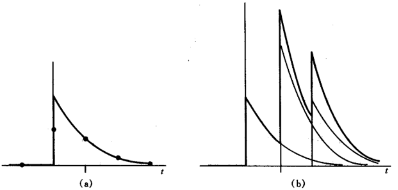


图 9.2 (a) 连续时间冲激响应 $I(t)=e^{-t}H(t)$ 和它在 t 的整数点上的采样 $h(n)$

(b) 当输入为 $f(n)=\{1\ 2\ 1\}$ 时，引起三个响应 $e^{-t}H(t)$，$2e^{-(t-1)}H(t-1)$，$e^{-(t-2)}H(t-2)$（细线），它们的和是 $V_2(t)$（粗线），$V_2(t)$ 的采样与 $g(n)=h(n)*f(n)$ 一致

表 9.2 波形和频谱的对应关系

定理	波形 $V(t)$	频谱 $S(f)$
相似性	$V(at)$	$\frac{1}{\mid a\mid}S(\frac{f}{a})$
叠加	$V_1(t)+V_2(t)$	$S_1(f)+S_2(f)$
移位	$V(t-T)$	$e^{-i2\pi fT}S(f)$
调制	$V(t)\cos\omega t$	$\frac{1}{2}S(f-\frac{\omega}{2\pi})+\frac{1}{2}S(f+\frac{\omega}{2\pi})$
卷积	$I(t)*V_{in}$	$T(f)S_{in}(f)$
自相关	$V_1(t)*V_1(-t)$	$\mid S_1(f)\mid^2$
微分	$V'(t)$	$i2\pi fS(f)$
	$V''(t)$	$-4\pi^2f^2S(f)$
频域微分	$tV(t)$	$-S'(f)/i2\pi$
	$t^2V(t)$	$-S''(f)/4\pi^2$
有限差分	$\Delta V(t)=V(t+\frac{1}{2}T)-V(t-\frac{1}{2}T)$	$2i\sin\pi TfS(f)$
二阶差分	$\Delta^2V(t)$	$-4\sin^2\pi TfS(f)$
滑动平均	$\frac{1}{T}\prod(\frac{t}{T})*V(t)$	$\frac{\sin\pi fT}{\pi fT}S(f)$
瑞利	$\int_{-\infty}^{\infty}[V(t)]^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}SS^*df$	
能量	$\int_{-\infty}^{\infty}V_1(t)V_2(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}S_1S_2^*df$	
定积分	$\int_{-\infty}^{\infty}V(t)dt=S(0)$	

续表 9.2

定理	波形 $V(t)$	频谱 $S(f)$
重心	$\langle t\rangle=\dfrac{\int_{-\infty}^{\infty}tV(t)\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{\infty}V(t)\mathrm{d}t}=-\dfrac{S'(0)}{2\pi\mathrm{i}S(0)}$	
一阶矩	$\int_{-\infty}^{\infty}tV(t)\mathrm{d}t=\dfrac{S'(0)}{-2\pi\mathrm{i}}$	
惯性矩	$\int_{-\infty}^{\infty}t^2V(t)\mathrm{d}t=\dfrac{S''(0)}{-4\pi^2}$	
n 阶矩	$\int_{-\infty}^{\infty}t^nV(t)\mathrm{d}t=\dfrac{S^{(n)}(0)}{(-2\pi\mathrm{i})^n}$	
等效宽度	$\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{V(t)}{V(0)}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{S(f)}{S(0)}\mathrm{d}f=1$	
不等式	$\mid V(t)\mid\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\mid S(f)\mid\mathrm{d}f$	
	$V'(t)\leqslant 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\mid fS(f)\mid\mathrm{d}f$	

相似性定理 本定理中，周期和频率的互易关系是非常明显的，因为对时间尺度压缩一个给定的因子相当于压缩了所有谐波分量的周期，因此就以同样的因子提高了每个分量的频率。因为 $V(0)$ 不随时间尺度变化而改变，由定积分定理可知频谱下的面积保持不变，因此当频谱扩展到更高频率时，补偿因子 $\mid a\mid^{-1}$ 相应地降低频谱的幅度。

叠加定理 即使把这个定理转换为电波形和谱的说法，它也只是傅里叶变换线性性的一个简单表达。该定理对于线性系统中的波形信号是成立的，当然，即使对非线性电路中的波形信号，它也必须成立。然而，变换的线性性质使它适合于处理线性问题。

移位定理 当信号波形延迟了一个给定时间 T 时，它的谐波成分所受到影响是不同的。比如频率恰好等于 T^{-1} 或其整数倍的谐波成分，根本不受影响；周期远大于 T 的分量受影响较小，但是周期大小同 T 值，相比较小的分量，相位受到的影响就会很大。一般地，我们可以说周期 $T_1=f_1^{-1}$ 的分量，它的幅度不变但是相位延迟了 $2\pi T/T_1$。因此，每个分量 $S(f_1)$ 在移位后变为 $\exp(-\mathrm{i}2\pi f_1T)S(f_1)$。

调制定理 把一个角频率为 ω 的音频信号调制到一个角频率为 Ω 的载波上，调制后的波形为：

$$(1+M\cos\omega t)\cos\Omega t,$$

其中 M 是调制深度。该波形和未调制载波 $\cos\Omega t$ 的不同之处在于加了一个参量 $M\cos\Omega t\cos\omega t$，该量的形式为调制定理所适用的形式。

调制定理说明，如果信号 $V(t)$ 的傅里叶变换为 $S(f)$，那么波形 $V(t)\cos\omega t$ 的傅里叶变换

可以把 $S(f)$ 两分为相同的两半，其中之一向右移动一个量 $\omega/2\pi$，另一个向左移动相等的距离。因此，如果

$$V(t) = M\cos\Omega t,$$

那么

$$S(f) = \frac{1}{2}M\delta(f+\frac{\Omega}{2\pi}) + \frac{1}{2}M\delta(f-\frac{\Omega}{2\pi})$$

故，$M\cos\Omega t\cos\omega t$ 的傅里叶变换是：

$$\frac{1}{4}M\delta(f+\frac{\Omega}{2\pi}+\frac{\omega}{2\pi}) + \frac{1}{4}M\delta(f+\frac{\Omega}{2\pi}-\frac{\omega}{2\pi}) + \frac{1}{4}M\delta(f-\frac{\Omega}{2\pi}+\frac{\omega}{2\pi}) + \frac{1}{4}M\delta(f-\frac{\Omega}{2\pi}-\frac{\omega}{2\pi})。$$

最后这个表达式必须加上载波 $\cos\Omega t$ 的频谱(叠加定理)，来得到调幅信号 $(1+M\cos\omega t)\cos\Omega t$ 的频谱。通过这种方法，可以产生简单调制理论的常见边带(见图 9.3)。

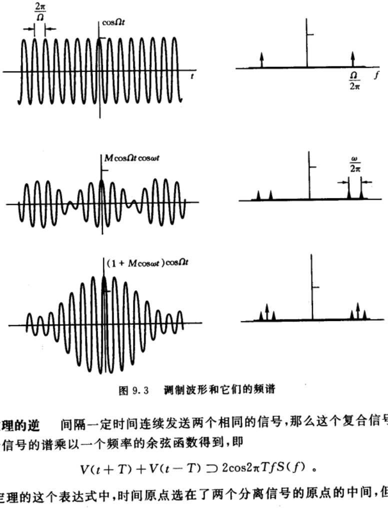


图 9.3 调制波形和它们的频谱

调制定理的逆 间隔一定时间连续发送两个相同的信号，那么这个复合信号的频谱可以通过对一个信号的谱乘以一个频率的余弦函数得到，即

$$V(t+T) + V(t-T) \supset 2\cos 2\pi T f S(f) 。$$

在逆定理的这个表达式中，时间原点选在了两个分离信号的原点的中间，但我们也可以

写为(见图 9.4)：

$$V(t)+V(t-2T) \supset 2e^{-i2\pi Tf}\cos 2\pi Tf S(f) 。$$

这两种表达式都可以由移位定理直接得到。

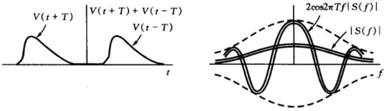


图 9.4　调制定理的逆

线性和时不变

设信号 $V_2(t)$，$W_2(t)$ 分别是一个滤波器对激励信号 $V_1(t)$，$W_1(t)$ 的响应。如果无论选择什么样的 $V_1(t)$，$W_1(t)$ 都有 $V_1(t)+W_1(t)$ 通过滤波器的响应是 $V_2(t)+W_2(t)$，那么就可以说这个滤波器是线性的。有时还会加上一个条件，对任意 a 和 $V_1(t)$，$aV_2(t)$ 是 $aV_1(t)$ 的响应，但是，我们可以从叠加性质推出这个关系(先证明 a 为整数的情况，然后证明整数比的情况[①])。

时不变性质是指对任何 T 和 $V_1(t)$ 来说，信号 $V_1(t-T)$ 的响应都是 $V_2(t-T)$。

作为线性时不变的后果，一个激励 $A\cos 2\pi ft$(其中 f 表示频率)的响应是

$$B\cos(2\pi ft-\phi),$$

其中 ϕ 和 B/A 可以随频率的改变而变化。所以，响应具有与激励相同的形式，但在相位上可能延迟了一个 ϕ，幅度上可能变化了一个因子 B/A。量 ϕ 和 B/A 是滤波器的特性，而且可以用一个复量 $T(f)$ 简单地表示，这个量就是传输因子，定义为

$$T(f)=\frac{B}{A}e^{i\phi}。$$

下面将要证明这个命题，它的本质是一个给定频率的谐波形式的激励，其响应也具有相同的形式和相同的频率，而与频率的选择无关。这个性质有时也不严格地表述为："谐波输入、谐波响应。"

令输入激励为单位强度，并且是一个复时间函数 $\hat{V}_1(t)$ 的实部，其中 $\hat{V}_1(t)$ 定义为：

$$\hat{V}_1(t)=e^{i2\pi ft}。$$

那么，响应可以表示为：

$$\hat{V}_2(t)=T(f)e^{i2\pi ft}。$$

信号表达式上面的抑扬符号提醒我们，与习惯不同，我们使用的是复的瞬时值而不是实的。这

---

① 当从头开始就不排除电压是无理数这种可能时，可以参考 Newcomb(1963) 作为数学考虑的指南。

样做可以带来代数上的简化。

为了证明这一声明，令系统对输入 $\hat{V}_1(t)=\exp(\mathrm{i}2\pi ft)$ 的响应为关于 f 和 t 的一般函数 $K(f,t)\exp(\mathrm{i}2\pi ft)$，为方便起见，指数因式被提了出来。现在，输入一个有延迟的激励 $\exp[\mathrm{i}2\pi f(t-T)]$，由于时不变性质，输出响应为 $K(f,\ t-T)\exp[\mathrm{i}2\pi f(t-T)]$。然而，延迟后的激励可以表示为原始激励与一个常数的乘积，即

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f(t-T)}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fT}\hat{V}_1(t),$$

因此，由于线性性质，系统的响应可以表示为原始响应和同一个常数的乘积，即

$$K(f,t-T)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f(t-T)}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fT}K(f,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi ft},$$

因此，

$$K(f,\ t-T)=K(f,t),$$

即，$K(f,t)$ 是时不变的，可以简单地表示为 $T(f)$。这就证明了谐波激励、谐波响应这一基本性质正是线性和时不变的结果。

现在，我们证明激励与响应之间存在下面的卷积关系是一个等效条件。卷积关系为

$$V_2(t)=I(t)*V_1(t)。$$

由于滤波器是线性的，所以响应可以用激励 $V_1(t)$ 的最一般的线性泛函形式来表示，即令：

$$V_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}J(t,t')V_1(t')\mathrm{d}t'。$$

已知系统是时不变的，故对于所有的 T 输入 $V_1(t-T)$ 输出 $V_2(t-Y)$，即有

$$V_2(t-T)=\int_{-\infty}^{\infty}J(t,t')V_1(t'-T)\mathrm{d}t',$$

或

$$V_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}J(t+T,\ t'+T)V_1(t')\mathrm{d}t'。$$

因此，对所有 T，$J(t,t')=J(t+T,\ t'+T)$ 是时不变的条件。由此，$J(t,t')$ 是一个仅与参数 $t-t'$ 有关的函数，即

$$J(t,t')=I(t-t'),$$

且

$$V_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}I(t-t')V_1(t')\mathrm{d}t'。$$

因此，线性和时不变意味着卷积关系成立。

周期性

一个在所有 x 上定义的非常数函数 $f(x)$，如果对任意 x 存在一个正常数 T，使得 $f(x+T)=f(x)$，那么我们称 $f(x)$ 是周期的，且周期为 T。该函数不必是连续的。一个函数可以有不只一个周期，例如函数 $\cos x$ 的周期为 2π，但是 4π，6π 等也是它的周期。最小的周期称为基本周期。诸如 $\mathrm{III}(x)$ 这样的冲激不满足在所有 x 有定义的条件，但是可以产生 $\mathrm{III}(x)$ 定义的函数序列，其中的每一个函数都是单位周期的，我们可以说 $\mathrm{III}(x)$ 在极限意义下是周期的。两个周期函数的和不一定是周期函数（如 $\cos x+\cos\pi x$），当然，也有可以是周期函数（如，$\cos x+\cos 99x$），并且具有不只一个周期。含有某个周期的谐波成分并不能确保信号是周期的，相反

地，即使用傅里叶分析检测不到任何相应频率分量的迹线，波形也可以是周期的（见习题）。

参考书目

Hartley, R. V. L.: "A More Symmetrical Fourier Analysis Applied to Transmission Problems," Proc. IRE, vol. 30, pp. 144-150, 1942.

Newcomb, R. W.: "Distributional Impulse Response Theorems," *Proc IEEE*, vol. 51. p. 1157, 1963.

Olnejniczak, K. J., and G. T. Heydt: "Scanning the Special Section on the Harley Transform," Proc. IEEE, vol. 82, pp. 372-380, 1994.

Oppenheim, A. V., and R. W Schafer: "Discrete-time Signal Processing," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.

Schwartz, M.: "Information Transmission, Modulation and Noise," 4th ed., McGraw-Hall, New York, 1990.

习题

1. 输入电压为 $tH(t)$ 时，电路响应 $R(t)$ 称为斜坡响应。证明对于一个通常的输入电压 $V_1(t)$，其响应可以表示为：

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(t-u)V''_1(u)\mathrm{d}u \ ,$$

而且这个表达式特别适合用于输入电压波形是多边形的情况。

2. 一路电影音频信号以正常速度的两倍通过一个高保真的再生系统。物理上是显然的，且相似性定理证实了，正弦输入信号的频率实际上变成原来的 2 倍。考虑相似性定理所说的有关幅度的变化，使得我们很容易从物理上理解它。

3. 一个不透明的音轨中的一个透明带（在 $x=0$）被一个矩形缝隙扫过。证明：响应的等效宽度或者等于透明带的宽度或者等于缝隙的宽度。

4. 一个有限持续期的信号作用于一个滤波器，滤波器冲激响应的持续期比信号的持续期短，证明输出波形的持续期大于输入波形的持续期，但是所延长的量（用等效宽度度量）比冲激响应的持续期短。

5. 一个均匀传输线的（复的）电长度为 θ，证明：在没有负载阻抗的情况下，输出电压对输入电压的传输系数由 $T(f)=\mathrm{sech}\theta$ 给定。

6. 一个 T 型连接的滤波器，其串联阻抗是 Z_1 和 Z_2，并联阻抗是 Z_3。证明电压传输函数是：$T(f)=\dfrac{Z_3}{Z_1+Z_3}$。

7. 在上题的 T 型连接中，令 $Z_2=0$，$Z_3=R$。元件 Z_1 是特征阻抗为 R 的无损传输线的开路长度，所以我们可以写作 $Z_1=-\mathrm{i}R\cot 2\pi Tf$，其中 T 是常量。证明：对输入电压阶跃的输出响应是时间的矩形函数，因此一般情况下，输出电压是输入电压的有限差分。

8. 将许多相同的无源二端口网络级联起来，输入一个电压冲激，形成一个向下传播的干扰。在距离输入很远的一个点，这个干扰表现为单个无源网络冲激响应的重复自卷积。这个干扰是否趋于高斯形式？

9. 证明：一个线性系统对于调制信号 $(1+M\cos\omega t)\cos\Omega t$ 的响应和对于音频信号 $M\cos\omega t$

的响应成正比。

10. 傅里叶系数 设用一个单位周期的电压信号 $p(t)$ 控制一个阴极射线示波器上点的 y 方向偏转，即 $y = p(t)$，x 方向偏转由以频率 n 运行的时基发生器控制，所以 $x = \sin 2\pi nt$。证明，波形在一个周期内所围绕的面积就是 $p(t)$ 的傅里叶系数 a_n，且 b_n 的值也可以用类似的方法得到。

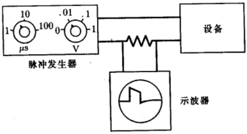
11. 时不变 一个仅由一个门组成的二端口网络，初始时门是打开的，在遇到输入信号的第一个阶跃时，门关闭。门关闭之前，无论输入如何，系统都无输出。在门关闭之后，系统的输出就等于输入。史密斯说，"很显然，系统对信号 $V_1(t-T)$ 的响应是 $V_2(t-T)$，而与 T 值和输入波形 V_1 无关。因此，系统是时不变的。"但是琼斯说："我不同意这种看法，今天早上我输入了一段音乐，但是没有输出，下午我重新输入了相同的信号，传输却完成了。"问这个系统是否是：(a) 时不变的；(b) 线性的？

12. 弹性电容 一个固体介质的平板电容器在充电时会受到挤压，压力与对应电荷间的吸引力成正比。当电容器的极板接近时电容增大，把一个正弦电压作用在电容器上时，每个周期内，电容实际值会两次超过电容器的固有值。当正弦电压的频率是 1000 Hz 时，电容值变化的频率为 2000 Hz，显然，电流的变化就不是严格正弦的了。考虑一个输入为电压，输出为电流的系统。由于系统不满足线性或时不变性，或者两者都不满足，这是否会破坏了对正弦输入的响应仍是正弦的规律？

13. 线性性和空间不变 一个有二维图像 $f(x,y)$ 的幻灯片，其中 f 的值是当光照在幻灯片上时产生的光的亮度。另一幻灯片 $g(x,y)$（一个掩片）和它放在一起。量 g 是传输因子（范围从 0 到 1）。掩片的作用是用 $g(x,y)$ 乘以原始图像然后传送一个新图像 $h(x,y) = f(x,y)g(x,y)$。

(a) 证明乘积操作是线性的但是随空间变化的；(b) 给出一个特殊的掩片例子以说明原始图像中高的空间频率如何能够减小为低的空间频率。

14. 线性 用一个可能是非线性的设备做下面的实验。实验中的脉冲发生器可以产生持续期从 1 ~ 100 μs，幅度从 1 mV ~ 1 V 的电压脉冲，用示波器来监视响应电流。由实验看到，当脉冲的持续期一定时，示波器的波形在幅度上与脉冲的电压成正比。不论选择什么样的持续期，总可以观察到这个比例。问：这个现象能否证明上面的设备是线性的？（我们知道，过高的电压可能会使设备产生诸如尖峰等的非线性响应，这个实验中，我们不考虑这种情况，而把输入电压控制在适当的范围内，只是问器件是否是线性的。）如果你认为设备是线性的，给出并证明它所服从的叠加规则（激励在允许的范围内）。如果你认为设备是非线性的，请试举出一个非线性设备的例子，使其具有实验中设备的性质。



15. 输出与输入成比例　对于一个系统，若输入 $V_1(t)$ 的响应是 $W_1(t)$，而 $nW_1(t)$ 是输入 $nV_1(t)$ 的响应，其中 n 为整数，对任何 $V_1(t)$ 都成立。问：系统是否一定是线性的？如果是，证明它与“线性和时不变”一节中的表述是等价的；如果不是，试给出一个满足上面描述的系统并证明它是非线性的。

16. 结合律失效　将冲激响应分别为 $I_1(t)$ 和 $I_2(t)$ 的两个两端口网络级联起来，使得复合网络的冲激响应为 $I(t) = I_1(t) * I_2(t)$。(可以通过提高第二个网络输入阻抗的方法，或者把 $I_1(t)$ 定义为第二个网络存在情况下，第一个网络输出端的冲激响应的方法来确保系统的精确性)。

令 $I_1(t) = H(t)$，$I_2(t) = \delta(t) - \delta(t-1)$，故 $I(t) = \Pi(t-\frac{1}{2})$。若输入电压 $V_{in}(t) = e^{-t}$，则输出电压为：$V_{out}(t) = V_{in}(t) * I(t) = \Pi(t-\frac{1}{2}) * e^{-t} = \int_{t-1}^{t} e^{-u}du - (e-1)e^{-t}$。等效地，我们说：

$$V_{out}(t) = V_{in}(t) * [I_1(t)] * [I_2(t)]。$$

根据卷积的结合性质，我们期望可以说：

$$V_{out}(t) = [V_{in}(t) * I_1(t)] * I_2(t),$$

上式中，中括号里的量就是信号在两个网络结合处的响应，但是，

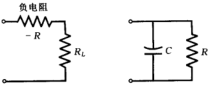
$$V_{in}(t) * I_1(t) = e^{-t} * H(t)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u}H(t-u)du = \int_{-\infty}^{t} e^{u}du,$$

可以看出，这个积分是发散的。试讨论产生这种情况的原因。

17. 结合律　对下面有关卷积结合律的例子，我们能总结出什么？

$$H(x) * \delta'(x) * H(-x)$$
$$H(x) * \delta'(x) * \mathrm{sgn}x$$
$$e^{-x} * [\delta(x) - \delta(x-1)] * H(x)。$$

18. 稳定性　机械学中，系统稳定指的是当系统受到一个微小的扰动后，系统将产生一个使它回到初始状态的力。在与放大器和反馈电路有关的电子学中，也有类似的用法。然而，是用另一种方法来定义线性系统稳定性的，即如果对任意 $|V_1(t)| < M$，都有 $|V_2(t)| < kM$，那么系统就是稳定的。也就是说，当输入 $V_1(t)$ 的绝对值小于一个最大值 M 时，那么对一个稳定系统，无论选择什么样的输入波形，输出的绝对值也将小于一个最大值 kM。稳定系统定义的另一种形式是，如果一个系统的单位冲激响应的绝对积分 $\int_{-\infty}^{\infty} |I(t)| dt$ 是有限值 k，那么系统是稳定的。问以下系统是否稳定？(设 $V_1(t)$ 为输入电压，$V_2(t)$ 是由之产生的电流。)



(a)　　(b)

19. 稳定性　在一条长度为 l 的短路无损传输线上，波速为 v，电流冲激响应为：

$$I(t)=Z_0^{-1}\left[\delta(t)+2\delta\left(t-\frac{2l}{v}\right)+2\delta\left(t-\frac{4l}{v}\right)+\cdots\right]。$$

由于 $\int_{-\infty}^{\infty}|I(t)|\,\mathrm{d}t$ 不是有限值，系统看起来是不稳定的。再想一想，若输入一个有界电压 $\Pi(t)$，电流响应 $Z_0^{-1}\left[\Pi(t)+2\Pi\left(t-\frac{2l}{v}\right)+2\Pi\left(t-\frac{4l}{v}\right)+\cdots\right]$ 是一个有界输出。既然有界输入导致了有界输出，系统似乎又是稳定的。试问：这两种说法哪一种是正确的？

20. 线性　变换的连续性　一个数学系统模型在输入 $V_1(t)$ 和输出 $V_2(t)$ 之间具有如下关系：$V_2(t)$ 是 $V_1(t)$ 去掉断点之后的波形。更准确地，若 $V_1(t)$ 分别在 $t=a_1,a_2,\cdots,a_N$ 处有 N 个大小为 $J_1,J_2,\cdots,J_N$ 的断点，其中 N 有限，那么

$$V_2(t)=V_1(t)-\sum_{n=1}^{N}J_nH(t-a_n)。$$

试问：此系统是否是线性时不变的？

21. 变换的连续性　令 $M(x)$ 是一个非零实函数，并且各阶导数都存在（无冲激），在区间 $(-1,1)$ 之外对任意 t 函数值都为零，例如 $\exp[-(1-x^2)^{-1}]\Pi(x/2)$。考虑当 $\tau\to 0$ 时的函数序列 $p_\tau(x)=\tau^{-1}M[\tau^{-1}(x-\tau)]$。函数 $p_\tau(x)$ 下的面积保持恒定，且与 τ 的变化无关。$\lim_{\tau\to 0}p_\tau(x)=0$ 对于所有的 x 都成立。原因是当 $x\leqslant 0$ 时，$p_\tau(x)$ 恒为零。对于 x 为正的情况，总存在 $\tau=x/2$ 使得对于所有 τ 的较小值，$p_\tau(x)=0$。将 $p_\tau(x)$ 输入一个用变换 S 表示的线性系统，它把输入函数 $p_\tau(x)$ 映射为输出函数 $q_\tau(x)$，表示为

$$q_\tau=S[p_\tau]。$$

设变换 S 连续：

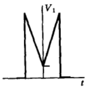
$$S[\lim_{\tau\to 0}p_\tau]=\lim_{\tau\to 0}S[p_\tau]。$$

由于线性，等式左边 $S[0]=0$；因此，对等式右边

$$\lim_{\tau\to 0}S[p_\tau]=0。$$

但是我们期望得出的是等式右边的冲激响应，这是否意味着通常的物理系统都是不连续的呢？

22. 冲激响应　冲激响应为 $I(t)$ 的线性时不变系统被电压信号 $V_1(t)$ 激励，其中



$$V_1(t,\tau)=\left[1+\tau^{-2}(1-2\tau)\,|\,x\,|\right]\Pi\left(\frac{x}{2\tau}\right),$$

产生响应 $V_2(t,\tau)$。

(a) $\lim_{\tau\to 0}V_2(t,\tau)=I(t)$ 是否成立？

(b) $\lim_{\tau\to 0}V_1(t,\tau)$ 是否存在？

23. Sinc 函数特性　通过找出在误差达到峰值的百分之一前 x 能取多大的值，验证函数

$$f_4(x) = \cos(\frac{\pi x}{2})\cos(\frac{\pi x}{4})\cos(\frac{\pi x}{8})\cos(\frac{\pi x}{16})$$

是 $\mathrm{sinc}x$ 的一种很好的近似。如果上面的式子能够很好地逼近 $\mathrm{sinc}x$，那么它的傅里叶变换是否能够很好地逼近 $\Pi(s)$？首先可以通过算出它的傅里叶变换来讨论这个问题。现在证明：

$$\mathrm{sinc}x = \prod_{n=1}^{\infty}\cos(\frac{\pi x}{2^n})。$$

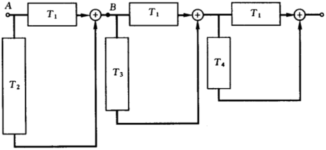
如果只取 N 项而不是无穷项相乘，证明在加入一个修正因子 $\mathrm{sinc}(x/2^N)$ 后，公式仍然成立，即

$$\mathrm{sinc}x = \prod_{n=1}^{\infty}\cos(\frac{\pi x}{2^n})\mathrm{sinc}(x/2^N)。$$

24. 矩形冲激响应　一个信号进入如下线性系统，输入由 A 点进入，由 B 点输出。系统由两个通道组成，一个通道具有时延 T_1，另一个具有更长的时延 T_2，两部分在输出点相加形成输出信号。设传递函数为 $T(f)$。

(a) 证明可以选择 T_1 和 T_2，使得 $|T(f)|$ 可以达到任何期望的频率的余弦函数。

(f) 证明三个这样的系统级联在一起，就是一个可以产生矩形冲激响应的实际设备；说明如何选择 T_3 和 T_4。



25. 扁球形波动函数　一个导体球附近的电场 u 的径向子午线(非纵向的)振荡满足如下微分方程：

$$(1-t^2)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} - 2t\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + (\chi - \omega^2t^2)u = 0,$$

其中 t 表示子午线坐标(后面重新解释为时间)。参数 ω 为(2π/ 自由空间波长)×半焦距，常数 χ 为分离常数。对于 ω 和 χ 的每一种选择，都有一串谐振模式 $n = 0,1,2,\cdots$。相应微分方程的电荷解称为扁球形波动函数 $S_{0n}(\omega,t)$，这就产生了一个令人感兴趣的问题，一个信号必须压缩在最短的时间并且同时压缩到最窄的频带。扁球形波动函数具有如下的性质：

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{sinc}\left[2(\frac{\omega}{2\pi})(t-t')\right]S_{0n}(\omega,t')\mathrm{d}t' = \lambda S_{0n}(\omega,t),$$ ①

① 此公式原著似乎将 t' 误为 ω'——译者注。

其中λ为特征值。下标0表示与经度无关。如果将t看作时间，我们可以说积分操作截断了被积函数，消去了$t=\pm 1$ s以外的部分，而sinc函数滤去了频率$\omega/2\pi$超出± 1 Hz以外的部分。这个压缩操作的结果是除了系数λ外保持$S_{0n}(\omega,t)$不变。因此，扁球形波动函数就是积分算子的本征函数。特征值λ为$\lambda=[S_{0n}^{(1)}(\omega,1)]^2$，这可以通过查表(Abramovitz and Stegun, p. 753)得到。

证明：扁球形波动函数同样也是有限区间傅里叶变换的本征函数，即

$$\int_{-1}^{1} e^{-i\omega t t'} S_{0n}(\omega,t')\mathrm{d}t' = uS_{0n}(\omega,t)。$$

26. 与x相乘　证明$xf(x)\supset(\mathrm{i}/2\pi)F'(s)$。

27. 难以理解的周期　(a) 绘制函数$y(x)=9\cos 5x+11\cos 4x$在$0\leqslant x\leqslant 6$上的图形，但假设x实际上是从$-\infty$到∞的。检查你对函数$y(x)$的采样并判断$y(x)$是否符合周期函数的条件。如果是，周期是多少？如果不是，解释原因。(b) 画出$y(x)$的傅里叶变换谱图。

28. 周期条形码　一幅图样由一系列白底上的窄黑线条组成。在白底上画31条黑色线条，线条间隔5 mm；在其上面再画37条黑色线条，线条间隔4 mm；两组线条的第一条恰好重合，线条宽$w=1$ mm；因此每根线条都可以用$\Pi(x/w)$的移位来描述。最终的输出用$y(x)$描述，其中$y(x)=0$表示白色，而$y(x)=1$表示黑色。条形码看起来是周期的，问在傅里叶变换域中是否有相应的频率？

29. 谱分辨率　一台摄谱仪对谱线$\delta(x)$的响应是$\exp(-\pi x^2/W^2)$。如果两条相等的谱线间隔为X，那么仪器的响应为$\exp[-\pi(x+\frac{1}{2}L)^2/W^2]+\exp[-\pi(x-\frac{1}{2}L)^2/W^2]$。如果谱线之间间隔很大，即$L\gg W$，那么摄谱仪会记录两个分开的谱峰，谱峰中间的值是最小值。(a) 当两个谱线靠近到一定程度，存在一个临界值$L=L_{\mathrm{crit}}$，使得中间的最小值升高到两个峰值的水平，L_{crit}的值是多少？(b) 如果谱线之间的距离继续接近，达到$L=0.8L_{\mathrm{crit}}$时，仪器只会显示出一条谱线。在这种情况下，是否有可能推出存在两条谱线并确定它们的间隔？

30. 过滤数字信号　将时间间隔为1 μs的离散时间信号{1　1.6　2　0.6}送入一个阻容滤波器，滤波器的冲激响应是$\exp(-t/RC)H(t)$，其中$R=1\ \Omega$，$C=1\ \mu$F且时间常数RC为1 μs。用连续时间冲激串来表示信号

$$V_1(t)=\delta(t-1)+1.6\delta(t-2)+2\delta(t-3)+0.6\delta(t-4),$$

并将响应$V_2(t)$表示为四个指数的和。

(a) 标出当$t=0,1,2,3,4,5,6$时$V_2(t)$的值，并给出这些值的代数表达式。

(b) 把这些表达式中的系数和用卷积$\{0.5\ e^{-1}\ e^{-2}\ e^{-3}\ e^{-4}\cdots\}*\{1\quad 1.6\quad 2\quad 0.6\}$进行数值计算，得到的结果进行比较。

第 10 章

采样与级数

假设现在给我们一个具有任意值的函数，而且它的因变量的相邻值之间没有任何联系。那么，如果这个函数的自变量是时间，我们就必须期望这个函数从一个时刻到下一时刻之间有任意的幅度和符号的跳变。

实际上我们观察不到这样的信号。由于测量工具的限制或其它方面的原因，变化的速度总是有限的。这样，我们就可以推测在相邻时刻的波形值之间至少会有少许的相关，由此就可以用过去某段短的时间间隔上的值来进行预测。这就使我们想到可以省却一定时间间隔上的函数值，而只记录细小间隔上的(但不是无穷小) 一组函数值，仍然可以保留所有的信息。用这组采样值，在一定程度的近似范围内，就可以恢复出中间的函数值。

采样定理

采样定理描述在一定条件下，用固定间隔的采样样本就可以精确地恢复原来信号的所有值，换言之，这个样本集合完全等价于所有的函数值。这个条件是函数必须是“带限的”，即函数的傅里叶变换在一个有限范围内是非零的，而在其它区域为零。可以对样本集合进行数字信号处理，同时方便地使用连续变量函数的理论来推导和澄清数字信号处理(DSP) 的本质。

显然，采样的间隔对定理的应用来说是至关重要的。如果间隔不得不取得很短，那么就不会得到太多的好处。为了说明采样间隔的精细度，我们取一个简单的带限信号 $\operatorname{sinc}x$，它的频谱在 $|s|<\frac{1}{2}$ 时是平坦的，其它地方为零。此时采样间隔(下面将会解释) 为 1。图 10.1a 所示为 $\operatorname{sinc}x$ 的采样值，可以看出与做数值积分的间隔比较，这个间隔是非常粗糙的。这个定理所需要的采样间隔看起来出奇的宽。又如图 10.1b 所示 $\operatorname{sinc}^2\frac{1}{2}x$ 的采样值，它的频谱和 $\operatorname{sinc}x$ 在相同的点($|s|=\frac{1}{2}$) 截止。图 10.1c 和图 10.1d 提供了一些用于实验的采样。

对任意给定的波形，总有一个频率，使得对某些目的来说超过这个值的频率分量可以被忽

略。然而在另一方面，变换可能没有被完全截止，因此，在采样定理的实际应用中，一定要估计由于对给定波形进行带限而引起的误差。

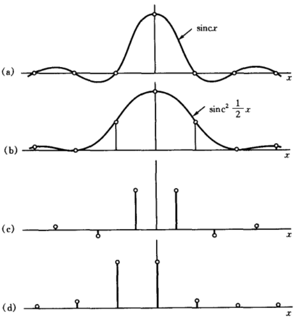


图 10.1 两个函数和它们的采样以及用于练习的两组样本

考虑函数 $f(x)$，它的傅里叶变换 $F(s)$ 在 $|s|>s_c$ 时为零(见图 10.2)。显然，它是一个带限函数。在这种情况下，傅里叶分量被限制在以 s 的原点为中心的频带内。这个函数其实代表

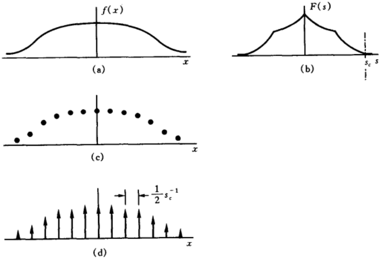


图 10.2 (a) 带限函数 $f(x)$ 和它的截止频谱(b) 以及它的采样(c) 可以精确地恢复 $f(x)$ 的所有细节并且在内容上等效于冲激串(d)。

了一大类用有限分辨率的设备所观察到的物理分布。我们称这种变换为"截止变换",并说它们在超过"截止频率"s_c 后被截断。

一般情况下,截止变换都具有$\Pi(s/2s_c)G(s)$ 的形式,其中 $G(s)$ 是任意的,因此,具有截止变换的函数的一般形式为

$$\operatorname{sinc}2s_c x * g(x),$$

其中 $g(x)$ 是任意的。

当然,如果原函数是截止的,那么它就不是带限函数,而其变换是带限的。

除了以下提到的例外,带限函数具有特殊的性质,它们可以被间隔不大于$\frac{1}{2}s_c^{-1}$ 的等间隔采样值完全描述(见图 10.2c)。

在接下来的推导中,引入一个 *shah* 符号被证明是很方便的,因为乘以 $\mathrm{III}(x)$ 就相当于进行采样,也就是只保留采样点的值,而丢弃中间的值。

作为一个附加的优点,由于 *shah* 符号在卷积时具有复制性质,它使我们可以简洁地表达采样理论中发生的频谱周期延拓。

在以后的讨论中,我们使用关系式

$$\mathrm{III}(x) \supset \mathrm{III}(s),$$

而在本章的最后对它有详细讨论。

考虑图 10.2c 中的函数

$$\tau^{-1}f(x)\mathrm{III}\left(\frac{x}{\tau}\right) = \sum_n f(n\tau)\delta(x-n\tau),$$

我们只保留了 x 等于采样间隔 τ 的整数倍处的 $f(x)$ 信息,而丢弃其它中间值。因此,如果可以从 $f(x)\mathrm{III}(x/\tau)$ 重构出 $f(x)$,那么采样定理得证。$\mathrm{III}(x/\tau)$ 的傅里叶变换为 $\tau\mathrm{III}(\tau s)$,如图 10.3b,它是间隔为 τ^{-1} 的单位冲激串。因此有

$$\overline{f(x)\mathrm{III}(x/\tau)} = \tau\mathrm{III}(\tau s) * F(s),$$

我们可以看出原函数乘以 $\mathrm{III}(x/\tau)$ 相当于把频谱 $F(s)$ 以间隔为 τ^{-1} 进行周期延拓(如图 10.3c 所示)。如果我们可以恢复 $F(s)$,那么就可以重构函数 $f(x)$。对图 10.3c 所示的情况,这显然是可以做到的,只要给 $\tau\mathrm{III}(\tau s) * F(s)$ 乘以$\Pi(s/2s_c)$ 就行了。除了在 $s=s_c$ 处存在奇异行为外(下面将会考虑到),这就足以证明采样定理了。

同时,临界采样的条件也很明显,因为如果重复的频谱发生混叠(如图 10.3e),我们就无法恢复 $f(x)$。在各重复频谱的间隔 τ^{-1} 小于频谱宽度 $2s_c$ 时就会发生这种情况。所以,采样间隔 τ 不能超过$\frac{1}{2}s_c^{-1}$,即频率为 s_c 的正弦的半个周期。在临界采样时,各个重复的频谱刚好接触在一起,如图 10.3d 所示。

在严格阐述采样定理之前,我们还需要考虑一个小的改进。在上面的说明中 $F(s_c)$ 为零。如果 $F(s_c)$ 不为零,频谱就会有一个陡峭的边缘,在临界采样时,频谱就会形成粗端对接。图 10.4a 描述了这种情况,但是再考虑到 $F(s)$ 的虚部,揭示出乘以$\Pi(s/2s_c)$ 仍然可以恢复出 $F(s)$。然而,如果 $F(s)$ 在 $s=s_c$ 处存在冲激,即 $f(x)$ 包含频率 s_c 的谐波分量,那么问题还需要

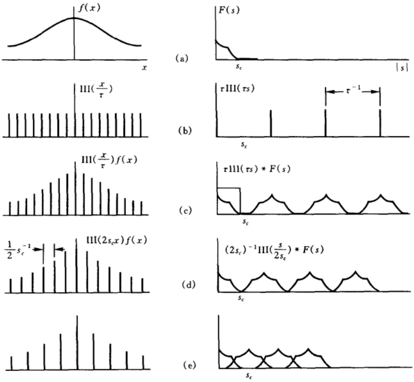


图 10.3　采样定理的演示

进一步讨论。

在图 10.4b 中就描述了这种情况，首先考虑 $F(s)$ 为偶函数，即忽略虚线所示的奇对称的虚部。当采样间隔接近临界采样时，冲激 A 和冲激 A' 就会混合为一个冲激，冲激强度是原来的

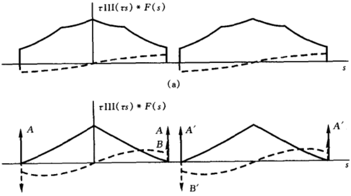


图 10.4　临界采样

两倍，再乘以 $\Pi(s/2s_c)$ 相当于在 $s=s_c$ 处乘以 1/2，把冲激修复为正确的值，这样用 $F(s)$ 就可以完全恢复原函数。当然，冲激 A 代表了一个偶的或者余弦的谐波分量 $2A\cos 2\pi s_c x$。现在考虑 $F(s)$ 在奇部具有冲激的情况。当临界采样时，B 和 B' 抵消。所以任何与 $\sin 2\pi s_c x$ 成比例的奇谐波分量在(临界)采样过程中都会消失。

练习　谐波函数 $\cos(\omega t-\Phi)$ 以临界间隔(半个周期 π/ω)采样，把函数分解为偶部和奇部，注意到采样值仅能精确描述偶部，而奇部仅在它的零点上被采样。

现在可以阐述采样定理以作为参考：

一个函数，如果它的傅里叶变换在 $|s|>s_c$ 为零，那么用间隔不超过 $(1/2)s_c^{-1}$ 的等间隔采样值，就可以完全描述这个函数，除了在采样点为零的任何谐波项以外。

在采样定理的这个叙述中，我们没有指明如何用函数的样本值重建原函数，但是从整个定理的讨论中可以清楚地知道，使用某些筛选过程，可以用与样本值集合等效的冲激串重构原函数。这个过程，在变换域中看作是滤波，在函数域显然相当于内插。

内插

从采样点计算中间值的数值计算过程当然不依赖于傅里叶变换。因为恢复的过程是对变换乘以 $\Pi(s/2s_c)$，在函数时域的等效操作是与 $2s_c\operatorname{sinc}2s_c x$ 进行卷积，这样就可以从 $\mathrm{III}(x/\tau)\,f(x)$ 直接恢复出 $f(x)$。和一个由冲激串组成的函数卷积在数值计算上很有吸引力，因为卷积积分实际上变成了求和(序列积)。

对于中点内插(两点中间插一个值)我们可以把具有合适间隔的 sinc$x$ 的值制成一个永久的表格(表 10.1)，该表很实用，当需要进一步内插时，可以用同样的数组重复中点内插过程。

表 10.1　中点内插

$\|x\|$	sinc$x$	$\|x\|$	sinc$x$	$\|x\|$	sinc$x$	$\|x\|$	sinc$x$
$\frac{1}{2}$	0.636 6	$9\frac{1}{2}$	−0.033 5	$18\frac{1}{2}$	0.017 2	$27\frac{1}{2}$	−0.011 6
$1\frac{1}{2}$	−0.212 2	$10\frac{1}{2}$	0.030 3	$19\frac{1}{2}$	−0.016 3	$28\frac{1}{2}$	0.011 2
$2\frac{1}{2}$	0.127 3	$11\frac{1}{2}$	−0.027 7	$20\frac{1}{2}$	0.015 5	$29\frac{1}{2}$	−0.010 8
$3\frac{1}{2}$	−0.090 9	$12\frac{1}{2}$	0.025 5	$21\frac{1}{2}$	−0.014 8	$30\frac{1}{2}$	0.010 4
$4\frac{1}{2}$	0.070 7	$13\frac{1}{2}$	−0.023 6	$22\frac{1}{2}$	0.014 1	$31\frac{1}{2}$	−0.010 1
$5\frac{1}{2}$	−0.057 9	$14\frac{1}{2}$	0.022 0	$23\frac{1}{2}$	−0.013 5	$32\frac{1}{2}$	0.009 8
$6\frac{1}{2}$	0.049 0	$15\frac{1}{2}$	−0.020 5	$24\frac{1}{2}$	0.013 0	$33\frac{1}{2}$	−0.009 5
$7\frac{1}{2}$	−0.042 4	$16\frac{1}{2}$	0.019 3	$25\frac{1}{2}$	−0.012 5	$34\frac{1}{2}$	0.009 2
$8\frac{1}{2}$	0.037 4	$17\frac{1}{2}$	−0.018 2	$26\frac{1}{2}$	0.012 0	$35\frac{1}{2}$	−0.009 0

频域矩形滤波

假设现在我们要去掉一个函数超过某个频率值的频谱分量，也即给傅里叶变换乘以矩形函数，我们把它写为$\Pi(s)$。设 $s_c=\frac{1}{2}$ 且临界采样间隔为 1，这是为了内插而已经进行的操作。然而，被滤波的函数一般不会只包含冲激，因此计算滤波值的卷积积分不能完全简化为求和。但是，在数值计算时它必须用求和进行逼近，

$$\sum\nolimits_{\tau}=f(x)*\left[\mathrm{III}\left(\frac{x}{\tau}\right)\operatorname{sinc}x\right],$$

那么我们会问，表格的间隔可以粗略到什么程度仍然能充分逼近所要计算的积分

$$f(x)*\operatorname{sinc}x。$$

从 $\tau=1$ 开始，我们发现 $\sum_1=f(x)$，即根本就没有进行滤波。现在尝试 $\tau=\frac{1}{2}$，我们有

$$\sum\nolimits_{\frac{1}{2}}=f(x)*\mathrm{III}(2x)\operatorname{sinc}x$$

和

$$\overline{\sum}_{\frac{1}{2}}=F(s)\left[\frac{1}{2}\mathrm{III}\left(\frac{1}{2}s\right)*\Pi(s)\right],$$

因为

$$\overline{\sum}_{\tau}=F(s)[\tau\mathrm{III}(\tau s)*\Pi(s)]。$$

所以$\overline{\sum}_{\frac{1}{2}}$ 包含了中心部分 $F(s)\Pi(s)$ 和一些较远的部分。在许多应用中，这样的简单方法就已经足够了（例如，当被滤掉的分量刚好在中心区域外时）。

利用内插方法中所采用的一个思想，即通过重复地使用中值内插可以节省用于内插的数据表，现在我们考虑这种重复近似滤波的影响。在 $\tau=\frac{1}{4}$ 的位置使用同样的滤波数组，我们有滤波器特征函数$\frac{1}{4}\mathrm{III}(s/4)*\Pi(s/2)$，它乘以$\frac{1}{2}\mathrm{III}(s/2)*\Pi(s)$ 就是图 10.5 最后一个波形。换句话说，重复应用这个过程可以滤掉更多的带外响应。直接取 $\tau=\frac{1}{4}$ 可以得到相同的结果。

总结如下，为了逼近截止频率为 s_c 的矩形滤波器，我们可以在半临界采样间隔（即间隔为 $\frac{1}{4}s_c^{-1}$）处读取 $f(x)$，与 $2s_c\operatorname{sinc}2s_cx$ 进行卷积（更精确地，序列积），其中 $2s_cx$ 具有所有的半整数值（即在 1/2，1.5，… 处的值），包括零。用于函数域的滤波数据（表 10.2）精确包含了为内插提供的列表值（表 10.1）加上隔行的零和中心值 1。

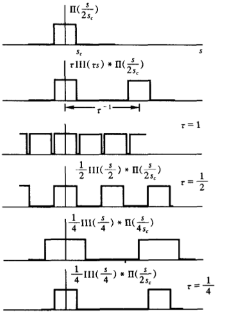


图 10.5　获得所期望的滤波器特征函数 $\Pi(s)$ 的数值过程

表 10.2　用于近似矩形滤波的数组

⋮
−0.090 9
0
0.127 3
0
−0.212 2
0
0.636 6
→ 1.000 0
0.636 6
0
−0.212 2
0
0.127 3
0
−0.090 9
⋮

用滑动平均进行平滑

函数 $f(x)$ 与宽度为 W 的矩形函数卷积导致它的傅里叶变换 $F(s)$ 通过一个低通滤波器，然而这个滤波器与上面讨论的锐截止滤波的情况大相径庭。我们知道和 $W\Pi(x/W)$ 进行卷积对应的传输函数是 $F(s) = \text{sinc}Ws$，它具有等效宽度 $1/W$ 的通带宽度，或者 3dB 带宽为 $0.8859/W$，但是对大多数应用来说，它在传输中的衰减根本不够尖锐。进一步讲，它的传输函数不能完美地下降到零而且有过冲和相当强的振荡。如何在锐截止和小旁瓣(从天线应用中借来的术语)之间进行折衷是我们将要考虑的问题。作为一个比较的基础我们从矩形卷积函数开始讨论。不过，根据第 3 章的思想及练习，我们这里的卷积操作指的是可被应用于离散数据的数值卷积。

假设 $W = 12$，这个例子可以理解为用 12 个月的采样数据(间隔一个月)产生 12 个月的滑动平均。我们用$\frac{1}{12}\sum\delta(x-n)$，$n=\pm\frac{1}{2}, \pm 1\frac{1}{2}, \cdots, \pm 5\frac{1}{2}$ 代替$\Pi(x/W)$，相关的传递函数类似于 s 较小时的 sinc12s，但是在 s 域将被按单位间隔复制，这和从函数 $\frac{1}{12}\text{III}(x-\frac{1}{2})\Pi(x/12)$ 的傅里叶变换得到的一样，即$[e^{-i\pi s}\text{III}(s)] * \text{sinc}12s$。通过逐对的对冲激 $\sum\delta(x-n)$ 进行变换，得到 $\sum 2\cos 2\pi ns$，$n=\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, \cdots, 5\frac{1}{2}$，可以简化重叠的 sinc 函数。为了更加简练，对冲激进行变换得到几何级数：

$$\frac{1}{12}(e^{i2\pi 5\frac{1}{2}s} + e^{i2\pi 4\frac{1}{2}s} + \cdots + e^{-i2\pi 4\frac{1}{2}s} + e^{-i2\pi 5\frac{1}{2}s}),$$

这里的每一项对前一项的比例因子 r 是 $e^{-i2\pi s}$，并且第一项为 $a=(\frac{1}{12})\exp(i2\pi 5\frac{1}{2}s)$。从 n 项几何级数和的表达式 $a(1-r^n)/(1-r)$ 可以得到

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{12}e^{i2\pi 5\frac{1}{2}s}(1-r^{12})/(1-r) &= \frac{1}{2}e^{i2\pi 5\frac{1}{2}s}(1-e^{-i2\pi 12s})/(1-e^{-i2\pi s}) \\
&= \frac{1}{12}(e^{i2\pi 6s}-e^{-i2\pi 6s})/(e^{-i2\pi\frac{1}{2}s}-e^{i2\pi\frac{1}{2}s}) \\
&= \frac{1}{12}\frac{\sin 2\pi 6s}{\sin 2\pi\frac{1}{2}s}。
\end{aligned}
$$

一般地，对幅度为 $1/N$ 的 N 个等间隔冲激，这个表达式为 $(\sin N\pi s)/(N\sin\pi s)$，它便于计算，如图 10.6 所示。

气象学中标准惯例是，用 13 个间隔一个月的系数（而不是 12 个）来计算一年的滑动平均，但是把第一月和最后一月的强度削减为原来的一半，保持强度的和是 12；过零点更加平滑。这种情况下传输函数变为 $\sin N\pi s/(N\tan\pi s)$。

图 10.6 中，上边的曲线可以看作是由 12 个均匀分布的天线组成的天线阵的方向图，而该曲线的平方可看作一排 12 个小孔的光衍射图形。

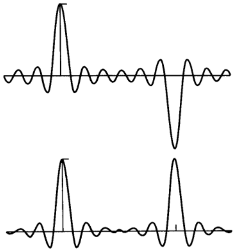


图 10.6　具有 12 个值为 $\frac{1}{12}$ 的系数的传递函数（上）；具有 13 个系数，两端值减为一半，旁瓣减少（下），并且第一个主瓣相位不反向

欠采样

假设 $f(x)$（见图 10.7a）以一定的间隔（与所期望的矩形滤波截止频率相应的间隔）进行采样。那么这些采样值（见图 10.7b）确定了一个带限信号 $g(x)$（见图 10.7c），它有一个所期望范围的截止频谱，而且乍一看似乎是和一个矩形滤波器的乘积得到的。但是这一过程与矩形滤波并不相同，因为结果和 $f(x)$ 中的高频分量有关。例如，某个采样值可能会落在一个狭窄的尖峰上，更进一步讲，粗糙的采样点的相位将会对结果造成明显的影响。不过，这种效果通常可以认为是对矩形滤波较好的近似。

按照傅里叶变换研究这个过程，我们发现从过于粗糙的采样中得到的带限函数 $g(x)$ 包含有 $f(x)$ 的高频分量的贡献，这些高频分量通过以 $s=s_c$ 为对称的反射"扮演"了低频分量的角色。这种效应被称为"混叠"。仔细观察图 10.7b，考虑到已被忽略的变换的虚部，我们可以发现寄生的低的正频率来自于 $F(s)$ 中阴影部分的负频率拖尾。如果这个高频拖尾不太重要，那么粗略的采样过程就可以给出相当好的结果。

欠采样的影响是加强了频谱的偶部，图 10.7d 说明奇部被减少了。这说明 $g(x)$ 比 $f(x)$ 的

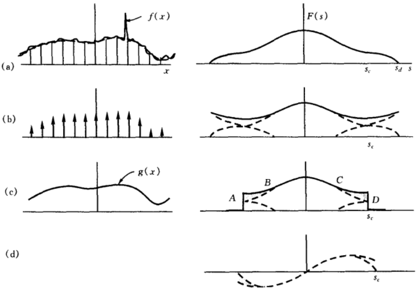


图 10.7 对 $f(x)$ 欠采样得到带限信号 $g(x)$；$f(x)$ 的高频分量向带限中折叠，阴影部分显示高频被伪装成了低频。

偶性更加强一些，当然这也是可以预料的，因为采样过程歧视对待了在采样点处是零的分量（必要的奇部）。

幅度和斜率采样

设 $f(x)$ 是带限信号，通过以 0.5 为间隔的幅度可以完全描述它，但假设只给出了 $\text{III}f$，也就是说，只给出了每间隔一个的幅度值（即以二倍的临界采样间隔采样），那么，从由 $\overline{\text{III}f}$ 组成的相互重叠的频谱中（见图 10.8）不可能恢复出 $F(s)$，从而也不能恢复出 $f(x)$。但如果能再给出部分信息，恢复就是可能的。

如果除幅度外，还给出了斜率，恢复就被证明是可能的。这样，给定 $\text{III}f$ 和 $\text{III}f'$，我们就可以用它们的线性泛函的组合来表示 $f(x)$，

$$f(x) = a(x) * (\text{III}f) + b(x) * (\text{III}f'),$$

其中 $a(x)$ 与 $b(x)$ 是我们要求解的分解函数。正如 sinc 函数（普通采样的分解函数）在除原点外的所有采样点上等于零而在原点必须为 1 一样，$a(x)$ 也必须是这样的。$b(x)$ 在所有的采样点必须为零，但在原点的斜率为 1。

为了求解 $a(x)$ 与 $b(x)$，注意在 $-1 \leqslant s \leqslant 1$ 时有

$$\overline{\text{III}f} = F(s+1) + F(s) + F(s-1)$$

且

$$\overline{\text{III}f'} = \mathrm{i}2\pi(s+1)F(s+1) + \mathrm{i}2\pi sF(s) + \mathrm{i}2\pi(s-1)F(s-1)。$$

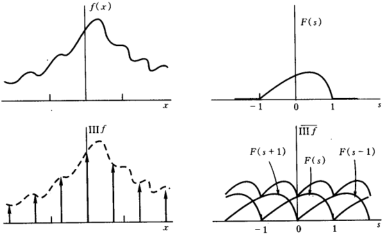


图 10.8 按照完全描述所需的速率的一半进行幅度采样

从这两个方程就可以解出 $F(s)$，因为虽然有三个未知量 $F(s+1)$，$F(s)$，$F(s-1)$，但实际上，对任意的 s，三个中有一个总是为零。这样，对正的 s，我们有 $F(s+1)=0$，消去 $F(s-1)$ 得

$$i2\pi F(s)=\overline{\text{III}f'}-i2\pi(s-1)\,\overline{\text{III}f},$$

对负的 s，我们有

$$-i2\pi F(s)=\overline{\text{III}f'}-i2\pi(s+1)\,\overline{\text{III}f}。$$

对所有的 s，包括正和负，可以简明地写作

$$F(s)=\frac{i}{2\pi}\Lambda'(s)\,\overline{\text{III}f'}+\Lambda(s)\,\overline{\text{III}f}。$$

因此

$$f(x)=\text{sinc}^2x*(\text{III}f)+x\text{sinc}^2x*(\text{III}f')。$$

分解函数为

$$a(x)=\text{sinc}^2x$$
$$b(x)=x\text{sinc}^2x。$$

卷积积分于是简化为适当幅度的一定间隔的 $a's$ 和 $b's$ 的求和

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{-\infty}^{\infty}f(n)a(x-n)+\sum_{-\infty}^{\infty}f'(n)b(x-n)\\&=\sum_{-\infty}^{\infty}f(n)\text{sinc}^2(x-n)+\sum_{-\infty}^{\infty}f'(n)(x-n)\text{sinc}^2(x-n)。\end{aligned}$$

我们可以看出，每个 $a(x-n)$ 在除 $x=n$ 外的所有采样点（x 的整数值）为零，且在所有的采样点上的斜率都为零（见图 10.9a）。每个 $b(x-n)$ 在所有的采样点上幅度为零，而且在除 $x=n$

外的所有采样点上的斜率为零(见图10.9b)。

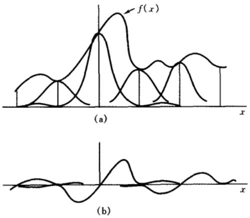


图 10.9 (a) 与幅度有关的分量 $f(n)a(x-n)$；(b) 与斜率有关的分量 $f'(n)b(x-n)$

交错采样

在前面的例子中，让 $\text{III}f$ 表示的是描述 $f(x)$ 所需要采样值中的每隔一个的幅度值。设存在一个增补的数据集合 $\text{III}(x-a)f(x)$，与上一个数据集合如图 10.10 所示的那样交错着。那么是否可以重构 $f(x)$ 呢?众所周知，略大于临界采样间隔的等间隔采样，是不满足重构条件的，在交错采样的情况下，相邻三个采样值中必然有两个之间的间隔超过了这个临界间隔。另一方面，已证明了幅度斜率采样满足可恢复条件，它显然相当于 a 趋于零时的交错采样。

如果解存在，那么，它应该具有 $\text{III}f$ 和 $\text{III}_a f$ 的两个线性泛函的和的形式，其中 $\text{III}_a \equiv \text{III}(x-a)$：

$$f(x) = a(x) * (\text{III}f) + b(x) * (\text{III}_a f)。$$

分解函数 $a(x)$ 在 $x=0$ 处必须等于1，而在其它采样点为零；$b(x)$ 必须是 $a(x)$ 的镜像，即 $b(x) = a(-x)$。

在区间 $-1 \leqslant s \leqslant 1$，

$$\overline{\text{III}f} = F(s+1) + F(s) + F(s-1)$$

和

$$\overline{\text{III}_a f} = e^{i2\pi a}F(s+1) + F(s) + e^{-i2\pi a}F(s-1)$$

对于正的 s，我们有 $F(s+1)=0$，再消去 $F(s-1)$ 得：

$$F(s) = -\frac{e^{-i2\pi a}}{1-e^{-i2\pi a}}\overline{\text{III}f} + \frac{1}{1-e^{-i2\pi a}}\overline{\text{III}_a f},$$

对于负的 s，我们有

$$F(s) = -\frac{e^{i2\pi a}}{1-e^{2i\pi a}}\overline{\text{III}f} + \frac{1}{1-e^{i2\pi a}}\overline{\text{III}_a f}$$

对于所有的 s，我们有

$$F(s) = A(s)\,\overline{\text{III}f} + A^*(s)\,\overline{\text{III}_a f},$$

其中

$$A(s) = \begin{cases} -\dfrac{e^{i2\pi a}}{1-e^{-i2\pi a}} & 0 < s < 1 \\ -\dfrac{e^{i2\pi a}}{1-e^{i2\pi a}} & -1 < s < 0 \\ 0 & |s| > 1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{i}\cot a\pi\Lambda'(s)。$$

所以

$$a(x) = \mathrm{sinc}2x - (\pi\cot a\pi)x\,\mathrm{sinc}^2 x,$$

如图 10.10 所示[①]。

人们也许奇怪，等间隔采样可以成对地重组，直至达到闭合区间的尽头。然而，只要保持原始的平均间隔不变，可以用任何间隔的尺寸把采样样本捆绑分组。捆绑可以非常的紧密。参见 Linden 的证明，用 $n+1$ 倍的普通采样间隔的采样点上的幅度和它的前 n 阶导数，就足以描述一个带限函数。在极限情况下，当 n 趋于无穷，重构原函数的方程变成 Maclaurin 级数。这引入了高阶采样定理的实际适用性的疑问，因为我们知道 Maclaurin 级数

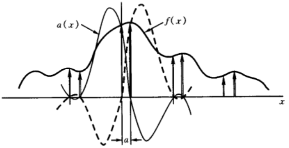


图 10.10　交错采样

$$f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$$

一般不一定收敛于 $f(x)$。(考虑函数 $\Pi(ax)$，对于不同的 a，它们都拥有同样的 Maclaurin 级数。)

在实际中，因为一点点噪声就能强烈地影响高阶导数或差分，高阶采样就失效了。即使完全没有噪声，由于完全确保函数带限是不可能的，可以预料在某些阶段仍然存在问题。所以，在采样定理的实际应用中，一定要仔细检查对一个给定函数的带限要求，并且必须估计出任何由此引起的误差。

存在噪声的采样

假设我们不能无误差地得到某个函数 $f(x)$ 的采样 $f(n)$；即，观察到的量是

$$f(n) + 误差$$

那么当我们尝试使用从观察到的采样值重构 $f(x)$ 时，如果使用从真采样值(无误差)重构函数的同样过程，重构的函数值将不同于 $f(x)$ 的真值。

考虑中点内插情况，假设在 $x = \pm\frac{1}{2}, \pm 1\frac{1}{2}, \pm 2\frac{1}{2}, \cdots$ 进行采样，那么

---

① 关于采样定理的讨论可以参见 Linden(1959)。在这篇文章中分解函数 $a(x)$ 取如下形式。

$$a(x) = \frac{\cos(2\pi x - a\pi) - \cos a\pi}{2\pi x \sin a\pi}$$

分子是一个移位的余弦波，它的零点在 $x = n$ 和 $x = n + a$ 处，但是在 $x = 0$ 处的零点被 $a(0) = 1$ 时分子的消失所抵消。

$$f(0)=0.6366[f(\frac{1}{2})+f(-\frac{1}{2})]-0.2122[f(1\frac{1}{2})+f(-1\frac{1}{2})]+$$
$$0.1273[f(2\frac{1}{2})+f(-2\frac{1}{2})]-\cdots$$

影响 $f(\frac{1}{2})$ 和 $f(-\frac{1}{2})$ 的误差必然对 $f(0)$ 有很大的影响；每个误差都降为原来的 0.636 6 倍，在 $x=0$ 处由最近的两个采样点引起的净误差可以是从零(如果两误差碰巧抵消)到一个误差的 1.27 倍之间的任何值。很明显，在应用采样定理内插时所引入的误差与影响采样数据的误差具有相同的幅度数量级。我们不能预料得比这更多了，因此可以总结为内插过程可以容忍噪声的存在。

这里的目标并不是探究统计问题，而是指出当各采样间的误差互相独立时所引起的误差的一个简单结果，所有采样点的误差来自于一个均值为零，方差为 σ^2 的(噪声)母体。那么在 $x=\frac{1}{2}$ 处的误差对 $x=0$ 处贡献的误差的方差为 $(0.6366)^2\sigma^2$，由所有采样点上的误差在 $x=0$ 处产生的总误差的方差为：

$$[\cdots+(0.1273)^2+(0.2122)^2+(0.6366)^2+(0.6366)^2+$$
$$(0.2122)^2+(0.1273)^2+\cdots]\sigma^2。$$

现在，括号中级数的各项的值就是 sinc^2x 在 x 的单位间隔上的值，所以加起来等于 1。因此，在这种简单的误差情况下，内插值与采样数据具有同样的误差。

现在我们把相同的推理应用于交错采样，特别是窄间隔比宽间隔小很多的极限情况，即 $a\ll 1$。在点 $x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}$ 处，这里是宽间隔的中点，最近的四个采样点的系数是

$$a(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}),\ b(-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}),\ a(\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}),\ b(-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2})。$$

这些系数中的第一个和最后一个是正的，其它是负的。在 $a(x)$ 的公式中存在 $\cot a\pi$ 说明数值可能会很大。这样，内插值是由大值的对消产生的，而且总误差可能会很大。

我们可以用另一种方法看这个问题，一对项

$$f(0)a(x)+f(a)b(x-a)$$

可以表示为下面形式

$$[a(x)+b(x-a)][\frac{f(0)+f(a)}{2}]+\frac{b(x-a)-a(x)}{2}[f(a)-f(0)]。$$

这里，第一项表示一对样本的平均乘以某个系数，第二项表示两个小间隔样本的差乘以另一个系数。在极限情况下，当 $a\to 0$ 时，将得到坐标和斜率采样定理的分解函数。这时，差分项的系数会很大。例如，当 $a<0.2$ 时，交错采样的插图中所采用的值，系数就会大于 1，这样差分项的误差就被放大了。

如此看来，在采样间隔宽窄交替出现的交错采样中，是不允许有误差的，因此在实际应用中，必须仔细估计误差的大小。在对它进行详细研究时，必须要考虑到连续采样点的误差之间的任何关系，因为当 $f(a)$ 与 $f(0)$ 具有相同的误差时，$f(a)-f(0)$ 中的误差显然会被抵消。

傅里叶级数

众所周知，一个周期波形，比如与乐器的一个持续不变的音符相关的声学波形，是由基波和谐波构成的。用可调谐振器探测这种声学场，发现能量都集中在基频的整数倍频率上。用目前使用的傅里叶变换进行处理，没有一种情况会被排除在外。然而，保持严格的周期性（在物理上是不可能的）显然可以得到一个冲激状频谱，并且可以使用有关冲激的理论对其进行详细研究。我们现在着手进行讨论，为了方便地处理与周期性所固有的复制特性以及与采样产生谐波谱有关的冲激串，我们使用 *shah* 符号。

傅里叶级数表现为傅里叶变换的极限情况，而传统的惯例正与此相反，传统上是用傅里叶级数作为出发点发展傅里叶变换。

为了参考，把与频率为 f，周期为 T 的周期函数 $g(x)$ 相关的傅里叶级数表示为

$$a_0 + \sum_1^{\infty}(a_n\cos 2\pi nfx + b_n\sin 2\pi nfx),$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} g(x)\mathrm{d}x$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} g(x)\cos 2\pi nfx\,\mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} g(x)\sin 2\pi nfx\,\mathrm{d}x。$$

只要 $g(x)$ 能使上面的积分存在，它可以任意选择。

很多涉及傅里叶级数的理论的目的是证明与周期函数 $g(x)$ 相关的级数事实上常常是收敛的，更进一步，如果它收敛，那么常收敛到

$$\frac{1}{2}[g(x+0)+g(x-0)]。$$

关于这个主题的严格的研究是 Dirichlet 在 1829 年发起的，一个有争议的时期可以追溯到 1753 年，那时 D. Bernoulli 就成功地把弦的振动形式表示为级数

$$y = A_1\sin x\cos at + A_2\sin 2x\cos 2at + \cdots$$

Euler 在这个问题上也做了研究，并且得到了行波的一般方程，他指出如果 Bernoulli 是正确的，那么任意函数都可以展开为正弦级数。他说，这是不可能的。在 1807 年，傅里叶在向 Paris Academy 提交的论文中得出相同的结论，Langrange 指出它是不可能的。这个令人激动的课题在纯数学中产生了许多重要的发展，包括 Riemann 积分的发明。我们必须记住傅里叶 a_0，a_n，b_n 的表示方法在现代分析发展之前很早就有了。

为了当前的目的，我们取 $T=1$ 并注意到复常数 $a_n - \mathrm{i}b_n$ 通过傅里叶变换与一个周期段 $g(x)\Pi(x)$ 相关：

$$a_n - \mathrm{i}b_n = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi nx}\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\prod(x)\mathrm{e}^{-2i\pi nx}\,\mathrm{d}x = 2F(n)\ 。$$

我们现在用周期函数的傅里叶变换来恢复这些结果。

令 $f(x)$ 为具有普通傅里叶变换 $F(s)$ 的一个函数（见图 10.11），然后与复制符号 $\mathrm{III}(x)$ 卷积得到周期函数 $p(x)$，定义为

$$p(x) = \mathrm{III}(x) * f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(x-n) \qquad n \text{ 为整数。}$$

$f(x)$ 的绝对可积性，这是傅里叶变换所要求的，保证了和的收敛。$p(x)$ 的周期为 1，即

$$p(x+1) = p(x)$$

对所有的 x。

对于 $p(x)$ 没有普通的傅里叶变换，因为

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\ p(x)\ |\ \mathrm{d}x$$

不收敛，除非 $p(x)$ 全为零这种无关紧要的情况。因此，我们对 $p(x)$ 乘以一个因子 $\gamma(x)$，使对 x 的较大值（包括正值和负值）它衰减到零。实际上，我们把严格的周期函数 $p(x)$ 变成在物理上可实现的，但只有很少的函数才可以这么做（见图 10.12）。令

$$\gamma(x) = \mathrm{e}^{-\pi\tau^2 x^2},$$

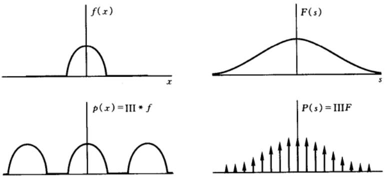


图 10.11　周期函数在极限意义下的变换

那么 $\gamma(x)$ 的傅里叶变换 $\Gamma(s)$ 就为

$$\Gamma(s) = \tau^{-1}\mathrm{e}^{-\pi s^2/\tau^2}\ 。$$

函数 $\gamma(x)p(x)$ 就有傅里叶变换

$$\gamma(x)p(x) = \gamma(x)\sum_{-\infty}^{\infty} f(x-n)$$

$$\supset \Gamma(s) * \sum_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2i\pi ns} F(s)$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} F(n)\Gamma(s-n)。$$

用 *shah* 符号来表示它，即

$$\sum_{-\infty}^{\infty} F(n)\Gamma(s-n) = \Gamma(s) * [\text{III}(s)F(s)]。$$

现在令

$$P(s) = \text{III}(s)F(s)。$$

这里实体 $P(s)$ 是一串不同强度的等间隔冲激，是 $F(s)$ 在 s 的整数值上的采样，具有性质

$$\gamma p \supset \Gamma * P。$$

根据卷积定理，我们看到 P 是一个表达 $p(x)$ 的傅里叶变换的合适的符号，实际上，随 $\tau \to 0$，γp 是一个函数序列，它的极限是 p，序列 $\Gamma * P$ 定义了这样一类 P 的实体，一样地，我们称 $p(x)$ 和 $P(s)$ 是极限意义下的傅里叶变换对。

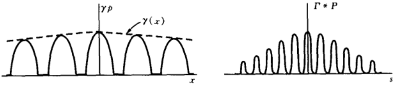


图 10.12　收敛因子 γ 作用于周期函数 $p(x)$ 使得它的无穷积分收敛，而对 Γ 作卷积去除了线谱 $P(s)$ 中的无穷间断点

取 $f(x)$ 为一个周期段 $g(x)\Pi(x)$，我们看到一个周期函数的频谱是一组冲激，冲激的强度是 $F(s)$ 的等间隔采样，$F(s)$ 是一个周期段的傅里叶变换。有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \text{III}(s)F(s)e^{+i2\pi sx}\,ds &= \sum_{-\infty}^{\infty}\int_{n-0}^{n+0} F(s)e^{+i2\pi sx}\,ds \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} F(n)e^{+i2\pi nx} \\ &= F(0) + \sum_{1}^{\infty}[F(n)e^{+i2\pi nx} + \text{共轭项}] \\ &= F(0) + 2\sum_{1}^{\infty}(\text{ReF}\cos 2\pi nx - \text{ImF}\sin 2\pi nx) \\ &= a_0 + \sum_{1}^{\infty}(a_n\cos 2\pi nx + b_n\sin 2\pi nx)\end{aligned}$$

如果 $a_n - ib_n = 2F(n)$，这恰恰就是前面引用的复系数 $a_n - ib_n$。

周期函数具有无限的能量（它的积分不是绝对收敛的），因而对傅里叶级数的严密的讨论通常比傅里叶积分的讨论更为复杂。因此，很自然地，物理上把周期函数看作是具有有限能量的函数的逼近，把"线谱"看作是具有有限能量密度的连续谱的逼近。奇怪的是，物理上可实现的函数和谱却经常表示为物理上不可实现的一种详尽描述（elaborations）。一些人不明白线

谱，不论线条捆扎得有多紧，最终如何能变为一个连续的谱。这种表达是从更早的三角级数继承而来的，并且得到了相应的发展(用我们的术语)。周期函数 $\text{III} * f$ 具有线谱 $\text{III}F$(傅里叶系数集)。如果重复周期延长到 τ 倍，那么谱线的捆扎收紧了 τ 倍，幅度减弱到 $1/\tau$ 倍(注意图 10.13 中纵坐标尺度的补偿变化)。现在让周期变为无限大，脉冲 f 不再出现。于是代表周期函数的三角级数和变为无穷积分，且描述级数系数的有限积分仍然不变。这两种积分是 $+\mathrm{i}$ 和 $-\mathrm{i}$ 傅里叶积分。

按这里所述的观点，线谱和周期函数被看作是包含在傅里叶变换理论中的特例，它的处理方法和其它依靠 III 符号的变换处理方法相同，并且与其它极限情况下的变换一样要注意同样的问题。

如图 10.13 所示，间隔为 τ 的无穷多个输入冲激序列变成了间隔为 τ^{-1} 的冲激且不是单位强度。如果 $\tau > 1$，图中就是这种情况，那么变换后的冲激的间隔小于 1，强度大于 1。于是

$$\frac{1}{|\tau|}\text{III}\left(\frac{x}{\tau}\right) \supset \text{III}(\tau s)。$$

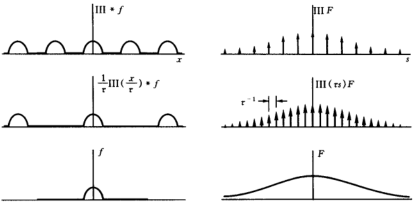


图 10.13 从傅里叶级数导出傅里叶积分

如果改写为 $\text{III}\left(\frac{x}{\tau}\right) \supset |\tau|\, \text{III}(\tau s)$，那么右边由单位冲激构成(间隔 τ^{-1})，而 $\text{III}(x/\tau)$ 有更强的冲激(取 $\tau > 1$)。从相似性定理可以得出这些关系。我们可以理解，当一个短脉冲串被拉伸时，每个脉冲变宽且面积增加；相应的冲激在强度上应该成比例地增加。

Gibbs 现象 从我们已经展开的观点出发，有利于对傅里叶级数理论中的经典主题之一进行研究。在对周期现象进行分析以确定傅里叶级数系数(常被用于预测)的情况中，有一个实际而重要的问题是需要知道应该保留多少项。关于这个问题有多种讨论方法，其中之一是考虑与要表达的周期函数中的断点或锐变有关的过冲现象。

很明显，通过忽略掉超过某个有限频率的项，相当于让周期函数 $p(x)$ 通过一个低通滤波器。这样，如果基频是 s_0，且保留到最高频率 ns_0，这就仿佛是给频谱乘了一个矩形函数 $\Pi(s/2s_c)$，其中 s_c 是介于 ns_0 和 $(n+1)s_0$ 之间的截止频率。s_c 具体取在中间的哪个值都一样，

为了方便可以取为$(n+\frac{1}{2})s_0$。在频谱上乘以$\Pi(s/(2n+1)s_0)$，相当于周期函数$p(x)$与$(2n+1)s_0\operatorname{sinc}[(2n+1)s_0x]$进行卷积。因此，当级数的求和上限频率为$ns_0$，和就成为

$$p(x)*(2n+1)s_0\operatorname{sinc}[(2n+1)s_0x]。$$

卷积函数具有单位面积，故在$p(x)$缓慢变化时，结果与$p(x)$相当一致。

现在我们希望研究在间断点上发生的情况，因此我们选择一个在$x=0$的两边适当的距离内等于$\operatorname{sgn}x$的周期函数(见图10.14)。因为我们把注意力集中在$x=0$附近发生了什么情况，所以在这个范围以外的函数形状并不重要，只要它是周期的。在$x=0$附近，结果近似为

$$(2n+1)s_0\operatorname{sinc}[(2n+1)s_0x]*\operatorname{sgn}x。$$

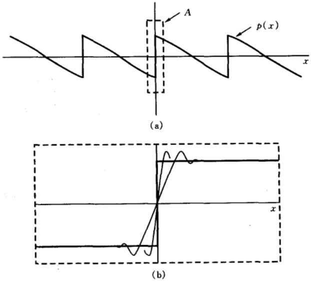


图 10.14 (a) 周期函数$p(x)$；(b) 区域A的放大

我们知道

$$\operatorname{sinc}x*\operatorname{sgn}x=2\int_0^x\operatorname{sinc}t\,dt,$$

一个与正弦积分$\operatorname{Si}(x)$密切相关的函数。实际上

$$2\int_0^x\operatorname{sinc}t\,dt=\frac{2}{\pi}\operatorname{Si}(\pi x)。$$

这个函数对x大的负值在-1附近振荡，随着x接近原点，振荡幅度增加，在$x=0$处通过零点，上冲到最大值1.18，然后变为在$+1$附件的衰减振荡。如果我们改变sinc的尺度因子，用因子$N=(2n+1)s_0$对其进行压缩，并且使其强度增加一个因子N，以致它的单位面积保持不变，那么与$\operatorname{sgn}x$卷积将使在-1和$+1$附近的振荡速度加快但振荡幅度不变，即：

$$N\operatorname{sinc}Nx * \operatorname{sgn}x = \frac{2}{\pi}\operatorname{Si}(N\pi x)。$$

这等于不连续量的 9% 的过冲仍保持在 9%，但在更接近间断点的地方达到最大值。在负半边发生的最小值的情况与此相同。

现在我们仔细观察，当傅里叶级数被截尾后会发生什么情况。无论傅里叶级数包含多少项，在任何间断点的两边都会出现过冲，过冲量为 9%。在间断点一边的给定点上，振荡幅度会随 N 的增长而无限减小，因此，傅里叶级数和的极限会趋近于函数值（在间断点上，级数和趋于跳变的中点）。尽管如此，级数和与函数值的最大偏差，即误差仍不能为零，随着最大值越来越接近间断点，最大偏差将趋于一个精确值 9%，这和从 $\operatorname{sgn}x$ 中得到的一样，因为远离间断点的函数部分的确是无关的。

这个行为使我们想起 $x\delta(x)$，它对所有的 x 都为零，即使定义它的序列有非零的最大值和最小值。

有限区间傅里叶变换　在自变量的范围不是从 $-\infty$ 到 ∞ 问题中，引入有限区间傅里叶变换是很有用的。例如：

$$F(s,a,b) = \int_a^b f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\mathrm{d}x。$$

从这个定义式，我们可以推出逆变换公式、卷积定理和有关函数导数的有限区间变换的一些定理等。作为逆变换的一个特例，我们有

$$F(s,0,\frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\sin 2\pi xs\,\mathrm{d}x,$$

$$f(x) = 4\sum_{s=1}^{\infty} F_s(s,0,\frac{1}{2})\sin 2\pi xs。$$

后一个方程的右边可以看作是一个在$(0,\frac{1}{2})$ 区间与 $f(x)$ 相同的周期函数的傅里叶级数。

显然，有限区间傅里叶变换的理论与傅里叶级数理论相同，且它们使用时的主要优势都在于逼近。我们已经看到通过极限意义下变换的概念把傅里叶级数纳入到傅里叶变换的范畴可以带来许多方便，所以我们也要把有限区间的变换包含进来。根据普通正弦变换，我们可以把前面例子写成如下形式

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\sin 2\pi xs\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{2}\Pi(x)f(x)\right]\sin 2\pi xs\,\mathrm{d}x,$$

一般情况下，

$$\int_0^b f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\Pi\left(\frac{x-\frac{1}{2}(b+a)}{b-a}\right)f(x)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xs}\mathrm{d}x。$$

换句话说，我们用一个在原来的积分范围外为零的函数的无穷积分代替了有限区间积分。

由此就可以得到有限区间变换的所有特性。例如，函数的导数（一般地）在截止点 a 和 b 将会成为冲激，所以导数的傅里叶变换将包含两个特殊的项，它们与 a 和 b 处的跳变成正比。当我们叙述一个函数的导数的傅里叶变换是函数的傅里叶变换的 $\mathrm{i}2\pi s$ 倍这个定理时，没有必要明

确提到变换的这个性质。例如，$\Pi'(x)$ 的傅里叶变换是 $i2\pi s \cdot \mathrm{sinc}\, s = 2i\sin\pi s$。然而，有限区间变换的导数定理显式地包含了这些附加项。即

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{e}^{-i2\pi xs}\mathrm{d}x = i2\pi sF(s,a,b) + f(a)\mathrm{e}^{-i2\pi as} - f(b)\mathrm{e}^{-i2\pi bs}。$$

傅里叶系数 如果我们考虑单位周期函数 $p(x)$ 的傅里叶级数系数 a_n 和 b_n 的通用公式，即

$$a_n - ib_n = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} p(x)\mathrm{e}^{-i2\pi nx}\mathrm{d}x,$$

我们注意到积分具有有限区间傅里叶变换的形式。如此，尽管 $p(x)$ 是连续变量 x 的函数，但是傅里叶系数却只与一个仅呈现为整数值的变量 n 有关，我们已经研究的傅里叶变换可直接用于确定傅里叶级数的系数。我们知道，有限区间变换可以用一个略有不同的函数 $\Pi(x)p(x)$ 的标准变换表示如下：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Pi(x)p(x)\mathrm{e}^{-i2\pi nx}\mathrm{d}x$$

这样，我们处理变换的方法就可以自由地应用于傅里叶级数系数的确定。

作为一个例子，考虑一个周期的窄三角窗脉冲串，如图 10.15a 所示，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda[10(x-n)]。$$

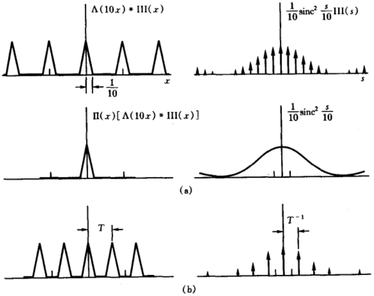


图 10.15 求解傅里叶级数系数

借助于 *shah* 符号来表示，这个脉冲串可以表示为如下形式：

$$\Lambda(10x) * \mathrm{III}(x),$$

它的变换为：

$$\frac{1}{10}\mathrm{sinc}^2\ \frac{s}{10}\mathrm{III}(s)。$$

我们注意到这个表达式中的$\frac{1}{10}\mathrm{sinc}^2(s/10)$来自于

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda(10x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi sx}\mathrm{d}x,$$

根据周期串 $\Lambda(10x) * \mathrm{III}(x)$，它和下式相同，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(x)[\Lambda(10x) * \mathrm{III}(x)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi sx}\mathrm{d}x。$$

如此通过对串中的一个单脉冲取傅里叶变换，我们恰好得到了与傅里叶级数有关的表达式。果然不错，s 是连续的，n 是不连续的，但是

$$\frac{1}{10}\mathrm{sinc}^2\ \frac{s}{10}\mathrm{III}(s)$$

除在 s 的离散值以外都为零，并且在这些值上的冲激强度等于相应的傅里叶级数的系数。

一般情况下，一个函数

$$f(x) * \frac{1}{T}\mathrm{III}(\frac{x}{T})$$

有任意的周期 T，其变换

$$F(s)\mathrm{III}(Ts)$$

说明傅里叶级数的系数可以通过读取不同间隔 $s = T^{-1}$ 处的 $F(s)$ 来获得，如图 10.15b 所示。

周期冲激串

x 的周期函数的傅里叶变换是一串等间隔的冲激，反之亦然。如果一个周期函数本身是由等间隔的冲激所构成，或者如果一个冲激串本身是周期的，那又是什么样子的呢?

从原函数 $f(x)$，通过与 $\mathrm{III}(x)$ 的卷积生成一个具有单位周期的周期函数 $p(x)$。因为$p(x)$具有单位周期，它的变换为 $P(s)$，由单位间隔的冲激组成。现在，通过乘以间隔为 X 的单位强度的冲激串对 $p(x)$ 进行采样，其中间隔 X 小于 1，得到一个周期冲激串(图 10.16 左下)。

$$\hat{f}(x) = [\mathrm{III}(x) * f(x)]\frac{1}{X}\mathrm{III}(\frac{x}{X})。$$

通过观察得出

$$\hat{f}(x) \supset \hat{F}(s) = [\mathrm{III}(s)F(s)] * \mathrm{III}(Xs)。$$

这样，对 x 的周期函数均匀采样(图 10.16 左下)得到一个类似于采样函数的均匀复制的结构

(图 10.16 右下)。因此 $\hat{f}(x)$ 可以用两种方法表示,即

$$\hat{f}(x)=[\text{III}(x)*f(x)]\frac{1}{X}\text{III}(\frac{x}{X})=[f(x)\frac{1}{X}\text{III}(\frac{x}{X})]*\text{III}(x)。$$

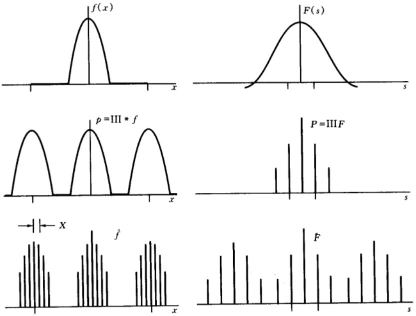


图 10.16 首先对 $f(x)$ 进行等间隔复制(中左),然后以间隔 X 进行采样得到周期冲激串(左下);图的右边是响应的变换,首先在单位间隔上采样(中右),然后以间隔 $1/X$ 进行复制;所有轴上的刻度位于 ± 1 上

我们只图示了第一种方法,因此还存在另一种图形,它的上面一行和下面一行与图 10.16 一样,但是其中间的一行图形与图 10.16 不同,左边的图形应该是 $X^{-1}\text{III}(x/X)f(x)$,而右边的图形应该是 $\text{III}(Xs)*F(s)$。

当实现离散傅里叶变换的时候,无论数据集还是离散变换等价于等间隔冲激串。它们的关系与图 10.16 下面一行两个图的中间簇之间的关系相同。图 10.16 对理解泄漏和混叠现象是很有帮助的,这种现象会导致 $\hat{F}(s)$ 的系数与 $F(s)$ 的值不同,这将会在第 11 章"离散傅里叶变换是否正确"这一节中详细说明。

Shah 符号是它本身的傅里叶变换

shah 符号 $\text{III}(x)$ 的定义如下:

$$\text{III}(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-n)$$

因此,与这里所采用的方法一样,要按照定义序列来考虑 *shah* 符号。作为一个推断,如果它的傅里叶变换证明是 $\text{III}(s)$,那么也可以按照序列来考虑它。

我们着手构造一个普通函数傅里叶变换对的均匀序列,使得其中一个序列可用于定义

III(x)，然后我们看另一个序列是否定义了 III(s)。

考虑函数

$$f(x)=\tau^{-1}\mathrm{e}^{-\pi\tau^2x^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\pi\tau^{-2}(x-n)^2}。$$

对一个给定的小的值 τ(稍后我们将允许 τ 变化从而形成一个序列)，函数 $f(x)$ 表示一串宽度为 τ 的窄高斯(Gaussian) 尖峰，并且整体乘了一个宽度为 τ^{-1} 的宽高斯包络(见图 10.17)。当 $\tau\to 0$ 时，在 x 的整数值上的每一个尖峰将会变窄且高度增加。对任何 x 的非整数值，我们可以证明当 $\tau\to 0$ 时，$f(x)\to 0$，另外，每一个尖峰下的面积趋于 1。因此这个序列恰当地定义了位于 x 的整数值上的一系列等间隔单位脉冲。

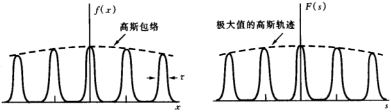


图 10.17 用于讨论 shah 符号的变换对

因为 $|f(x)|$ 是可积的，且无不连续点，所以函数 $f(x)$ 具有普通的傅里叶变换。其傅里叶变换 $F(s)$ 由下式给出：

$$F(s)=\tau^{-1}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\pi\tau^2m^2}\mathrm{e}^{-\pi\tau^{-2}(s-m)^2}。$$

得到此式的一种方法是注意到因子

$$\tau^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\pi\tau^{-2}(s-n)^2}$$

是周期的，且具有单位周期，因此可以被表示成一个傅里叶级数。傅里叶级数理论是数学的一个成熟的分支，我们有权利用它，只要我们不试图使用 shah 符号的自变换特性作为基础来重新建立傅里叶级数理论。其傅里叶级数是：

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\pi\tau^2m^2}\cos 2\pi mx。$$

因此

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\pi\tau^2m^2}\mathrm{e}^{-\pi\tau^2x^2}\cos 2\pi mx\\&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\pi\tau^2m^2}\mathrm{e}^{-\pi\tau^2x^2}\mathrm{e}^{2\pi imx}。\end{aligned}$$

通过逐项应用移位定理，我们就得到了上面引用的 $F(s)$ 的形式。

函数 $F(s)$ 是宽度为 τ 的一串高斯尖峰，其最大值位于宽度为 τ^{-1} 的宽高斯曲线上。和前面

一样,可以证明随 $\tau \to 0$ 时,它恰好是 *shah* 符号的定义序列。

参考书目

Blackman, R. B., and J. W. Tukey: "The Measurement of Power Spectra from the Point of View of Communications Engineering," Dover Publications, New York, 1958.

Jenkins, G. M., and D. G. Watts: "Spectral Analysis and Its Applications," Holden-Day, San Francisco, 1969.

Linden, D. A.: "A Discussion of Sampling Theorems," *Proc. IRE*, vol. 47, p. 1219, 1959.

Shannon, C. E.: "A Mathematical Theory of Communications," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 27, pp. 379-423 and 623-656, 1948.

——: "Communication in the Presence of Noise," *Proc. IRE*, vol. 37, pp. 10-21, 1949.

Wiener, N.: "The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications," Wiley, New York, 1949.

习题

1. 证明一个具有单位周期的周期函数 $p(x)$ 可以用无限多种方法表示成 $\text{III}(x) * f(x)$ 的形式,把这一点和下面的事实联系起来:无限多种不同函数可以共有同样的等间隔采样集合。

2. 用三种不同的方式,将周期冲激串 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi[10(x-n)]$ 表示成 $\text{III}(x) * f(x)$ 的形式。

3. 级数系数 确定下列周期函数的傅里叶级数系数,函数的周期等于 1,在间隔$(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2})$上,定义如下:

(a) $\cos\pi x$, $\Lambda(2x)$, $\Pi(2x) - \frac{1}{2}$;

(b) $\Lambda(8x-1)$, $(1-4x)H(x)$;

(c) $e^{-\pi x^2}$, $1-4x^2$, $e^{-|x|}$, $e^{-x}H(x)$。

4. 内插 下列采样集合确定了一个带限函数:

$$\cdots 0, 10, 30, 50, 50, -40, -35, -10, -5, 0, \cdots$$

所有省略的采样点均为零。通过数值内插来还原该函数。函数的最小值是多少?

5. 欠采样 某个函数是近似带限的,即它的功率谱的一小部分 μ 事实上超过了标称的截止频率。用标称的采样间隔对其采样并用通用的规则重构这个函数。使用下列不等式

$$f(x) \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |F(s)| \, ds$$

来检验原函数与重构函数有多大的差异。

6. 幅度和斜率欠采样 如果对上面所提及的近似带限函数进行幅度和斜率采样。使用下列不等式

$$f'(x) \leqslant 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |sF(s)| \, ds$$

证明即使 μ 很小，原函数与重构函数的差异也会比较严重。

7. 有噪声情况的采样　给一个带限函数加一点噪声。在采样前，我们对加噪函数进行滤波以消除超过原始截止频率的噪声分量。然而，函数仍然会被小部分的带限噪声所污染。检验在存在噪声的情况下，幅度和斜率采样与普通（幅度）采样的相对敏感性。

8. 自卷积　一个有限长的具有有限强度的等间隔冲激序列：

$$a_0\delta(x)+a_1\delta(x-1)+\cdots+a_n\delta(x-n)$$

和它本身进行多次卷积，结果是另一个冲激序列：

$$\sum a_i\delta(x-i)。$$

结合中心极限定理和采样定理，证明 α_i 对 i 的图形近似是一个正态分布。指出系数 a_0，a_1，a_2，…，a_n 必须满足的简单条件。

9. 自卷积　在前一个问题中，用一个违反条件的简单例子进行练习，给出一个合适的理论来解释它。

10. Gibbs 过冲　证明在讨论 Gibbs 现象时所引入的 9% 的过冲，由下式严格给定

$$-\int_1^{+\infty}\operatorname{sinc}x\mathrm{d}x。$$

11. 带通信号的采样　一个载波电话信道的带宽范围是从低频 $f_l=95$ kHz 到高频 $f_h=105$ kHz。用 21 kHz 采样率对其采样，得到的新波形由在采样时刻的很短的脉冲组成，脉冲的强度正比于采样值。作出一图形说明新波形所占用的频带，并且验证可以从新波形中重构原波形。证明，在一般情况下临界采样速率是 $2f_h$ 除以不超过 $f_h/(f_h-f_l)$ 的最大整数。

12. 交错采样　在前一个问题中，证明一般情况下用速率 $2(f_h-f_l)$ 进行采样所得的数据不能重构出载波信号。证明：通过对两串等间隔采样数据进行适当的交错，平均采样速率就可以降低到 $\frac{1}{2}$ 带宽。

13. 数据样本的模拟滤波　一个带限信号 $x(t)$ 通过一个冲激响应为 $I(t)$ 的滤波器。输入和输出信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 可用采样值 x_i 和 y_i 来表示。证明：

$$\{y_i\}=\{x_i\}*\{I_i\}$$

并解释如何得到 $\{I_i\}$。

14. 来自输出的输入　在上题中，输入信号的采样是 $\{x_i\}=\{1\ 2\ 3\ 4\ 5\cdots\}$，描述滤波器的序列 $\{I_i\}$ 是 $\{1\ 2\ 1\}$。证明输出序列 $\{y_i\}$ 是 $\{1\ 4\ 8\ 12\ \cdots\}$ 并且通过计算下式，可以从已知的输出中得到输入序列。

$$\{1\ -2\ 3\ -4\ 5\}*\{1\ 4\ 8\ 12\ \cdots\}$$

15. 递归预测　在上题中，用数值验证一个特殊的输出信号可以用以前的输出信号加上一个最近的输入信号的采样来表示，即：

$$Y_i=\alpha_1Y_{i-1}+\alpha_2Y_{i-2}+\cdots+\beta X_i。$$

证明，系数 α_1，α_2，… 和 β 可以由下面的逆序列给出：

$$\{K_0\ K_1\ K_2\cdots\}=\{I_i\}^{-1}$$

其中$\{\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\cdots\} = -\dfrac{1}{K_0}\{K_1\ K_2\ K_3\ \cdots\}$和$\beta = \dfrac{1}{K_0}$。

16. 带通滤波器 一个滤波器的输入信号已经停止了，但仍在继续输出，并且每一个新的采样样本都可以通过下列关系从其前面的采样值中得出

$$Y_i = \alpha_1 Y_{i-1} + \alpha_2 Y_{i-2} + \cdots$$

证明：

$$Y(t) = [\alpha_1\delta(t-1) + \alpha_2\delta(t-2) + \cdots] * Y(t)\ 。$$

在一个特例中，只有两个非 0 系数。

$$Y_i = 1.65Y_{i-1} - 0.9Y_{i-2}$$

在输入中止之后，紧接着的两个输出的采样值均为 100；计算并画出足够多的输出来确定该响应的普遍特征。证明一个阻尼振荡$Y(t) = e^{-\sigma t}\cos[\omega(t-a)]$满足上面给出的卷积关系，当$\alpha_1 = 2e^{-\sigma}\cos\omega$，$\alpha_2 = -e^{-2\sigma}$时，这是一个带限响应吗？

17. 通用滤波器 在上题中，证明如果滤波器是由有限个电感、电容和电阻组成的，那么y_i序列只包含有限项。从而证明对一个内部结构未知的滤波器，在滤波器的输出端进行有限的连续测量后，由任何输入信号导致的输出都是可以推导的。你如何知道已经取到了足够的采样点？

18. 拆解黑盒子 一个电气系统的输入电压$X(t)$和输出电压$Y(t)$在均匀的间隔上同时采样，所得数据如下：

$X(t)$	15	10	6	2	1	0	0	0	0	0
$Y(t)$	15	15	7.5	−2.75	−2.5					

计算丢失的$y(t)$，并且计算在一段时间后如果$x(t)$开始线性增长，输出应该是什么。

19. *Shah* 符号 证明

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi ns} = \text{III}(s)。$$

20. 样本和与积分成正比 对一个有限持续期的带限信号以等间隔T进行采样，并且对采样值求和。证明，假设满足一定的条件，如果取同样数量的采样点，但间隔在$T-b$和$T+b$之间交替变化（交错采样），那么和就是相同的。

21. 计算机图形 一个计算机打印输出了一长串数字，它们要被画成一张图。Smith 用手绘出了每个点，这些点看起来似乎正好位于一条光滑的曲线上，他用手画了一条通过这些点的光滑曲线。另一方面，Johnson 用一个计算机程序自动绘出这些点，并且用直线把相邻的点连接起来。Smith 说："通过你的机械似的曲线上尖锐的拐角，我知道你引入了一个实际上不存在的高频分量。"Johnson 说："我的曲线是更可信的，因为其中不包含任何主观因素。"Robinson 说："我用我的傅里叶分析仪分析了这两条曲线，Johnson 的曲线中有 Smith 的曲线中不存在的高频分量，但实际上是不可检测的。主要的差异是除了直流和附近的低频以外，Smith 的谱明显比 Johnson 的谱大。即便有的话，似乎是 smith 增加了额外的分量，但是是在中频范围内。"Lee 说："也许 Smith 的曲线是最好的，机械描绘方法减去了一些分量。" 现在可以比给出定性的意见做得更好一些；你想说点什么？

22. 更新算子 复杂的输入波形作用于一个线性时不变系统，且它的响应可以从下面形

式的方程中逐步计算出来，即

$$\Delta V_2(t) = U\{V_1(t)\},$$

其中U是作用于$V_1(t)$上的一个操作，它能被应用于任何特殊的时刻。那么，在过了Δt之后，完全相同的操作就作用于$V_1(t)$的更新的段上，且计算出$V_2(t)$中新的增量，等等。操作U是什么?在什么情况下，这种计算方法优于$V_1(t)$和冲激响应$I(t)$的简单卷积?

23. 乘积和卷积的结合率 两个函数相互卷积，但它们中的第一个是被采样的信号。研究$[f(x)\mathrm{III}(x)]*g(x) = f(x)*[\mathrm{III}(x)g(x)]$是否成立。

24. Parseval 定理 如果$p(x)$是一个实的周期信号，周期为T，证明：

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[p(x)]^2\mathrm{d}x = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2),$$

其中a_n和b_n是$p(x)$的傅里叶级数的系数。

25. 内插 给定函数$f(x)$在x的所有整数值上的值

(a) 证明：

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)\mathrm{sinc}(x-n)$$

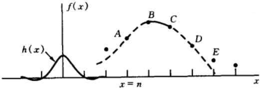
是一个内插公式，由此可以正确地得到所有x值上的$f(x)$的值，假设$f(x)$不包含每单位x 0.5 周期或更高的频率。

(b) 证明：这个内插公式可以表示成$\mathrm{sinc}x$与$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)\delta(x-n)$的卷积。

26. 仿样内插 令$f(n)$，$f(n+a)$，$f(n+2a)$和$f(n+3a)$是四个连续的数据值(标为A，B，C和D)。建议进行如下的内插。一条三次曲线(图中的虚线)通过A，B，C和D(一条三次曲线能通过六个点)且强加两个附加条件。B点的斜率等于直线AC的斜率且C点的斜率等于直线BD的斜率。弧BC就被看作是内插，对点B，C，D，E使用同样的方法可得弧CD，等等。这就是样条内插的形式，之所以称为仿样内插是因为它类似于绘图员在画曲线时用作向导的灵活的仿样。证明：上述操作可以表示为和下式的卷积，

$$h(x) = \begin{cases} 0.5a^{-3}(3|x|^3 - 5a|x|^2 + 2a^3) & 0 \leqslant |x| \leqslant a \\ 0.5a^{-3}[-|x|^3 + 5a|x|^2 - 8a^2|x| + 4a^3] & a \leqslant |x| \leqslant 2a \\ 0 & |x| \geqslant 2a \end{cases}$$

并且求出相应的传输函数，得出中点内插的系数序列并且解释对它们求和得到的值。



27. Lagrange 内插 函数$f(x)$在x的所有整数值上的值给定，在$x = n + p$处的内插值，其中$0 < p < 1$，可以用 Lagrange 四点内插公式计算，即

$$f(n+p) \approx -p(p-1)(p-2)\frac{f(n-1)}{6}+(p^2-1)(p-2)\frac{f(n)}{2}-$$

$$p(p+1)(p-2)\frac{f(n+1)}{2}+p(p^2-1)\frac{f(n+2)}{6}。$$

内插值是给定值的线性函数，但是能被表示成卷积的形式吗？在哪种情况下，Lagrange 内插能被描述为具有与众不同的传输函数的滤波操作。

28. 有限采样样本 通过不同的日期在合适的位置对河水流动进行测量，就有可能建立一条每秒流量（立方米）和用一个测高仪测量的水面高度之间的校正曲线。在自动测量了高度并且遥测到可以进行计算的中央点以后，我们就可以估计水坝将来的储量和水力发电量。在某个确定的网络中，每个位置每天做一次测量，但基于前 6 个月操作所预测的水坝高度全是错的。程序员 Lee 说："对每日的流量求和并乘以 24 小时，这就是我程序要做的事情，所得结果只能是 6 个月实际容量的近似，严谨地讲，那是一个积分而不是一个求和。"数学家 Long 说："即使河的高度是时间的带限函数，即使我们使用 180 个采样值，都会有无穷多个同样带限的函数通过 180 个采样点。虽然采样的主要特点是允许内插的，但是*内插公式需要无穷多个采样值*。我们隐含着假设第一个值前面的采样值是 0。我有如下的证明，对无论多大 M，虽然所有通过 N 个采样点的函数不必是近似一样的，但是相互之间的不同可以超过 $|M|$。"对引文中的每一句话，请给出你自己的观点。如果你是一个水文学家，你会说些什么？

29. 采样率对内插质量 一个电压形式的数据流在 1 Hz 频率以上包含很小但是足以造成混叠的信号。仔细研究表明，$S(f)=\exp(-\pi f^2)$ 是电压谱的一个很好的表达。形如 $V_0(t)=\exp(-\pi t^2)$ 的简单脉冲就具有这样的谱，所以可以用它进行测试。一个采样器件每 0.5 s 就对 $V_0(t)$ 采样 1 ms。随后，使用这些采样值通过线性内插重构出在示波器上显示的波形。所得到的多边形只是波形 $V_0(t)$ 的粗略近似。在从 $t=-1\sim t=+1$ 的间隔上，平均绝对误差是多少？对采样值相对于峰值信号出现时间的相位有很大影响吗？如果用 sinc 函数内插，那么还需要更精细的安排，但是误差将减小到多少？如果仍使用线性内插，而采样率加倍，误差将会是多少？你有什么样的建议？

30. 混叠 我们需要预测 6 个月的太阳黑子的数量以便对海外无线通信的频率做出安排。就像上两个世纪一样的，每天都测定太阳黑子数，每个月的月底公布列表以及这个月的平均值。当作图时，每个月的均值给出的是一条参差不齐的曲线，它不适合用于趋势的预测，所以，对每一个月，使用下式计算 12 个月的滑动平均 R'_0：

$$R'_0=\frac{R_{-6}}{24}+\frac{R_{-5}}{12}+\frac{R_{-4}}{12}+\frac{R_{-3}}{12}+\frac{R_{-2}}{12}+\frac{R_{-1}}{12}+\frac{R_0}{12}+\frac{R_1}{12}+\frac{R_2}{12}+\frac{R_3}{12}+\frac{R_4}{12}+\frac{R_5}{12}+\frac{R_6}{24}$$

自然地，这个量只能在一定的延迟后才可以使用。从 R'_0 的傅里叶分析可以发现尽管 R'_0 相当光滑，然而曲线上仍然有一些摆动，摆动的周期大约为 8 个月。实际上，傅里叶变换以每月 1/8.4 周期的频率形成峰值。

当太阳大致同样面对地球的时候，与太阳有关的自然周期要包括 11 年的周期和 27 天的时间间隔，所以很难看出 8 个月的摆动与太阳有关。你能解释为什么有摆动吗？

31. 带限函数定理 在 Smith 组织讨论之前，总结了最近的一本技术杂志中的一篇文章，Smith 说："这个作者指出了带限信号的一条性质，根据这个性质两个连续最大值之间的间隔不能小于 αT，其中 T 为临界采样间隔。有人了解这个定理吗？"Lee 说："这或多或少都是明显

的，极限情况下，sinc 函数的连续最大值的间隔从最大的 2.49T 降到 2T。这种 sinc 函数（毕竟，它也是带限函数）叠加后的两个最大值之间的间隔不能小于 2T。因此，$\alpha = 2$。”一直在思考的 Yanko 指出间隔 $T = 1$ 就足以对 $\sin 2t - \exp[-(t/1\,000)^2]$ 进行采样了，并且画了一张草图说明函数在 A 和 B 有两个相当接近的零点。他说：“我很确定，带限函数的积分也是带限的。因此在我的函数的积分中 A 与 B 之间出现的最大值的间隔小于 2T。更进一步，通过调整正弦波的幅度，我可以使间隔小到我所期望的程度。”证实或者驳斥各种陈述。你的 α 值是多少？

32. 和声学 一个电气火车系统的轨道把从 60 Hz 电源经过 12 相整流得到的直流电源传送给机车。安全防范所需要的信号，例如在任一个运行区段中最多只能有一列火车，也沿着同样的轨道传送但是在音频频段。（信号是由在 5 ~ 10 kHz 的范围内的两个频率间切换而产生的二元编码，相邻的运行区段使用不同的频率对。）两个轨道中的大电流有相同的方向且名义上是相等的（“平衡的”）。另一方面，音频电流的方向是相反的，并且通过两个无接触的铁氧体磁心线圈从轨道上取出来，两个线圈的输出合并使得取出的信号加倍，而且理论上消除了在电源频率处的波动。最后一步，通过“最平坦”石英滤波器选出信号频率。尽管如此，这个信令系统对自动火车控制来说还不是十分可靠。

我们建议使用术语“电源频率”。因为直流电机从轨道上提取 720 Hz（和谐波）的波动电流。为了解释：设

$$I_1(t) = \begin{cases} A\cos\omega_0 t & \cos\omega_0 t > 0 \\ 0 & \cos\omega_0 t < 0 \end{cases},$$

其中 $\omega_0 = 2\pi \times 60$ Hz，并设

$$I(t) = I_1(t) + I_1\left(t - \frac{1}{720}\right) + I_1\left(t - \frac{2}{720}\right) + \cdots + I_1\left(t - \frac{11}{720}\right)。$$

作为 12 个交错排列的波形组合的结果，这差不多是纯的直流，但实际上具有 720 Hz 基频的波动分量。如果 $I(t)$ 的直流分量是 10 000 A，如火车起动时就是这样的，计算 5 ~ 10 kHz 范围内每个谐波的安培数。

顾问 A 对音频振荡器的频率稳定性、比特率、信号带宽、滤波器带宽，以及带外抑制电平做了一个英明的评论，但作为一个临时措施，推荐检查和替换所有不符合规范的石英滤波器并用钢丝刷过轨道。顾问 B 陈述说，$I(t)$ 是如下所示的圆齿波形，而电氧体磁线圈提取的波形是锯齿状的，这是因为线圈的响应是流过它的磁通量的导数。为了在所求的音频信号中抑制这个锯齿干扰分量，他建议再做一次微分；于是干扰分量在时间上被严格局部化成短脉冲的形式，这些短脉冲可以在不影响所求正弦信号的电平上被切掉，这正确吗？



33. 带限函数的卷积 我们要精确测量飞机起飞时机场公共汽车站的声能流量。计划是把空气压力 $p(t)$ 和速度 $v(t)$ 的采样数字化地记录下来。初步研究表明，它们的波形都是带限

的，且以采样间隔是 t 的一个单位时就足够了。那么每单位面积的能量流动可以用 $\int_{-\infty}^{\infty} p(t)v(t)\mathrm{d}t$ 表示。采用这种方法可以避免由于单独对压力的能量测量而引起的不确定性，特别是同时存在热气流冲击时。一个年轻的系统理论专业的学生在他的暑期工作中指出，理论上从离散数据得不到正确的积分，并给出了一个从离散数据得到积分的最小均方估计的程序。参加此工作的一个工程师说，他总是取数据值的乘积再把它们加起来。他说："实际上，当以前用手工计算时，我发现如果将两个信道的每两位值扔掉一位，工作量减半却依然可以正确得到答案。"事情的真相是什么？

34. 傅里叶级数 在傅里叶对三角级数研究之前，欧拉就发表了公式 $x/2 = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots$。它是正确的吗？这个公式的什么地方使欧拉没有得到类似傅里叶级数那样的评价。

35. 二项式系数 对一个给定的 n，第 r 个二项式系数 $B(r,n)$ 为 $n!/r!(n-r)!$。写一个 MATLAB 的 m 文件，它的第一行为 **function[y] = binom(n)**，使用这个函数可以生成指定 n 的 $n+1$ 个二项式系数。例如，键入 **binom(5)** 应该得到 1 5 10 10 5 1。

36. 对拉伸的 *shah* 函数的改进的符号 当 $\mathrm{III}(x)$ 被一个整数因子 L 拉伸变成 $\mathrm{III}(x/L)$，最初位于单位间隔上的冲激，现在的间隔为 L 单位，但是它们不再是单位冲激，它们的强度为 L。Mountararat 说："我建议使用一个改进的符号 $\mathrm{III}_L(x)$，它表示间隔为 L 的单位冲激。使用原来的符号，我的函数被表示为 $(1/L)\mathrm{III}(x/L)$"。那么在改进的符号中，$\mathrm{III}_L(x)$ 的傅里叶变换是 $(1/L)\mathrm{III}_{1/L}(s)$，这种假设正确吗？

37. 逆采样理论 一个波形信号的持续期是 T，因此这个信号的频谱可以用频率间隔为 T^{-1} 的等间隔的值完全确定。其中的一个频率值是否必须是零？例如，信号下的面积是否能用不包括频率 $f=0$ 的频谱采样点来确定？

38. 傅里叶级数 证明 $\sin x$ 能展开成如下的余弦级数：

$$\frac{1}{2}\pi\sin x = 1 - \frac{2}{1.3}\cos 2x - \frac{2}{3.5}\cos 4x - \frac{2}{5.7}\cos 6x - \cdots, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

并解释一个奇函数怎么能展开成偶函数的和。

39. 复制的余切函数 看看余切函数是否可以用函数 $1/x$ 沿 x 轴的适当移位的叠加来表示，使得它们的极点与 $\cot x$ 的极点一致，即位于 $x=0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$。换句话说，研究

$$\cot x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - k\pi}。$$

40. 用计算机进行检验分析 有人说 $\mathrm{III}(x)\operatorname{sgn}x$ 的傅里叶变换为 $-\mathrm{i}\cot\pi s$。最里边的冲激对 $-\delta(x+1)+\delta(x-1)$ 的傅里叶变换为 $-2\mathrm{i}\sin 2\pi s$；然后，逐对变换可以得到

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2\sin 2\pi ks = \cot\pi s。$$

为了检查符号错误，丢失因子 2 的错误，或者更多的过失错误，对 s 的一个值计算公式的两边；例如：$\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \sin 3^\circ \cdots$ 相加是否等于 $\frac{1}{2}\cot 0.5^\circ$？画出 N 项的和对 N 的关系并讨论你的结果。

第 11 章

离散傅里叶变换和 FFT

如果我们希望得到一个给定函数的傅里叶变换，一种可能是：函数是用连续的自变量定义的，就像书中常见的情况一样，在变换对的列表中尤其如此。但有时仅在自变量的离散值上给出函数值，就像在规则的时间间隔上进行物理测量一样。与给定函数的形式无关，如果用数值方法计算变换的话，那么就只能得到离散间隔上的变换值。我们经常把这种情况想象为一个潜在的连续变量函数确实存在而且我们在逼近它。然而，从操作的观点上来看，除了给定的值和计算的值(输入和输出)外，讨论值的存在性是不切题的。因此，最好是有一个计算实际数值的数学理论。

离散变换公式

离散问题经常与周期函数联系在一起。一个周期函数可以用(频率的)离散间隔上的一列系数来描述，但这种情形可以被看作是连续频率的一种特例。那么变换可以被看作是一串等间

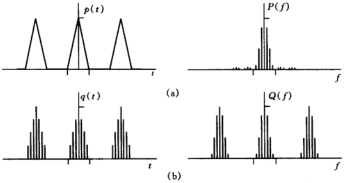


图 11.1 (a) 周期函数 $p(t)$ 及其傅里叶变换 $P(f)$，$P(f)$ 是等间隔的 δ 函数；(b) 等间隔的 δ 函数 $q(t)$ 是周期的，其傅里叶变换 $Q(f)$ 也是等间隔的 δ 函数且是周期的

隔的 δ 函数(图 11.1),其强度由系数给定。如果这个变换本身是周期的,那么会怎么样呢?此时,原函数也将变为一串 δ 函数。由于函数和变换现在都是周期的,那么有关函数和变换的所有信息将被局限于两个有限的系数(δ 函数的强度)集合。周期脉冲序列在较早的第 10 章的结尾已经讨论过了。

这种给定有限个值的集合且计算另一个有限集合的实际情况,实际上是包含在连续理论中的。然而,重新开始建立离散傅里叶变换理论而不是将其纳入连续理论中是划算的。这么做的原因是离散符号比较简洁而且相当规范。

为了保持一些物理的联系,我们考虑一个信号,它是时间的函数,但是为了能意识到其自变量的离散性,我们使用符号 τ,而且我们假设 τ 只取有限数目的 N 个连续的整数值。更进一步,我们商定 τ 不能取负值。这样在进入离散傅里叶变换领域前,如果需要的话,我们首先要进行尺度变化或者改变原点位置。例如,假设电压波形 $v(t)$ 是周期为 1 s 的余弦函数的半个周期(如图 11.2):

$$v(t)=\begin{cases}\cos 2\pi t & -0.25<t<0.25\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

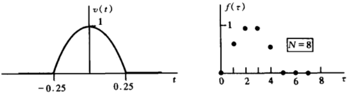


图 11.2 连续变量 t 的函数 $v(t)$ 及一种用 8 个采样值表示它的方法

用 100 ms 的间隔对它进行采样。表 11.1 表示作为 t 的函数的信号值,而表 11.2 则表示如何把它转变为离散时间 τ 的函数 $f(\tau)$。一般地,如果采样间隔为 T,第一采样点在 $t=t_0$,那么

$$f(\tau)=v(t_0+\tau T),\quad \tau=0,1,2,\cdots,N-1。$$

表 11.1

t(ms)	$v(t)$
−250	0
−150	0.588
−50	0.951
50	0.951
150	0.588
250	0

表 11.2

τ	$f(\tau)$
0	0
1	0.588
2	0.951
3	0.951
4	0.588
5	0

下文中,$f(\tau)$ 表示偏移点。值得注意的是,有些函数没有起始点,如 $\exp(-t^2)$,对这种情况没有采取措施。这与离散变换的实际特性是一致的,它不考虑追溯到无限遥远的过去的数据序列。另一个值得注意的特性是,最后一个样点必须在有限的时间内。在表 11.2 中终点不是必须出现在 $\tau=5$ 处,我们可以让 τ 取到 15 并对额外的采样点赋值为 0。这常常是必须做出的有意识的选择,并且可能还是很重要的,例如,表 11.2 不能完全表达出波形的信息 —— 在半个

周期的余弦函数之后，电压保持为 0。表 11.2 没有说明这一点，如果它很重要，就需要添加必要数目的 0。

由定义，$f(\tau)$ 的离散傅里叶变换 $F(\nu)$ 由下式给出

$$F(\nu) = N^{-1}\sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\nu/N)\tau}。 \tag{1}$$

正如周期函数的傅里叶级数展开中的首项系数 a_0 等于函数值的平均一样，离散傅里叶变换的首值 $F(0)$ 等于 $f(\tau)$ 的值的平均 $N^{-1}\sum f(\tau)$。定义中的因子 N^{-1} 是为了遵循先前的惯例。与正式的定义不同，在实际的计算中，将因子 N^{-1} 与后来的归一化因子或作图的尺度因子相结合，比过早对 $F(\nu)$ 的每个元素乘以 N^{-1} 更有效。

ν/N 的值类似于用每采样间隔的周期数度量的频率。符号的对应可以总结如下：

	时间	频率
连续情况	t	f
离散情况	τ	ν/N

在离散情况下选择符号 ν 而不是 f，是为了强调频率整数 ν 和频率有关但是和频率 f 是不一样的。例如：如果采样间隔是 1 s 且有 8 个采样点（$N=8$），那么将在 $\nu=8f$ 处找到频率分量 f，相反地，频率整数 $\nu=1$ 表示频率是 $\frac{1}{8}$ Hz。

给定离散变换 $F(\nu)$，我们可以在下面的逆变换关系的帮助下恢复出时间序列 $f(\tau)$，即

$$f(\tau) = \sum_{\nu=0}^{N-1} F(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\nu/N)\tau}。 \tag{2}$$

为了说明这一点，我们首先验证下面的事实：

$$\sum_{\nu=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\nu/N)(\tau-\tau')} = \begin{cases} N & \tau=\tau' \\ 0 & 其它 \end{cases}。$$

一种方法是把上面的和式在复平面上作图，除了 $\tau=\tau'$ 外，都得到一个闭合的多边形，而 $\tau=\tau'$ 时，多边形将变为由 N 个单位向量首尾相连而形成的一条直线。（假设变量 τ' 的取值为 0，1，…，$N-1$；如果允许取更大的值，例如，$\tau=\tau'$ 能等于 N，$2N$，…，那么对于 $\tau=\tau' \bmod N$，上式和值仍为 N。）另一种考虑方法是从不同频率的正弦曲线之间的正交关系类推得到，把它重写为下式有助于理解这种观点，

$$\sum_{\tau=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\nu/N)\tau}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\nu'/N)\tau} = \begin{cases} N & \nu=\nu' \\ 0 & 其它 \end{cases}。$$

为了建立离散逆变换，为方便起见引入哑元变量 τ'，并将式(1) 代入式(2) 的右边：

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{N-1} F(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\nu/N)\tau'} &= \sum_{\nu=0}^{N-1} N^{-1}\sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\nu/N)\tau}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\nu/N)\tau'} \\ &= N^{-1}\sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau)\sum_{\nu=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\nu/N)(\tau-\tau')}\end{aligned}$$

$$= N^{-1}\sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau)\times\begin{cases}N & \tau=\tau'\\ 0 & \tau\neq\tau'\end{cases}$$
$$= f(\tau')\ 。$$

逆变换定义的不同之处在于其指数上的符号是正的而且前面没有因子 N^{-1}。

从逆变换中我们可以看到，正如离散时间 τ 一样，频率整数 ν 也只需要 N 个整数值且范围从 $0\sim N-1$。N 个(测量)值在变换后仍然能用 N 个参数来表示，这听起来当然是合理的。即使 f 的值是实的，F 的值一般也是复的，正如下面将要看到的，我们必须注意如何计算复数。ν 的取值是整数，而频率 ν/N 的值是小数，这个事实就是我们引入整数 ν 的原因。数学上的方便优先于物理意义。

为了重新获得对数值数量级的实际感性认识，让我们考虑由采样间隔为 1 s 的 1024 个采样值组成的记录。我们期望它可以用由一个常数项和某个确定的基频的倍数所组成的傅里叶级数来表示。基本周期应该是 1024 s，相应的基频为 $\frac{1}{1024}$Hz。所需最高频率将是0.5Hz，它的每个周期中有两个采样点，这就是512次谐波。ν 有1024个值而频率只有512个的原因如下：如果 $f(\tau)$ 的值是实的，就像通常的物理量的记录一样，将有 1024 个实数值。现在变换 $F(\nu)$ 有 1024 个复数值，需要 2048 个实数值来表示它，除了 $F(0)$ 和 $F(N/2)$ 没有虚部外[参见方程式(1)]，其余的 $F(\nu)$ 的一半的值是另一半的复共轭。这是因为 $f(\tau)$ 是实的(第 2 章)。如果 $f(\tau)$ 是复的，那么将有 2048 个实数，$F(\nu)$ 也需要 2048 个实数值来描述。

因为可以达到的最高频率是 0.5 Hz，很明显，ν/N 能达到的最大值是 1023/1024，所以不是严格意义上的频率。例如 $\nu=724$ 时，$\nu/N=0.707$ Hz，正如我们所看到的，超过0.5 Hz的频率既不是必要的又不能用间隔为1 s的采样点来表示。更确切些，$\nu=724$ 对应的是一个负频率 $-300/1\,024$ Hz。

这种异常现象对形象地理解傅里叶变换和离散傅里叶变换之间的关系是一个明显的障碍。使两者协调的一种方法是按照在负值和正值上求和来重新定义离散变换，虽然某些不允许负下标的计算机语言会反对这一点。图 11.3b 显示了信号 $\nu(t)$ 和它的变换 $S(f)$ 如何变成对应的 $f(\tau)$ 和它的离散变换 $F(\nu)$。另一种可选的方法如图 11.3c 所示，它将 $\tau=0$ 与 $t=t_0$ 对应起来，这并没有妨碍标有 A 的较小的负频率与标有 B 的 ν 的较大的正值相对应。

最后，考虑这个问题的另一种常见方法是，去掉 τ 和 ν 在 $0\sim N-1$ 范围取值的限制，使它们可以取包括负数在内的所有整数值。经过延拓以后，函数值是根据 $f(\tau)$ 和 $F(\nu)$ 来分配的周期为 N 的周期函数。这样，

$$f(\tau)=f(\tau\pm N)=f(\tau\pm 2N)=\cdots$$
$$F(\nu)=F(\nu\pm N)=F(\nu\pm 2N)=\cdots$$

这里我们就采用这种方法。在这种方法下，基本的变换及其逆变换可以写为

$$F(\nu)=N^{-1}\sum_{\tau=-N/2}^{N/2-1} f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\nu/N)\tau} \tag{3}$$

$$f(\tau)=\sum_{\nu=-N/2}^{N/2-1} F(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\nu/N)\tau} \tag{4}$$

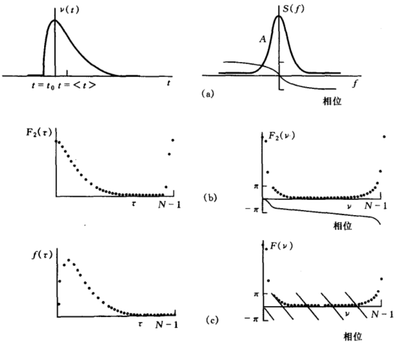


图 11.3　(a) 函数及其傅里叶变换；(b) 和 (c) 是用 N 个采样点表示函数的两种方法及相应的离散傅里叶变换，变换的模（点）和相位（细线）

并且 ν/N 与在 $-\frac{N}{2}\leqslant\nu\leqslant\frac{N}{2}$ 范围内用每采样间隔的周期数度量的频率是一致的。如果采样间隔为 T，则以赫兹为单位的频率为 ν/NT。

在图 11.4 中，由于 $f(\tau)$ 和 $F(\nu)$ 在 τ 和 ν 上是周期的，我们可以看到一种图示它们的方法。图的上半部分有助于和我们以前的经验建立起联系（例如，为了获得一个序列的自相关，我们可以想象左上角图中的 $f(\tau)$ 相对于自己旋转）。对应的值相乘，然后再求和，就给出了自相关的一个值，我们能看出这个结构是如何与我们先前的知识（矩形函数的自相关是一个三角窗函数）联系起来的。这样就能清楚地解释图的下半部分，它是序列的下标从 0 开始的原始形式，它使本来简单的形状变得晦涩、难以明白。

圆周卷积

如果我们对两个序列进行卷积，其中一序列有 m 个元素，另一个序列有 n 个元素，那么卷积和，或者序列积，将有 $m+n-1$ 个元素（24 页）。特别地，如果我们处理的序列有 N 个元素，那么两个这样的序列的卷积其本身不能包含在一个 N 元的序列中。图 11.4（上半部分中间）通过对矩形序列补零来对两个矩形序列的自相关函数进行显示。左上图显示有 3/4 的元素为零，在中上的图中仍然有许多的零，这就使我们能清楚地看见正确的结果，即三角窗序列。

现在假设 N 保持不变而左上图中的非零元素增加。那么当矩形序列的长度超过圆周的一半时，三角窗序列的末端将产生重叠。在重叠的区域结果将是平坦的非零的段。很明显，结果是错误的，我们期待的是三角形状的自相关函数。然而这种操作有它存在的意义，我们称之为圆周卷积。

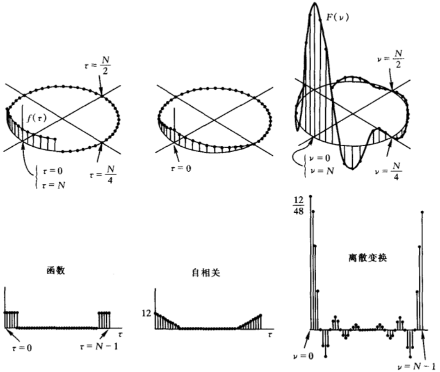


图 11.4 一个采样的矩形函数，它的自相关和离散傅里叶变换的圆周表示（上）和标准表示（下）

两个周期为 2π 的周期函数 $f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 的圆周卷积积分 $h(\theta)$ 定义为：

$$h(\theta)=\int_0^{2\pi} f(\theta')g(\theta-\theta')\mathrm{d}\theta' \text{ 。}$$

两个 N 元序列 $f(\tau)$ 和 $g(\tau)$ 的圆周卷积和 $h(\tau)$ 定义为

$$h(\tau)=\sum_{\tau'=0}^{N-1} f(\tau')g[\tau-\tau'+NH(\tau'-\tau)],$$

其中 $H(\cdot)$ 是 Heaviside 单位阶跃函数。因为 τ 和 τ' 在 $0 \sim N-1$ 范围取值时，$\tau-\tau'$ 的取值范围可能为 $-(N-1) \sim (N-1)$，当 $\tau' > \tau$ 时，必须给 $\tau-\tau'$ 上加上一项 N，以便使 $\tau-\tau'$ 的值位于 $[0,\ N-1]$ 的范围内。这就是 $NH(\tau'-\tau)$ 项的作用，在计算过程中常常显式地需要它。然而在圆周或延拓的意义上解释 $g(\tau)$，允许我们在上面表达式中省去 $NH(\tau'-\tau)$ 这一项。

离散傅里叶变换的例子①

我们常常需要一些短的离散变换对。当我们研究新的算法和变换时，少量的一些变换对对验证来说非常有用并推荐使用它们。下面是 DFT 的一个参考表。

① 由于会有混淆的风险，我们用符号 $\supset$ 表示“进行 DFT 操作”，所以等式(1) 可以写为 $f(\tau) \supset F(\nu)$；用符号 $\subset$ 表示“进行逆 DFT”操作，所以等式(2) 可以写为 $F(\nu) \subset f(\tau)$。

$N=2$：

$$\{1\ 0\} \supset \frac{1}{2}\{1\ 1\}$$

$$\{1\ 1\} \supset \frac{1}{2}\{2\ 0\}$$

$$\{0\ 1\} \supset \frac{1}{2}\{1\quad -1\}$$

$$\{1\quad -1\} \supset \frac{1}{2}\{0\ 2\}。$$

$N=4$：

$$\{1\ 0\ 0\ 0\} \supset \frac{1}{4}\{1\ 1\ 1\ 1\}$$

$$\{0\ 1\ 0\ 0\} \supset \frac{1}{4}\{1\quad -\mathrm{i}\quad -1\quad \mathrm{i}\}$$

$$\{0\ 0\ 1\ 0\} \supset \frac{1}{4}\{1\quad -1\quad 1\quad -1\}$$

$$\{0\ 0\ 0\ 1\} \supset \frac{1}{4}\{1\quad \mathrm{i}\quad -1\quad -\mathrm{i}\}$$

$$\{1\ 1\ 0\ 0\} \supset \frac{1}{4}\{2\quad 1-\mathrm{i}\quad 0\quad 1+\mathrm{i}\}$$

$$\{0\ 0\ 1\ 1\} \supset \frac{1}{4}\{2\quad -1+\mathrm{i}\quad 0\quad -1-\mathrm{i}\}$$

$$\{1\ 1\ 1\ 1\} \supset \frac{1}{4}\{4\ 0\ 0\ 0\}$$

$$\{1\ 1\ 0\ -1\} \supset \frac{1}{4}\{1\quad 1-2\mathrm{i}\quad 1\quad 1+2\mathrm{i}\}$$

$$\{1\ 0\ 0\ 1\} \supset \frac{1}{4}\{2\quad 1+\mathrm{i}\quad 0\quad 1-\mathrm{i}\}。$$

$N=8$：

$$\{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\} \supset \frac{1}{8}\{8\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\}$$

$$\{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\} \supset \frac{1}{8}\{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\}$$

$$\{0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\} \supset \frac{1}{8}\{1\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi/8}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(2/8)}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(3/8)}\ -1\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(5/8)}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(6/8)}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(7/8)}\}$$

$$\{0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\} \supset \frac{1}{8}\{1\quad -\mathrm{i}\quad -1\quad \mathrm{i}\quad 1\quad -\mathrm{i}\quad -1\quad \mathrm{i}\}。$$

互易性质

就像对一个函数连续运用两次傅里叶变换，两次变换要改变 i 的符号（即正、反变换各一次）可以得到原函数那样，对离散傅里叶变换而言，也有一个相应的性质。但是为了使 ν 为整数，我们在离散傅里叶变换中引入了尺度因子 N，这使得即使考虑到 i 的符号，离散傅里叶变换也不是严格互易的。因此，

$$N^{-1}\left[\sum_{\nu=0}^{N-1} N^{-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\nu/N)\tau'}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\nu/N)\tau} = N^{-1} f(\tau)。$$

如果我们连续应用两次 DFT 变换而不改变 i 的符号，上式右边将是 $N^{-1}f(-\tau)$。另一种表示是，如果

$$f(\tau)\supset F(\nu),$$

那么

$$F(\nu)\supset N^{-1}f(-\tau)。$$

这个性质和其它的性质，以及一些定理将不进行推导，但是通过数值实验可以很容易地验证它们。取而代之，我们把重点放在对它们的解释、举例说明以及用一种适合参考的方式表示它们。

奇偶性

由定义，如果

$$f(-\tau)=f(\tau),$$

称 $f(\tau)$ 是偶的。如果

$$f(-\tau)=-f(\tau),$$

称 $f(\tau)$ 是奇的。图 11.5 给出了如下 16 元的奇序列和偶序列，其中 τ 取 0 ~ 15。

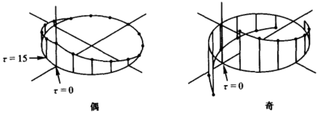


图 11.5 圆周表示的偶序列和奇序列

偶：{5 4 3 2 1 0 0 0 0 0 0 0 1 2 3 4}，

奇：{0 8 7 6 5 4 3 2 0 −2 −3 −4 −5 −6 −7 −8}。

在这些例子中，为了有助于显示它们的对称性，将它们分为每四个一组。四元的偶序列和奇序列如下：

偶：$\{a\ b\ c\ b\}$。

奇：$\{0\ b\ 0\ -b\}$。

很明显，这里需要把 τ 的取值范围延拓到负整数值，尤其是下面的特殊情况

$$f(-\tau)=f(N-\tau)。$$

对 $F(\nu)$ 有一个类似的关系

$$F(-\nu)=F(N-\nu)。$$

特殊对称的例子

对离散傅里叶变换来说，与奇偶性有关的对称规则与第 2 章连续傅里叶变换的规则具有相同的形式。

实序列 $\supset$ hermitian 序列
虚序列 $\supset$ 反 hermitian 序列
实偶序列 $\supset$ 实偶序列
实奇序列 $\supset$ 虚奇序列
虚偶序列 $\supset$ 虚偶序列
虚奇序列 $\supset$ 实奇序列
偶序列 $\supset$ 偶序列
奇序列 $\supset$ 奇序列。

下面的例子说明了这些结论，它在实际计算过程中是十分重要的。

$$\{1\ 2\ 3\ 4\} \supset \frac{1}{4}\{10\quad -2+2\mathrm{i}\quad -2\quad -2-2\mathrm{i}\}$$

$$\{1\ 2\ 3\ 4\} \supset \frac{1}{4}\{10\mathrm{i}\quad -2-2\mathrm{i}\quad -2\quad 2-2\mathrm{i}\}$$

$$\{1\ 0\ 0\ 0\} \supset \frac{1}{4}\{1\ 1\ 1\ 1\}$$

$$\{0\ 1\ 0\ -1\} \supset \frac{1}{4}\{0\ -2\mathrm{i}\ 0\ 2\mathrm{i}\}$$

$$\mathrm{i}\,\{4\ 2\ 1\ 2\} \supset \frac{1}{4}\mathrm{i}\{9\ 3\ 1\ 3\}$$

$$\mathrm{i}\,\{0\ 1\ 0\ -1\} \supset \frac{1}{4}\{0\ 2\ 0\ -2\}$$

$$\{1+4\mathrm{i}\quad 2\mathrm{i}\quad \mathrm{i}\quad 2\mathrm{i}\} \supset \frac{1}{4}\{1+9\mathrm{i}\quad 1+3\mathrm{i}\quad 1+\mathrm{i}\quad 1+3\mathrm{i}\}$$

$$\{0\quad 1+\mathrm{i}\quad 0\quad -1-\mathrm{i}\} \supset \frac{1}{4}\{0\quad 2-2\mathrm{i}\quad 0\quad -2-2\mathrm{i}\}。$$

复共轭

共轭的离散傅里叶变换是原序列离散傅里叶变换变量取反后的共轭，即

$$f^*(\tau) \supset F^*(-\nu)。$$

其中，"取反"意思是改变其自变量的符号。

反转特性

假如 τ 的符号改变，也就是说，将 $f(\tau)$ 沿直线 $\tau=0$ 反折，那么 ν 的符号将改变：

$$f(-\tau) \supset F(-\nu)。$$

值得注意的是，当将 $f(\tau)$ 沿直线 $\tau=\frac{1}{2}N$ 反折时，也能得到相同的结果。

叠加定理

$$f_1(\tau)+f_2(\tau) \supset F_1(\nu)+F_2(\nu)。$$

举例：

如果 $\{2\ 0\ 0\ 0\} \supset \frac{1}{4}\{2\ 2\ 2\ 2\}$

且 $\{0\ 1\ 0\ 0\} \supset \frac{1}{4}\{1\ -\mathrm{i}\ -1\ \mathrm{i}\}$

那么 $\{2\ 1\ 0\ 0\} \supset \frac{1}{4}\{3\ 2-\mathrm{i}\ 1\ 2+\mathrm{i}\}$。

移位定理

$$f(\tau - T) \supset \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi T(\nu/N)} F(\nu)。$$

例如：

$$\{1\ 0\ 0\ 0\} \supset \frac{1}{4}\{1\ 1\ 1\ 1\}$$

$$\{0\ 1\ 0\ 0\} \supset \frac{1}{4}\{1\quad -\mathrm{i}\quad (-\mathrm{i})^2\quad (-\mathrm{i})^3\}$$

$$\{0\ 0\ 1\ 0\} \supset \frac{1}{4}\{1\quad (-\mathrm{i})^2\quad (-\mathrm{i})^4\quad (-\mathrm{i})^6\}$$

$$\{0\ 0\ 0\ 1\} \supset \frac{1}{4}\{1\quad (-\mathrm{i})^3\quad (-\mathrm{i})^6\quad (-\mathrm{i})^9\}。$$

有时我们需要在频域中进行移位，称为逆移位定理：

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\nu_0/N)\tau} f(\tau) \supset F(\nu - \nu_0)。$$

卷积定理

两个序列$\{f_1(\tau)\}$和$\{f_2(\tau)\}$的圆周卷积定义为

$$f_1(\tau) * f_2(\tau) = \sum_{\tau'=0}^{N-1} f_1(\tau') f_2(\tau - \tau')。$$

记住 $f_2(\cdot)$ 应被理解为其周期延拓。为了强调离散求和与连续卷积积分之间的区别，对离散卷积我们使用术语卷积和，但是在不引起混淆的情况下，我们可以简单地称之为序列$\{f_1\}$和$\{f_2\}$的卷积。定理为：

$$f_1(\tau) * f_2(\tau) \supset N F_1(\nu) F_2(\nu)。$$

例如：

假设 $\{1\ 1\ 0\ 0\} \supset \frac{1}{4}\{2\quad 1-\mathrm{i}\quad 0\quad 1+\mathrm{i}\}$，

那么 $\{1\ 1\ 0\ 0\} * \{1\ 1\ 0\ 0\} = \{1\ 2\ 1\ 0\} \supset \frac{1}{4}\{4\ -2\mathrm{i}\ 0\ 2\mathrm{i}\}$。

同样 $\{1\ 1\ 0\ 0\} * \{0\ 0\ 2\ 2\} = \{2\ 0\ 2\ 4\} \supset \frac{1}{4}\{8\ 4\mathrm{i}\ 0\ -4\mathrm{i}\}$。

乘积定理

上面的卷积定理的逆定理为：在 τ 域进行乘积，或在 ν 域进行卷积，即

$$f_1(\tau)f_2(\tau) \supset \sum_{\nu'=0}^{N-1} F_1(\nu')F_2(\nu-\nu')。$$

例如：

$$f_1 = f_2 = f_1 f_2 = \{1\ 1\ 0\ 0\} \supset \frac{1}{4}\{2\quad 1-\mathrm{i}\quad 0\quad 1+\mathrm{i}\}。$$

互相关

$$\sum_{\tau'=0}^{N-1} f_1(\tau')f_2(\tau'+\tau) \supset NF_1(\nu)F_2(-\nu)。$$

自相关

$$\sum_{\tau'=0}^{N-1} f_1(\tau')f_1(\tau'+\tau) \supset N\mid F_1(\nu)\mid^2。$$

例如：

$$\{1\ 1\ 0\ 0\}\star\{1\ 1\ 0\ 0\} = \{2\ 1\ 0\ 1\} \supset \frac{1}{4}\ \{4\ 2\ 0\ 2\}。$$

序列和

$$\sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau) = NF(0)。$$

例如：

$$\{1\ 0\ 5\ 0\} \supset \{1.5\ -1\ 1.5\ -1\}。$$

我们可以看到 $\sum f = 6, F(0) = 1.5, N = 4$，且 $NF(0) = 6$，如果我们按照习惯用法，在 $F(\nu)$ 的前面使用因子 N^{-1}，则定理的意思是整个序列的和等于右边起始花括号后的第一项。

首值

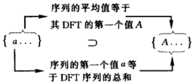
前述定理的逆是

$$f(0) = \sum_{\nu=0}^{N-1} F(\nu)。$$

例如：

$$f(0) = 1 \qquad 和 \qquad \sum F = 1.5-1+1.5-1 = 1。$$

我们看到，序列的平均值等于其 DFT 的首值，而相反地，序列的首值等于其 DFT 的和。



广义 Parseval-Rayleigh 定理

$$\sum_{\tau=0}^{N-1} \mid f(\tau) \mid^2 = N\sum_{\nu=0}^{N-1} \mid F(\nu) \mid^2。$$

例如：

$$\{1\ 1\ 0\ 0\} \supset \frac{1}{4}\{2\quad 1-\mathrm{i}\quad 0\quad 1+\mathrm{i}\}$$

我们发现 $\sum f^2 = 2$，并且 $N\sum F^2 = 4\times 0.5 = 2$。

填补定理

填补算子 Pack_K 向一给定的 N 元序列 $f(\tau)$ 尾部补零，使序列的元素个数增加到 KN。

$$\mathrm{Pack}_K\{f(\tau)\} = \{g(\tau)\},$$

其中

$$g(\tau) = \begin{cases} f(\tau) & 0\leqslant \tau \leqslant N-1 \\ 0 & N\leqslant \tau\leqslant KN-1。\end{cases}$$

这样 $\qquad \mathrm{Pack}_2\{1\ 2\ 3\ 4\} = \{1\ 2\ 3\ 4\ 0\ 0\ 0\ 0\}$。

这个定理是

$$\mathrm{Pack}_K\{f(\tau)\} \supset G(\nu),$$

其中 $G(\nu) = \frac{1}{K}F(\frac{\nu}{K})$，$\nu = 0, K, 2K, \cdots, KN-K$。

这个关系没有给出 $G(\nu)$ 中间值，它可以通过在已知值之间使用 sinc 函数内插来确定[例如，当 $K=2$ 时，通过中点内插(177 页)]，但是有一种更好的方法，参见习题 11.8。

相似性定理

为了得到类似于连续时间中的尺度的扩展和压缩，我们必须给序列补充足够的零元素，要么在序列尾部补零，以便能够扩展序列，要么在元素之间插入零，以便使序列能有压缩的空间。在元素间插入零的操作使序列元素的总个数乘了一个因子 K，我们用展宽算子 $\mathrm{Stretch}_K$ 表示它。

$$\mathrm{Stretch}_K\{f(\tau)\} = \{g(\tau)\},$$

其中

$$g(\tau)=\begin{cases}f(\tau/K) & \tau=0,\ K,\ 2K,\ \cdots,\ (N-1)K\\ 0 & \text{其它。}\end{cases}$$

例如：

$$\mathrm{Stretch}_2\{1\ 2\ 3\ 4\}=\{1\ 0\ 2\ 0\ 3\ 0\ 4\ 0\}。$$

这个定理是，如果$\{g\}\supset\{G\}$，

$$G(\nu)=\begin{cases}\frac{1}{K}F(\nu) & \nu=0,\cdots,N-1\\ \frac{1}{K}F(\nu-N) & \nu=N,\cdots,2N-1\\ \vdots & \vdots\\ \frac{1}{K}F(\nu-\overline{K-1}N) & \nu=(K-1)N,\cdots,N-1。\end{cases}$$

如此，在 τ 域内展宽 K 倍将导致 ν 域内 $F(\nu)$ 的 K 倍重复；频率的尺度没有被因子 K 压缩。

使用 MATLAB 的例子

DFT 很容易用 MATLAB[R] 来计算，它是一种高级语言，能直接对从键盘输入的数组进行操作，因此，它特别适合用来显示像一个序列的 DFT 这样的复序列的数值结果。例如，为了得到序列{1 1 1 1 0 0 0 0} 的 DFT，只需键入

```
fft([1 1 1 1 0 0 0 0]),
```

然后按回车，就得到如下的显示：

```
4.0000   1.0000 - 2.4142i   0   1.0000 - 0.4142i   0   1.0000 + 0.4142i   0
1.0000 + 2.4142i
```

MATLAB 中的函数 **fft ()** 的定义中不包括除以 N，所以，所得到的首值 4.0000 表示的是输入序列的和，而不是它们的平均。而正如早已建立的傅里叶级数的首项系数 a_0 一样，本章中 DFT 的定义中包括了除以 N，这保证了 DFT 序列的首值是输入序列的平均值。进一步地，从定义能看出与 DFT 之间的细小差异。设输入序列为 $x(n)$，$1\leqslant n\leqslant N$，计算出的离散傅里叶变换的值由下式定义：

$$X(k)=\sum_{n=1}^{N}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(k-1)\frac{(n-1)}{N}},$$

而可以得到原 $x(n)$ 的求逆和式，有些稍微的不同，

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}X(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(k-1)\frac{(n-1)}{N}},$$

其中抑制因子[①] $\frac{1}{N}$ 放在了它的前面。求逆的和式由 **ifft ()** 完成。

---

① 实际上的计算不同于先前所述与数学上的定义一致的计算过程，将因子 1/N 放入 DFT 和反 DFT 变换的等式中，都是一种对资源的浪费。在变换之后进行的一个步骤通常都是给它另外附加一种乘法运算，以便使它归一化为单位面积或者在原点处的值为 1 或者调整图形输出的大小。众多的数学因子在最后的步骤中能化为 1 个简单的乘法运算。

变量 n 是输入样本的序号。例如，对一个 N 元的时间序列进行编号，使得其首值位于 $n=1$，而终值位于 $n=N$。而变量 k 与频率之间的关系如下：如果 n 的单位是 1 s，那么当 $k\leqslant N/2+1$ 时，频率为$\frac{k-1}{N}$Hz。这和数字信号处理中 k 的标准①用法不同，在数字信号处理中，对 $k\leqslant N/2$，k 值直接与频率成正比；尽管如此，所显示的 k 最左边的值也对应着零频率分量，这和我们的习惯是一样的。

从连续变量理论中，我们知道对一个函数 $f(t)$ 连续进行两次傅里叶变换将得到 $f(-t)$，即原函数的反转。为了测试 MATLAB 是否如预料的一样，键入

```
fft(fft([1 1 1 1 0 0 0 0]))
```

得到

$$8.0000 \quad 0.0000+0.0000i \quad 0+0.0000i \quad -0.0000+0.0000i,$$
$$0 \quad 8.0000-0.0000i \quad 8.0000-0.0000i \quad 8.0000-0.0000i$$

为了便于观察，我们可以将上式重写为

$$8\{1\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\}。$$

除了从定义中提出来的因子 8 以外，在与 DFT（见图 11.3b）使用同样规则的情况下，这实际上就是原序列的正确的反转。$f(t)$ 的 n 个离散采样点中最左边的元素对应于 $t=0$，紧接着其右边的元素对应于 $t=\Delta t$，而最右边的元素则对应于 $t=-\Delta t$。

一个关于 t 对称的函数 $f(t)$，如 $\Pi(t/5)$，用间隔 $\Delta t=1$ 进行采样，将得到{1 1 1 0 0 0 1 1}。因为给定的序列是关于 $n=1$ 对称的，所以 DFT 应该是纯实的。键入

```
fft([1 1 1 0 0 0 1 1])
```

得到

$$\{5 \quad 2.4142 \quad -1 \quad -0.4142 \quad -1 \quad 2.4142\},$$

我们可以看到，结果是纯实数，这与对称实输入函数的预期结果是一致的。

练习 a. 偶函数的表示法 t 的一个偶函数具有性质 $f(-t)=f(t)$，但是对于一个离散采样集合 $x(n)$，其中 n 取 $1\sim 8$，不允许有负下标；因此我们不能说当 $x(-n)=x(n)$ 时，采样集合 $x(n)$ 是偶的。然而，请相信你的经验，根据它的离散傅里叶变换是纯实数这一点来说，可以用序列{4 2 1 0 0 0 1 2}来表示一个偶函数的采样。

练习 b. 零或负下标的移位规则 如果 n 为非正数时，使用 $x(-n)\Rightarrow x(8-n)$ 的移位规则，验证用序列{4 3 2 1 0 1 2 3}来表示偶函数 $4\Lambda(t/4)$ 在 t 的单位间隔上的采样是合适的。验证此规则也说明了上个练习的结果。

练习 c. 运用下标移位规则 考虑一个序列{1 2 3 4 4 3 2 1 0}，它是由函数 $f(t)$ 在 1 s 间隔上的采样组成的。注意这些值是 $4.5\Lambda\left(\frac{t-4.5}{4.5}\right)$（它不是偶函数）在 $t=1,2,\cdots,9$ 上的采样。首先证明，对给定序列使用 fft() 命令，得到一虚部不为 0 的结果，因此它甚至也不可能是 $\Lambda[(t-4)/4]$ 的傅里叶变换的粗略近似，它应该是复的。那么，所给出的序列对应的 t 的偶函数

① 一般地，$a_k\cos 2\pi kt$ 表示第 k 个谐波分量，特别地当 $k=0$ 时表示频率为零的直流分量，而 $k=1$ 则表示第一个谐波分量（基波频率）。在 MATLAB 中 $k=1$ 表示直流分量，$k=2$ 表示第一个谐波分量。

应该是什么？

练习 d. 奇函数　通过经验说明，对序列{0 3 2 1 0 −1 −2 −3}进行 **fft**() 操作得到一个纯虚的离散变换，从而验证该序列表示的是一奇函数。检验被采样的函数是奇函数 $4\Lambda(t/4)\mathrm{sgn}t$。另一种可能是 $\Lambda(t/4)\mathrm{sgn}t+\sin\pi t$ 吗？

练习 e. 补零　序列 $x_4(n)=\{1\ 1\ 1\ 1\}$，$x_8(n)=\{1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\}$，$x_{16}(n)=\{1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\}$ 都是对函数 $\Pi[(t-2.5)/4]$ 以 $\Delta t=1$ 的间隔进行采样而得到的。对它们做 `fft()` 操作。比较三个结果，把它们与傅里叶变换 $F(s)=4\exp(-\mathrm{i}3\pi s)\mathrm{sinc}4s$ 对应起来。

快速傅里叶变换

在 1965 年，一种计算离散傅里叶变换的方法突然广为流行(Cookey and Tukey, 1965)，使许多因为繁重的计算而停滞不前的领域发生了革命性变化。有关它的历史信息的很好的资料是 IEEE Transaction on Audio and Electroacoustics, vol. AU - 2, June 1967 和 Bergland(1969)。离散傅里叶变换这个名字是由 Good(1951) 引入的。

有多种理解快速傅里叶变换(FFT) 的方法。其中一些人常用的一种方法是使用变换矩阵的因式分解法。按照定义，我们可以把 DFT(对 $N=8$) 的关系写成矩阵的乘积形式

$$\begin{bmatrix}F(0)\\F(1)\\F(2)\\F(3)\\F(4)\\F(5)\\F(6)\\F(7)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\1&W&W^2&W^3&W^4&W^5&W^6&W^7\\1&W^2&W^4&W^6&W^8&W^{10}&W^{12}&W^{14}\\1&W^3&W^6&W^9&W^{12}&W^{15}&W^{18}&W^{21}\\1&W^4&W^8&W^{12}&W^{16}&W^{20}&W^{24}&W^{28}\\1&W^5&W^{10}&W^{15}&W^{20}&W^{25}&W^{30}&W^{35}\\1&W^6&W^{12}&W^{18}&W^{24}&W^{30}&W^{36}&W^{42}\\1&W^7&W^{14}&W^{21}&W^{28}&W^{35}&W^{42}&W^{49}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(0)\\f(1)\\f(2)\\f(3)\\f(4)\\f(5)\\f(6)\\f(7)\end{bmatrix},\tag{1}$$

其中 $W=\exp(-\mathrm{i}2\pi/N)$。因为 $W^N=\exp(-\mathrm{i}2\pi)=1$，所以 W 是 1 的 N 次根。它可以看作是模为 1，相位按 $-1/N$ 变化的复数。

$$\begin{bmatrix}F(0)\\F(1)\\F(2)\\F(3)\\F(4)\\F(5)\\F(6)\\F(7)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&W&0&0\\0&0&1&0&0&0&W^2&0\\0&0&0&1&0&0&0&W^3\\1&0&0&0&W^4&0&0&0\\0&1&0&0&0&W^5&0&0\\0&0&1&0&0&0&W^6&0\\0&0&0&1&0&0&0&W^7\end{bmatrix}\cdot$$

$$\begin{bmatrix}1&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&W^2&0&0&0&0\\1&0&W^4&0&0&0&0&0\\0&1&0&W^6&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1&0&W^2\\0&0&0&0&1&0&W^4&0\\0&0&0&0&0&1&0&W^6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&0&0\\1&W^4&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&1&W^4&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&1&W^4&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0&1&W^4\end{bmatrix}\cdot$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(0)\\f(1)\\f(2)\\f(3)\\f(4)\\f(5)\\f(6)\\f(7)\end{bmatrix}。\qquad (2)$$

这种因式分解使得矩阵的每一行中只留下两个非 0 元素。在式(1) 中，需要 N^2 次乘法运算，而如果用式(2) 的话，每个因子中只需要 $2N$ 次乘法运算，而且如果我们不考虑第一个因子(它仅仅是对数据进行重排)，那么因子的个数 M 由 $2^M = N$ 确定。这样，总共只需要 $2N\log_2 N$ 次乘法运算。仔细观察这些因子，我们可以发现许多乘法运算是微不足道的，因此要想精确地计算出它所节省的时间就需要仔细地考虑这些细节。进而，我们有了因子为 $N/\log_2 N$ 量级的改善，这在 N 很大的时候非常重要，例如对很长的数据序列或者诸如图片这样的数字化二维数据，N 都很大。

下面是另一种理解快速傅里叶变换的方法。我们可以把一个 N 元序列的偶数序号部分划为一组，奇数序号部分划为另一组，从而将它分解为两个较短的 $N/2$ 元的序列。例如，将{8 7 6 5 4 3 2 1} 分解为{8 6 4 2} 和{7 5 3 1}。这两个序列的每一个都有它的 DFT。如何从这两个较短序列的 DFT 获得一个较长序列的 DFT 呢?把它们写成下式我们就得到了答案。

$$\{8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\} = \{8\ 0\ 6\ 0\ 4\ 0\ 2\ 0\} + \{0\ 7\ 0\ 5\ 0\ 3\ 0\ 1\}。$$

我们看到通过使用展宽和移位定理就可以得到所求的 DFT。由展宽定理中，我们知道如果

$$\{8\ 6\ 4\ 2\} \supset \{A\ B\ C\ D\},$$

那么
$$\{8\ 0\ 6\ 0\ 4\ 0\ 2\ 0\} \supset \frac{1}{2}\{A\ B\ C\ D\ A\ B\ C\ D\}。\qquad (3)$$

这个现象在周期函数的傅里叶级数系数中很常见。

同样地，如果

$$\{7\ 5\ 3\ 1\} \supset \{P\ Q\ R\ S\},$$

那么
$$\{7\ 0\ 5\ 0\ 3\ 0\ 1\ 0\} \supset \frac{1}{2}\{P\ Q\ R\ S\ P\ Q\ R\ S\}。$$

现在，我们应用移位定理可得

$$\{0\ 7\ 0\ 5\ 0\ 3\ 0\ 1\} \supset \frac{1}{2}\{P\ WQ\ \ W^2R\ \ W^3S\ \ W^4P\ \ W^5Q\ \ W^6R\ \ W^7S\}。\qquad (4)$$

乘以 W 意味着在复平面上旋转了一周的 $1/N$，因此移位的效果就是给序列$\{P\ Q\ R\ S\ P\ Q\ R\ S\}$提供逐渐增大的相位延迟。将式(3) 与式(4) 相加就得到了长序列的 DFT。这样一个 $N=8$ 的 DFT 变换就被分成了两个 $N=4$ 的 DFT 变换，根据式(1)DFT 所需的乘法运算次数为 N^2，故它相当于节省了一半的运算时间。要进一步了解这个分解是如何进行的，我们可以参见图 11.6。从左边的给定序列开始，我们将它分为两个长度为 4 的序列$\{8\ 6\ 4\ 2\}$和$\{7\ 5\ 3\ 1\}$，把它们分别作为两个 $N=4$ 的变换器的输入，相应的输出为$\{A\ B\ C\ D\}$和$\{P\ Q\ R\ S\}$。实线表示将 A,B,C,D 传送到输出节点上形成$\{A\ B\ C\ D\ A\ B\ C\ D\}$。虚线上标有相应的因子，它们将式(4) 中的 P,WQ,W^2R 等分别传送到相应的输出节点上，在输出节点上进行相加操作。图11.7 展示了进一步将每个四元的 DFT 变换分解为两个二元的 DFT 变换，而图 11.8 则图示了完全简化的相乘和相加过程。

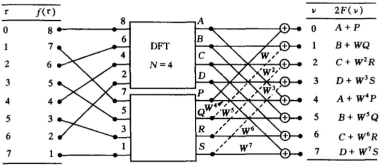


图 11.6　八元的 DFT 简化为两个四元的 DFT

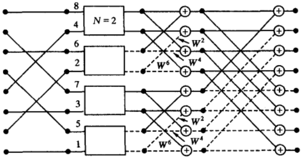


图 11.7　简化为四个二元的 DFT

最后，步骤可以总结如下。首先，我们把给定序列重排为$\{8\ 4\ 6\ 2\ 7\ 3\ 5\ 1\}$，与之相对应的操作是乘以等式(2) 中的第一个方阵，有时不太严格地称之为"位反"。用各对重排数据的线性组合计算这 8 个新数据，就像等式(2) 中的第二个方阵所显示的那样。这些数据就是图 11.8 最左边的加法器的输出。还有两个类似的步骤，总共构成了 3 次这样的操作(或者一般地，M 次，其

中 $2^M = N$)。当然,并不是这 48 个乘法都有意义。其中有 32 个是与 1 相乘,7 个是与 W^4 相乘,它只是简单的符号取反。另外,W^2 和 W^6 的运算也相当简单。

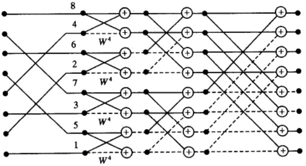


图 11.8 八位的 DFT 变换分解为 3×16 个乘法运算,3×8 个加法运算。在前述的三个图形中,实线表示的是乘 1 运算,虚线则表示乘以线上所标的因子(改编自 Cochran 等,1967)

这样,我们看到图 11.8 是等式(2) 中的四个矩阵乘法的详细表示,获得图 11.8 所示结构的考虑过程可以作为不用推导而逐步得到等式(2) 中的各因子的基础。

假如元素的个数不能无限地二分(即 N 不能表达为 2^M),仍然有定制的合适的快速算法。例如,如果 N 可以被 3 整除,那么最终的简化可以由三元变换器组成。这样的算法就不是十分快了。

实际考虑

实现快速傅里叶变换的程序里已经考虑到了许多实际问题。对某些应用,速度是首要的考虑;对另一些应用,方便是主要的。如果 N 不是 2 的幂,为了方便说的是我们可以对数据补 0;要求速度说的是需要选择一个改进的程序以获得利用这个因子所具有的特点。一些用户从不要求复的输出;另一些用户则需要复输出,但不是实部和虚部的形式。一部分用户可能需要处理二维和三维的数据。一些用户通常不得不将数据进行分段处理,因为 N 超过了他们的计算机容量。上述这类问题,虽然很重要,但是都能通过上面所给出的一些原始文献或通过对已有程序的分析来研究。对一些文档的研究也尤其重要,因为一些软件包虽然根本不能完成 DFT 操作,但是经过一些修改可能会或多或少带来一些方便。

现在我们来看一个常见的例子,用一个可以对长度 N 为 64,128 或 2 的其它整数幂的序列进行操作的通用程序,对一个长度为 60 的序列进行 FFT。给序列填加 4 个零可以使它满足程序。但是,把零加到序列的后面、前面,或者两个加在前面两个加在后面,所得的结果是否会有区别?由图 11.4 再想到移位定理,我们知道 $|F(\nu)|$ 将不受影响,但原点的有效移位将会引入相位变化。如果相位很重要,就像它应该是的那样,如果数据序列本来就有个自然的零点,那么移位定理将能提供一个适当的相位修正因子。

如果在尾部添上 68 个 0,并且使用 $N = 128$ 的程序,结果会有不同吗?令一些人惊呀的是,答案是肯定的。为了理解这一点,考虑延拓的意义,其中 $f(\tau)$ 和 $F(\nu)$ 被看作是周期的且周期为 N。

设 $v(t)$ 是连续变量 t 的函数,它在 $0 \sim N-1$ 的 t 的整数值上,与 $f(\tau)$ 一致,在此之外为 0。如图 11.9a 所示。$v(t)\text{III}(t)$ 是一串冲激(图 11.9c),它和 $f(\tau)$ 包含相同的信息,但是不具有

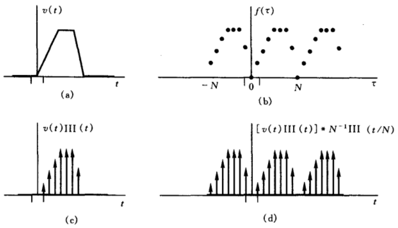


图 11.9 函数(a)和由它所得到的周期离散样本(b);(c)和(d)表示两个冲激波形,和连续时间函数相同,它们和离散表示是等价的

周期为 N 的重复特性。然而,周期特性可以用下式表示,即

$$p(t)=[v(t)\mathrm{III}(t)]*N^{-1}\mathrm{III}(t/N),$$

它和 $f(\tau)$ 严格一致。因为我们习惯用箭头来代表冲激,线段的长度等于冲激的强度,如果我们把横坐标标为 τ,把箭头变为圆点的话,图 11.9d 将是 $f(\tau)$ 的精确表达。

如果 $v(t)$ 的傅里叶变换为 $S(f)$,我们利用卷积定理和 *shah* 函数 III(•) 的变换是它本身的特性,可以得到

$$P(f)=[S(f)*\mathrm{III}(f)]\mathrm{III}(Nf)。$$

假如 f 和 ν 之间的关系为 $f=\frac{\nu}{N}$,那么上面的表达式就对应于 DFT $F(\nu)$, $f(\tau)$ 对应于 $p(t)$。此处已经考虑到了式(3)中的因子 N^{-1}。这样第 10 章的相当简单的代数推导就把最初似乎是被排除在积分变换范围外的离散情况作为特例包括进来了。

如果将 $v(t)\mathrm{III}(t)$ 进行周期为 $2N$ 的周期延拓,我们将得到$[v(t)\mathrm{III}(t)]*(2N)^{-1}\mathrm{III}(t/2N)$,它的变换将变为

$$[S(f)*\mathrm{III}(t)]\mathrm{III}(2Nf)。$$

与上面不同的是这相当于对 $S(f)*\mathrm{III}(f)$ 进行了比上面高一倍的采样。然而,提高采样频率怎么会导致两者差异呢?答案是 $S(f)$ 可能是振荡的,而且通常的确是这样的,除非序列 $f(\tau)$ 没有那些经常出现在数据串的开始和结尾部分的大的跳跃。当然,由于 $f(\tau)$ 的周期性,如果终值 $f(N-1)$ 近似等于初值 $f(0)$ 的话,一个大的初值 $f(0)$ 将不被看作一个大的跳跃。但是如果一个 64 元的数据序列,通过在尾部补 0 延拓到 128 个元素,那么这就是跳跃,$F(\nu)$ 中就会出现不光滑的结构。同样地,如果把相对平滑的 64 元数据序列中的 4 个连续元素置为 0,$F(\nu)$ 中将会出现振荡。这表明通过对数据序列补零将其扩充到 64 个元素并不一定总是最好的方法。通过补充比零更合理的哑元数据,可以得到与期望的结果更加一致的结果。

离散傅里叶变换正确吗?

当计算傅里叶变换时,DFT理论是准确的,独立自主(自一致)的,它确切描述了对实际数据样本的操作,剩下的问题是依赖于数据采样点的DFT在多大程度上近似于函数的傅里叶变换呢?很明显,DFT只能是一个近似值,因为它仅提供了一组有限的离散频率点的值。但是这些离散值本身正确吗?我们可以很容易举出他们是不正确的简单例子。这个问题的讨论是基于采样定理和混叠现象的。如果初始的采样间隔不是足够小,以致不足以表示原函数中的高频分量,那么DFT的值和通过它们的光滑曲线都会因为混叠而发生错误。如果原函数是已知的,那么与一个给定的采样间隔相关的误差是可以计算的。从实际操作来看,我们往往只知道采样序列,那么误差的避免就只能依靠一些经验因素,即先验知识或经验。例如,在同样的时间内采样两倍的点就能确定是否存在高频分量。

DFT中的另一个重要的误差源是数据串的截断。当然,对函数的截断处理不可避免地导致了一个不正确的傅里叶变换(所得结果是正确的傅里叶变换和某个sinc函数的卷积),因此截断误差并不是DFT所具有的。然而所犯的错误是不同的。为了说明这一点,假设采样间隔选得足够精细使得它能处理数据中的高频分量而且没有混叠误差。现在对数据进行截断处理。对DFT的影响是把它和一个sinc函数的采样进行卷积,与这个sinc函数对应的矩形函数的宽度描述了对信号的截断。但是现在我们把它与图11.1中$Q(f)$这样的实体进行卷积。这样除了使输出平滑以外,我们还可能有左右两端频谱向中间频谱的泄漏。因此,截断不仅引起了平滑误差,或DFT中细节的减少,而且还引起了泄漏误差。通过使用两端逐渐变小的截断函数代替矩形截断函数可以减小泄漏误差,但这是以增加平滑误差为代价的。最好的折衷方法必须视情况而定;泄漏误差影响高频分量(取值在$N/2$左右的ν),而平滑误差的分布是不同的。

FFT的应用

在一些学科中,如x射线的衍射以及无线电干涉中,要对观测数据作傅里叶变换使它们表现为常用的形式,如分子形状、晶体结构或天空辐射源的亮度分布图等。在这些领域中,FFT的引入只是加快了已有的做法。

在另外一些应用中,我们取傅里叶变换是为了对它执行某些操作然后再作反变换。例如,照片放大后会明显呈颗粒状(在照相乳剂中的粒状结构会导致其呈斑点状),我们可以将照片通过一个二维的低通滤波器。首先,我们先将其数字化为二维数据数组,虽然有时它本身就是数字化的形式(例如,通过无线遥感从航天探测器中收到的数据)。然后,我们对它进行二维DFT变换,并且通过乘以一个合适的低通滤波器传输函数去掉或减少高的空间频率,最后再作逆DFT变换。当然,这等价于数字化的图片数据与合适的冲激(点源)响应(传输函数的逆DFT变换)的卷积。对台式计算来说,一次卷积运算要比两个DFT变换和一组乘法运算更有吸引力一些。但一张图片往往包含大量的数据,需要用大型的计算机对它进行处理,这时就会发现如果使用FFT的话,使用DFT的方法更快一些。其原因是如果数据阵列中有N个元素,那么所需的乘法运算的次数是N^2数量级的,而正如我们所看到的,当N很大时,FFT所需的乘法运算次数要少很多。

这样,一般情况下,卷积,包括自相关和互相关,都是通过进行两个DFT,乘法和逆DFT的方法来实现的。此时,需要一些特殊的考虑。其一,图11.10中两个要卷积的序列f和g有相同

数量的元素，就像自相关一样。输出序列的元素个数是输入序列的两倍。因此如果我们将 F 和 G 简单地逐项相乘，然后再作反变换，那么输出序列的长度就只有正确输出长度的一半，就像图 11.4 中所示的自相关的例子一样。所出现的情况是，输出序列绕着圆周和自己产生重叠。很明显，如图中所示，通过给序列补充足够的 0 直至达到原序列长度的两倍，就可以避免这种情况。图 11.11 图示了这个实际的过程，在某种程度上图 11.9 掩盖了这一点。

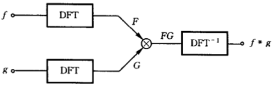


图 11.10　卷积流程图

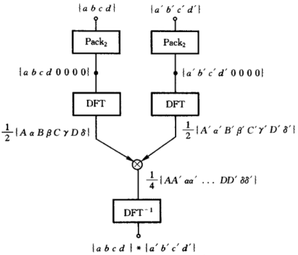


图 11.11　用 DFT 实现两个四元序列的卷积

时间测定图

许多研究快速算法的文献都依赖于对计算复杂度的数值计算，通常使用对乘法和加法运算次数的计数，通过在程序中每一个需要计数的地方插入一行使计数器加一的程序可以很容易地得到这个总数。经常会看到发表的这种数据，在傅里叶变换情况下是 N 的函数，并将它们与先前的程序进行比较。然后就说那些成功减少了运算次数的程序运行得更快。然而，时间测定是衡量速度的一个基本标准，并且已经被证明是研究如图 12.5 中所示的诸如置换操作，正弦和余弦的预建表，和其它步骤等费时操作的一个方便的工具。

MATLAB 通过插入 **tic** 启动一个定时器并在需要计算时间的地方插入 **toc** 就可以给出已经过去的时间，所以可以很方便地测定程序段的运行时间。使用这个工具可以把程序的整个运行时间分成多个阶段测量，从而发现哪个步骤比较耗时。过去，用户之间的时间共享会干扰中心计算机用户的时间测定，即使在单独的计算机上，后来也能找到方法在表面上执行用户的程序的同时执行清除任务。如果存在这样的干扰时间测定的问题，通过重新运行程序并注意到所耗费的时间的不同就可以揭露这一点。一些严谨的程序员会尝试通过画出所耗费时间与某些参数(如 N) 的关系曲线来研究这个有害的行为，这些曲线理想情况下应该是光滑的。增加重新运行次数有助于辨别对所用时间的错误影响。

当 N 不是 2 的整数幂时

一个具有 $N=365$ 个元素的数据序列，不能连续进行二分操作，但由于 $365=5\times73$，理论上仍然有可以分解的有利条件。实际上，特殊的基于 3、基于 5、基于 7、基于 11 和基于 13 的情况都有现成可利用的算法(参见 Nussbaumer，1982，以及 Elliott 和 Rao，1982，至于算法应归于 S.

Winograd算法请见S. Winograd)，但没有基于73的算法。对365个数据值，一种简单而直接的方法是通过补零把长度增加到512。当然，所得到的512个变换值将不能表示一年一个周期的各种谐波的频率。然而，如果需要的话，可以用MATLAB中的`fft()`操作来求出这365个复数值。

二维数据

让我们比较一下二维傅里叶变换的标准形式(第13章)

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(ux+vy)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

和二维离散傅里叶变换

$$F(\mu,\nu)=M^{-1}N^{-1}\sum_{\sigma=0}^{M-1}\sum_{\tau=0}^{M-1}f(\sigma,\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(\mu\sigma/M+\nu\tau/N)}。$$

整型变量σ和τ与(x,y)平面的关系如下。如果采样间隔分别是X和Y，所考虑的x和y的最小值分别是$x_{\min}$和$y_{\min}$，那么

$$\sigma=\frac{x-x_{\min}}{X}$$

$$\tau=\frac{y-y_{\min}}{Y}。$$

因为σ和τ的最大值分别为$M-1$和$N-1$，由此可得

$$x_{\max}=x_{\min}+(M-1)X$$

$$y_{\max}=y_{\min}+(N-1)Y。$$

空间频率整数μ和ν是这样的，μ/N和ν/M是用x和y的每采样间隔的周期数度量的空间频率，而μ/NX和ν/NY是用每单位x和y的周期数度量的空间频率。这个讨论把$f(\sigma,\tau)$看作在它的离散采样点之间有值但假设这些值不可用的函数。这就是这里建立它和积分变换之间的联系的原因。但是我们也理解，不必要只把$f(\sigma,\tau)$看作是整型变量对的函数，而且μ和ν也不一定要理解为频率。实际上，正如前面一维情况中提到的那样，在把μ和ν解释为频率时必须很谨慎。

尽管积分变换覆盖了(x,y)平面上的正的和负的区域，但离散变换则不需要σ和τ取负值的情况。因此，如图11.12a所示的(x,y)平面中的一

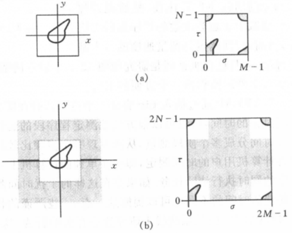


图11.12 (a) $f(x,y)$在(σ,τ)平面上被分割为如图所示的几部分，可用$M\times N$维的数据矩阵来表示，矩阵的序号为从0开始的正整数；(b) 表示在(x,y)平面上，包围在函数周围的零域，变换到(σ,τ)平面上时不再包围在函数的四周

个简单的对象，当通过原点移位转化到(σ,τ)平面时，图形将会用一种奇怪的方法被切割成好几块。当处理二维数据时，这种图形的拓扑思想很有帮助。例如，围绕对象的用零组成的保护带，在(σ,τ)平面上显示为交叉的阴影，(x,y)平面上一个很小的移动不是要求对已有数据的重排，而是要求(σ,τ)上矩阵的相当复杂的调度，如图 11.12b 所示。

如果由于疏忽或者特意设计，σ 和 τ 的坐标轴和标称的 x，y 的坐标轴不一致，那么所得到的变换将会受到影响。例如，一个关于 x 和 y 轴对称的函数的变换应该是实的，但是如果 σ 和 τ 坐标轴被移位，那么结果将会产生复数值。如果没有认识到这一点，我们只是读出实的变换值，那么它们将是错误的。然而，如果我们读出复数值，它们与标称的变换仅有一些很小的不同。这些复数值的模是正确的，根据移位定理的控制，它们的相位将随 σ 和 τ 线性增大。

功率谱

在许多情况下变换的相位是不重要或者不可知的，此时我们可以研究 $|F(\nu)|$，但是往往我们是对 $|F(\nu)|^2$ 进行研究，这其实是等价的，并且我们把 $|F(\nu)|^2$ 称为功率谱。在一些应用中 $|F(\nu)|^2$ 的值可能真正代表瓦特的数量。但是，即使在物理意义不是功率谱或者根本没有物理意义的情况下，通常还是使用“功率谱”这个术语，这个术语也用在与连续时间函数的傅氏变换 $S(f)$ 有关的场合(96 页，97 页)，但是他们是有区别的。功率谱 $|S(f)|^2$ 不是简单的瓦特，而是用瓦特 / 赫兹或一些更加复杂的单位(比如在 162 页的瑞利定理中提到的欧姆-瓦特 / 赫兹)来衡量的。

乍一看，功率谱的计算似乎没有特别要注意的地方，毕竟功率谱是包含在(复)傅氏变换这个更广的概念中的。但事实上关于功率谱的内容已经讨论了很多，而这里的功率谱本身并不是实质所在。参考文献可能以随机时间函数的频谱作为标题。使用这种术语的原因是随机函数或噪声代表了一种重要情况，在此情况下相位失去意义而功率谱变成了自然的研究实体。

虽然功率谱不只是应用于随机过程或来自随机信号源的确定性信号，但是这些应用却是比较重要的。随机过程的功率谱常常被定义成随机过程的自协方差函数的傅里叶变换(自协方差函数是在自相关运算之前除去直流分量后的结果。但是它们在术语上的区别通常是不易发现的。因为通常的理解是在计算自相关之前要减去非零均值，否则计算将是不可能的。)

根据自相关(或者自协方差)定义的功率谱对于很多学生来说可能不太容易理解，但是它却提出了解决涉及随机过程(在时域要用概率描述)问题的方法。然而在计算时，我们处理的决不是随机过程而是实际的数据串，来自于某种意义上的随机信号源(此外，也可能存在一些测量的随机误差)。

使功率谱计算如此吸引人的原因如下。假设我们求一个 N 元序列的 DFT。具体的，设这 N 个数据是某一点海平面每隔 10 s 的高度。自然地，$F_n(\nu)$ 的值应该表示海浪能量所在的频率段，但是它的精确度和它的分辨率却是有限的，这是因为数据的长度 N 是有限的。$F_N(\nu)$ 的相位虽然非零，但是几乎不包含我们感兴趣的任何信息，而且如果把它们丢弃，$|F_N(\nu)|^2$ 则形成了我们对海浪功率谱的测量。如果海的状态变化的话，正如它经常变化一样，那么这些测量只能作为那个时期的海浪功率谱的记录。但是由于 N 的值是有限的，这种测量在一定程度上是不完美的，使得从 ν 的一个值到下一个值的变化呈现明显的无规律性。为了得到一个较好的测量，我们可以将采样数据的长度增加到 4 倍，但是我们如何知道在这段观察期间海的能谱没有发生变化呢?仅有的方法是我们将数据串分割成若干段，然后再作判断。因为讨论中心是基

于海浪的，因此讨论 $N \to \infty$ 时的极限是不合适的，但是几乎所有数据都存在这种情况。虽然我们能够想象诸如由 π 的连续数位构成的数据串的功率谱测定的异常，但是在实际中，如果观察时间太长的话，情况可能会发生变化。但是经验告诉我们，取四倍的 N 值，虽然远没有达到无穷，但它却会使精确度提高一倍或者接近一倍(即，无规律的变换可能被减半)。但是令人奇怪的是随着 N 的增加，精确度却完全没有增加。因此，即使是在理论上，当 $N \to \infty$ 时定义功率谱的思想仍然不适合随机原点信号源的数据。

人们可能会想，如果用正确的方式看待这种问题那么矛盾可能会消失。下面是对这种现象的一个解释。在我们事先选择的任意频率段，随着 N 的增加功率测量的精度的确会增加。如果将 N 增加 4 倍，那么其 DFT 在固定的频率段上将提供 4 个值，而先前的情况却只包含一个值。即使这 4 个值都不比先前的那个值准确，但是这 4 个值的和(代表了该频率段的一个新的测量值)将会有更高的准确性。

这种正确的观点说明了计算实数据功率谱的步骤。计算出的 $|F_N(\nu)|^2$ 将随 ν 在总体的变化趋势上上下波动，通过对邻近的几个值取平均值，我们可以减小这种波动。如果通过对大量的连续值取平均值而获得较高的精度，那么这种精度的获得是以降低频率的分辨率为代价的，所以我们往往基于数据的特点根据经验在这两方面作出一个折衷。没有哪一种理论为它提供一种独特的方法，这就是为什么在参考文献中能发现各种各样的处理方法。无论如何，通过对一定数量的值取平均值，或者说通过功率谱与加权序列的离散卷积，我们可以平滑序列 $|F(\nu)|^2$。

自然地，这可能会有好几个平滑的序列，但是哪一个是最优的呢?答案取决于数据的特点和分析的目的。虽然平滑能够增加精度，但是它也会带来许多负面影响。例如，如果有一个感兴趣的窄带频谱特性，那么对它进行过度平滑可能会导致它中间强度得到一个错误的较低的值，而它的宽度则会得到一个错误的较大的值，还可能在每边引入一个旁瓣。在一些情况下，绝对强度的测量是很重要的，比如在波谱学中利用傅里叶变换进行化学谱分析；而在其它一些情况下，分离靠近的频谱是比较重要的；还有一些情况对微弱特征的错误检测将会产生严重的后果。在后一种情况下，我们可以通过加宽频谱特征来抑止可能被认为是真实信号的旁瓣，但要接受随之而来的分辨率的降低。在另外一种情况下，我们为了得到频谱峰值处的一个更好的测量值，可能会接受这种旁瓣结构。即使这种代价和利益能相互平衡使用户满意，但是这种结果对新的一批数据并不一定是最优的。很明显，这种平滑序列的选择涉及到经验和判断，它超出了数学分析的范畴。

原则上，在功率谱域的平滑可以通过对自相关函数乘以一个锥形因子来实现。这种作用于自相关函数的因子，术语称为迟滞窗滑动窗，它是由 Blackmann 和 Tukey(1958) 提出来的。(频谱窗是迟滞窗滑动窗的傅里叶变换)。然而，当涉及到大量的数据时，首先通过 FFT，然后形成功率谱并用逆 FFT 的方法来计算自相关是比较方便的。一旦得到了功率谱，我们也可以直接做平滑处理，尤其是当加权序列较短的情况下。

在前面的章节中，我们知道采样后函数的 DFT 不一定和函数本身的傅里叶变换完全一致，特别是函数的突跳会导致高频分量。从一个数据流中截取的一段有限的数据具有导致这种不一致的陡峭的起始和结尾。因此，一些专业人士对数据应用锥形因子进行处理，从而消除或者减小两端的断点。这跟迟滞窗滑动窗是有区别的，但是大体的结果都将是平滑的功率谱。通常，这种方法的结果不能表示为原来的功率谱和一个加权序列的卷积，因此它们不能严格地表

示频带内的能量。这种方法所付出的代价是否比直接补零的代价小要视具体情况而定。

很明显，FFT 的作用要比一个程序包所完成的功能多好多。因为情况是变化的，用户的需求也不同，因此 FFT 的使用是相当巧妙的。随着程序变得越来越快、越来越方便，对那些商业程序而言，为了得到相关的经验，用我们自己的数据进行检验将变成一个非常重要的环节。

参考书目

Bergland, G. D.: "A Guided Tour of The Fast Fourier Transform," *IEEE Spectrum*, vol. 6, pp. 42-52, 1969.

Blackman, R. B., and J. W. Tukey: "The Measurement Of Power Spectra ,"Dover Publications, New York, 1958.

Bracwell, R. N.: "The Hartley Transform," Oxford University Press, New York, 1986.

Bracwell, R. N.: "Two Dimensional Imaging," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersy, 1995.

Brigham, E. O.: "The Fast Fourier," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersy, 1988.

Cochran, W. T., et al.: "What is the Fast Fourier Transform?" *IEEE Trans. Audio Electro-acoustics*, vol. AU-15, pp. 45-55, 1967.

Cooley, T. W., and J. W. Tukey: "An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series," *Math. Computation*, vol. 19, pp. 297-301.

Elliott, D,F,. and K. R. Rao: "Fast Transforns: Akgirutgnsm Aookucatuibsm," Academic Press, New York, 1982.

Ersoy, O. K.: "Fourier-Related Transform," Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.

Evans, D. M.: "An Improved Bit-reversal Algorithm," *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-35, pp. 1120-1125, 1987.

Gertner, I.: "A New Efficient Algorithm to Compute the Two-Dimensional Fourier Transform," *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-36, pp. 1036-1050, 1988.

Good, I. J. :"Random Motion on a Finite Abelian Group," *Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 47, pp. 756-762, 1951.

Nussbaumer, H. J.: "Fast Fourier And Convolution Algorithms," Spring-Verlag, Berlin, 1982.

Oppenheim, A. V., and R. W. Schafer: "Discrete-Time Signal Processing," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersy, 1989

Press, W. H., B. P. Flannery, S. A. teukolsky, and W. T. Vettering: "Numerical Recipes, the Art of Scientific Programming," Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1990. see also successor volumes devoted to programs and examples in BASIC, C, FORTRAN 77, FORTRAN 90 AND PASCAL.

Rabiner, L. R., and B. Gold: "Theory and Application of Digital Signal Processing," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersy, 1975.

Rao, K. R., and P. Yip: "Discrete Cosine Transform," Academic Press, New York, 1990.

—. "Special Issue on the Fast Fourier Transform with an Extensive Bibliography", *IEEE Trans. Audio Electro-Acoustics*, vol. AU-17, no. 2, June, 1969.

Walker, J. S.: "Fourier Analysis," Oxford University Press, New York, 1988.

Walker, J. S.: "A New Bit-Reversal Algorithm," *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal processing*, vol. ASSP-38, pp. 1472-1474, 1990.

习题

1. 离散表示 为了做离散傅里叶变换的计算机实验，函数$(1+t^2)^{-1}\Pi(t/10)$要用$N=16$的采样点离散表示。给下表填入合适的值。

τ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f(\tau)$																

2. 圆周卷积 求下列圆周卷积和：

$\{1\ 2\ 0\ 0\}*\{2\ 3\ 0\ 0\}$，$\{1\ 1\ 1\ 1\}*\{0\ 1\ 1\ 0\}$，和$\{1\ 0\ 0\ 1\}*\{0\ 1\ 0\ 0\}$。

3. 离散变换 求下列序列的 DFT，并通过“序列和”和“首值”规则检验所得结果。

$\{1\ 2\ 3\ 4\}$和$\{1\ 2\ 3\ 4\ 0\ 0\ 0\ 0\}$

4. 卷积定理 求下列圆周卷积，并用卷积定理验证结果。

$\{0\ 1\ 0\ 0\}*\{0\ 0\ 1\ 0\}$ 和 $\{1\ 1\ 0\ 0\}*\{0\ 0\ 1\ 1\}$

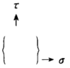
5. 二维卷积 求下列二维圆周卷积的和，并用二维卷积定理验证结果是正确的。

$$\begin{Bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{Bmatrix} ** \begin{Bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{Bmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{Bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{Bmatrix} ** \begin{Bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{Bmatrix}$$

6. 二维 DFT 验证下列四对二维 DFT 变换对，并证明第 5 对是它们相加的结果。

$$\begin{Bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{Bmatrix} \supset \frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{Bmatrix} \supset \frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1 & -1\\1 & -1\end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{Bmatrix} \supset \frac{1}{4}\begin{Bmatrix}-1 & -1\\1 & 1\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{Bmatrix} \supset \frac{1}{4}\begin{Bmatrix}-1 & 1\\1 & -1\end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{Bmatrix} \supset \frac{1}{4}\begin{Bmatrix}0 & 0\\4 & 0\end{Bmatrix}$$

阐明二维的序列和以及首值定理。使变换中的负号形式与二维移位定理所要求的形式一致。用上面的例子验证二维 Rayleigh-Parseval 定理。

7. 中点内插 一个 DFT 为$F(\nu)$的 16 点序列，通过在其尾部补 0 变成 32 点序列。新序列的 DFT 为$G(\nu)$，那么通过填补定理我们能立即获得一半$G(\nu)$的值；例如$G(0)=0.5F(0)$，$G(2)=0.5F(1)$，… $G(30)=0.5F(15)$。证明，$G(\nu)$的中间值可以通过已知值与中点内插序列（177 页）的圆周卷积得到，也就是说

$$G(\nu)=0.5\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(\nu/2-k-1/2)\operatorname{sinc}(k+1/2) \qquad \nu=1,3,\cdots,31。$$

8. 填补定理补遗　上题为了求得$G(\nu)$的中间值要对无穷多项求和。证明，如果把内插系数改为如下形式，那么可以简化为有限项的求和

$$G(\nu)=0.5\sum_{k=0}^{\infty}F(\nu/2-k-1/2)\,\frac{\sin[\pi(k+1/2)]}{\sin[\pi N^{-1}(k+1/2)]},\quad \nu=1,2,\cdots,2N-1,$$

其中N为补零前原序列的元素个数。

9. 二维自相关

(a) 计算如下数据矩阵(非周期的)的二维自相关：

τ \ σ	0	1
1	1	1
0	1	2

(b) 描述结果的对称性。

(c) 计算如下一维序列的自相关{1 1 1 2}，{1 1 0 1 2}，{1 1 0 0 1 2}。你能寻找一种通过只计算一维自相关来求得二维自相关的方法吗？

10. DFT 和 FT 的比较　一离散变量τ的函数定义为$f(\tau)=\exp(-\tau/4)$，对$1\leqslant\tau\leqslant 31$，当$\tau=0$时$f(0)=0.5$。计算其 DFT 并将其与$v(t)=\exp(-t/4)H(t)$的傅里叶变换$V(f)$比较。

11. 用 cosine-bell taper 平滑　如果函数$g(x)$乘以门函数$\Pi(x/X)$，然后再通过乘以$0.5+0.5\cos(2\pi x/X)$使其两边逐渐减小，那么它的傅里叶变换$G(s)$将会被平滑，就像与

$$X\operatorname{sinc}Xs[1/4\delta(s+X^{-1})+1/2\delta(s)+1/4\delta(s-X^{-1})]$$

进行卷积一样。如果N元序列$f(\tau)$类似于锥形，开始时($\tau=0$)从 0 点上升，到最后($\tau=N$)又降到 0 点，证明通过与N元序列{1/2　−1/4　0　…　0　−1/4}卷积，它的离散傅里叶变换$F(\nu)$将得到改善。这种操作的结果实际上是把任何$F(\nu)$的值用$-\frac{1}{4}F(\nu-1)+\frac{1}{2}F(\nu)-\frac{1}{4}F(\nu+1)$代替。从习题 3.1$f$(38 页)中我们知道与{1/4　1/2　1/4}作序列积将使序列变得光滑。但与序列{−1/4　1/2　−1/4}卷积不会使序列变得尖锐吗？

12. MATLAB 中下标的反转　行向量{1 2 3 4 5 6 7}通过翻转形成一个新的行向量$y(n)$={1 7 6 5 4 3 2}。说明如何用 MATLAB 来实现这种反转操作。

13. 离散 Hartley 变换的 M 文件

(a) 我们打算用一个名为 **dht** 的 MATLAB 函数，对 8 位长的序列(例如{1 2 3 4 5 6 7 8})进行运算，并得到已知的离散 Hartley 变换：

{4.5000　−1.7071　−1.0000　−1.7071　−0.5000　−0.2929　0.0000}。

所期望的函数程序有如下形式：

```
f = [1 2 3 4 5 6 7 8];
N = 8;
```

Dht(f,N)

编写出函数 **dht** 的 M-文件，其第一行应为 **function y = dht(f,N)**。

(b) 利用已编写好的函数 **dht**，将离散 Hartley 变换的结果与第 11 章中所给出的一些离散傅里叶变换进行比较。为了检查可以执行 **dht(dht(f,N))**，并且编写实现逆 Hartley 变换的 M-文件 **idht**。

14. 离散傅里叶变换对期望

(a) 验证序列{1 2 3 4 5 4 3 2 1}是对连续的三角窗函数 $5\Lambda(x/5)$（其傅里叶变换为 $25\mathrm{sinc}^2 5s$）进行单位间隔采样得到的。

(b) 用 DFT 定义的求和式或者用内嵌的可用程序，如 MATLAB 中的函数 **fft( )**，求下列序列的 DFT ：

{1 2 3 4 5 4 3 2 1}，

{0 0 0 0 1 2 3 4 5 4 3 2 1 0 0 0 0}，

{5 4 3 2 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 2 3 4}，

如果有的话，那么所求得的 DFT 中哪一个会与期望的 $25\mathrm{sinc}^2 5s$ 一致。

15. 二项式系数的 DFT 取{1 4 6 4 1}作为二项式系数 $B(n,x) = n!/(n-x)!x!$ 中 n 取 4 的例子，它满足正态分布 $A\exp(-x^2/2\sigma^2)$。使 σ 和 x 与它的（平均值之差的均方根）方差相匹配（即 $\sigma = 1$），通过使正态曲线下的面积与二项式系数之和相等来确定 A 的值。求{6 4 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 4}的 DFT 并与 $A\exp(-x^2/2\sigma^2)$ 的傅里叶变换作比较。

16. 圆周卷积和 给定两个序列{1 7 21 35 35 21 7 1}和{1 5 9 5 −5 −9 −5 −1}，它们以 12 为周期的圆周卷积是什么？

17. 时间测定实验 使用 T4（四次乘法的标称时间）的定义，看当取多于或少于 1 000 次的平均时，所花费的时间是否会发生变化。如果可能的话，试着用不同的计算机或不同的语言来实验。在这种时间测定实验中能得到什么？

18. sinc 内插 第 10 章中所描述的中点内插是指与一系列 sinc 函数的采样点作卷积。通过对{f}进行 N 点截断，然后对{f}作 DFT 变换能得到{F}，其中{F}为 N 个复数值，这能得到与中点内插相同的结果。现在构造一个序列{G}，它保留了原来的 N 个值，另外在尾部附加 N 个零值使得序列的长度达到了 $2N$，这些零值会使变换扩展到更高的频率。对这 $2N$ 个值作逆变换，那么共有 $2N$ 个值，它们中有一半与{f}一致，而另一半则为中点内插值。

(a) 写出一个较短的程序来阐明这种方法。

(b) 为了补偿 N 变化所带来的后果，我们需要对什么进行调整？

(c) 当在所给的{f}值中内插 3 个值时，应该怎么做？

(d) 与 sinc 函数内插的其它方法做比较。

第 12 章

离散哈特利变换[①]

一种严格互易的实变换

给定一个实的波形信号 $V(t)$，若下面的积分存在，我们就可以定义积分变换

$$\Psi(\omega) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} V(t)(\cos\omega t + \sin\omega t)\mathrm{d}t, \tag{1}$$

该波形信号可以是复信号，但在下文中把它取为实的，也可以包含诸如 δ 函数及其导数等广义函数。显而易见，$\Psi(\omega)$ 是双边正弦变换和双边余弦变换的和，从它们的互易性质我们可以很容易地推出 $\Psi(\omega)$ 的反变换为

$$V(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\omega)(\cos\omega t + \sin\omega t)\mathrm{d}\omega。 \tag{2}$$

上述关系(157 页)是由哈特利(Hartley,1942)提出的，曾出现在一些专业文献中，但并不广为人知。这种变换的正变换与反变换形式上完全一致，而且当给定信号 $V(t)$ 为实信号时，$\Psi(\omega)$ 也是实的。

为了将 $\Psi(\omega)$ 与 $V(t)$ 的傅里叶变换 $S(\omega)$ 联系起来，我们使用下面的傅里叶变换定义比较方便：

$$S(\omega) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} V(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t。$$

其反变换为

$$V(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega。$$

---

① 经过许可，重印自 J. Opt. Soc. Am., vol. 73, no. 12, December 1983, pp. 1832-1835

令 $\Psi(\omega)=e(\omega)+o(\omega)$，其中 $e(\omega)$ 和 $o(\omega)$ 分别为 $\Psi(\omega)$ 的奇部和偶部。则

$$e(\omega)=\frac{\Psi(\omega)+\Psi(-\omega)}{2}=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}V(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$o(\omega)=\frac{\Psi(\omega)-\Psi(-\omega)}{2}=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}V(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t。$$

对于给定的 $\Psi(\omega)$，我们可以构造 $e(\omega)-\mathrm{i}o(\omega)$，以获得 $V(t)$ 的傅里叶变换 $S(\omega)$：

$$S(\omega)=e(\omega)-\mathrm{i}o(\omega)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}V(t)(\cos\omega t-\mathrm{i}\sin\omega t)\mathrm{d}t。\tag{3}$$

这样，我们看到仅通过简单的反射与叠加运算，就可以从 $\Psi(\omega)$ 容易地得到 $V(t)$ 的傅里叶变换。

反之，若给定了 $S(\omega)$，我们也可以获得 $\Psi(\omega)$：

$$\Psi(\omega)=\mathrm{Re}[S(\omega)]-\mathrm{Im}[S(\omega)]。\tag{4}$$

将 $S(\omega)$ 的实部减去虚部，即可得到 $\Psi(\omega)$。

符号与示例

作为一个例子，取

$$V(t)=\begin{cases}\exp(-t/2) & t>0\\ 0 & t<0。\end{cases}$$

则

$$S(\omega)=\frac{1-\mathrm{i}\omega}{1+\omega^2}$$

$$\Psi(\omega)=\frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}}(1+\omega)}{1+\omega^2}。$$

图12.1的左边是 $V(t)$，右边是它的傅里叶变换 $S(\omega)$，其中虚线表示 $S(\omega)$ 的实部，点线表示 $S(\omega)$ 的虚部。图中虚部的符号已经取反了。实线表示哈特利变换，该变换为 $S(\omega)$ 的实部与虚部符号取反的简单求和。它是实的而且明显是非对称的。反过来，利用 $\Psi(\omega)$ 的奇部和偶部可以恢复出复值傅里叶变换 $S(\omega)$ 的实部和虚部。

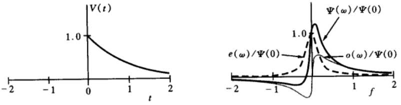


图 12.1　$V(t)$（左图）及其傅里叶变换 $S(\omega)$ 的实部（右图虚线），符号取反后的 $S(\omega)$ 的虚部（右图点线），以及它的 Hartley 变换（右图实线）

为了沿袭历史，我们保留了哈特利所使用的因子$(2\pi)^{\frac{1}{2}}$。但在下文中我们将省略这些因子，转而使用一种更熟悉的符号记法，其中 2π 仅出现在($2\pi\times$ 频率) 这种组合中。

离散哈特利变换

考虑一个类似于时间的离散变量 τ，但可以假设为仅有从 $0 \sim N-1$ 的 N 个整数值。给定一个函数 $f(\tau)$，我们可以把它看作一个波形信号，定义它的离散哈特利变换(DHT) 为

$$H(\nu)=N^{-1}\sum_{\tau=0}^{N-1}f(\tau)\operatorname{cas}\left(\frac{2\pi\nu\tau}{N}\right), \tag{5}$$

其中 $\operatorname{cas}\theta=\cos\theta+\sin\theta$，是哈特利使用的缩写。作为比较，其离散傅里叶变换 $F(\nu)$ 为

$$F(\nu)=N^{-1}\sum_{\tau=0}^{N-1}f(\tau)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}2\pi\nu\tau}{N}\right)。$$

$f(\tau)$ 的逆 DHT 关系式为

$$f(\tau)=\sum_{\nu=0}^{N-1}H(\nu)\operatorname{cas}\left(\frac{2\pi\nu\tau}{N}\right)。 \tag{6}$$

为了导出上式结果，我们利用正交关系

$$\sum_{\nu=0}^{N-1}\operatorname{cas}\left(\frac{2\pi\nu\tau}{N}\right)\operatorname{cas}\left(\frac{2\pi\nu\tau'}{N}\right)=\begin{cases}N & \tau=\tau'\\ 0 & \tau\neq\tau'\end{cases}。$$

将(5) 式代入(6) 式的等号右边，可得

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{N-1}H(\nu)\operatorname{cas}\left(\frac{2\pi\nu\tau}{N}\right)&=\sum_{\nu=0}^{N-1}N^{-1}\sum_{\tau'=0}^{N-1}f(\tau')\operatorname{cas}\left(\frac{2\pi\nu\tau'}{N}\right)\operatorname{cas}\left(\frac{2\pi\nu\tau}{N}\right)\\&=N^{-1}\sum_{\tau'=0}^{N-1}f(\tau')\sum_{\nu=0}^{N-1}\operatorname{cas}\left(\frac{2\pi\nu\tau'}{N}\right)\operatorname{cas}\left(\frac{2\pi\nu\tau}{N}\right)\\&=N^{-1}\sum_{\tau'=0}^{N-1}f(\tau')\times\begin{cases}N & \tau=\tau'\\ 0 & \tau\neq\tau'\end{cases}\\&=f(\tau),\end{aligned}$$

这样就验证了式(6)。

可以看出，除了一个在 DFT 常见的因子 N^{-1} 以外，DHT 是对称的，而且也是实的。

如果将 DHT 定义中的因子 N^{-1} 换成 $N^{-1/2}$，再给其反变换乘以一个因子 $N^{-1/2}$，就可以得到一个严格对称的变换。哈特利就是利用这种方法保证了他的原始积分关系的对称性。然而，不乘常数因子经常会很方便，为做到这一点，我们可以将常数因子吸收进归一化因子或后面将要引入的作图比例因子。为了明确指出这种相对良性的非对称，我们可以说 DHT 是准对称的。

为了从 DHT 得到 DFT，可将 DHT 分为奇部和偶部。

$$H(\nu)=E(\nu)+O(\nu),$$

其中

$$E(\nu) = \frac{H(\nu) + H(N-\nu)}{2}$$

$$O(\nu) = \frac{H(\nu) - H(N-\nu)}{2}。$$

那么 DFT 可由下式给出

$$F(\nu) = E(\nu) - \mathrm{i}O(\nu)。$$

相反地，$H(\nu) = \mathscr{F}[f_{\text{even}}] - \mathscr{F}[f_{\text{odd}}]$。

既然这种实的严格可逆的积分变换，构成了现在的离散变换的基础，它最早是由拉尔夫 V. L. 哈特利(Ralph V. L. Hartley) 于 1942 年提出的，那么这个变换也就适合以他的名字命名。哈特利是无线电工程师协会的会员，而且还负责贝尔实验室的电话线路研究工作(1918 ～ 1929)。对电气工程师的一代人来说，是通过哈特利振荡器而熟知他名字的，这种振荡器曾经是教材中的电子正弦波源的标准例子。一个简单的系统包含一个带反馈(由带抽头的电感产生)的三极管放大器。有关参考文献及论文请参见 *Proc. IEEE* 1994 年 3 月的特刊，其中一节专门介绍哈特利变换(由 K. J. Olejniczak 和 G. T. Herdt 编辑)。其后的有关文章可用科技引文索引(*Science Citation Index*) 检索。

DHT 的例子

为了与图 12.1 比较，考虑

$$f(\tau) = \begin{cases} 0.5 & \tau = 0 \\ \exp(-\tau/2) & \tau = 1,2,\cdots,15, \end{cases}$$

$f(\tau)$ 是对连续函数 $V(t)$ 的前面部分进行等间隔采样，共采样 $N = 16$ 点。由于 $V(t)$ 在 0 时刻不连续，把 $f(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 时的值取为$[V(0+) + V(0-)]/2 = 0.5$。图 12.2 为 $f(\tau)$ 及其离散哈特利变换 $H(\nu)$，其结果类似于对图 12.1 中的变换以间隔 $\Delta\omega/2\pi = 1/16$ 进行采样。

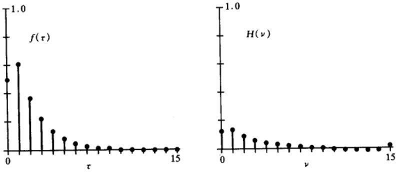


图 12.2　图 12.1 中使用的截断指数波形的 16 点表达(左) 及其离散哈特利变换(右)

两个图的差异较小，部分是由于截断指数波形而引起的，部分是由于像 DFT 一样的混叠造成的。举最后一个例子，用二项式序列 1,6,15,20,15,6,1 表示对光滑脉冲信号的采样。为了获得最简单的结果将峰值取在 $\tau = 0$ 处。这样

τ,ν =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15,
$f(\tau)$ =	20	15	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	6	15,
$H(\nu)$ =	4	3.56	2.49	1.32	0	0.12	0.01	0	0	0	0	0.12	0.5	1.32	2.49	3.56。

结果见图 12.3，这正是所预期的峰值在 $\nu=0$ 处的光滑脉冲信号。

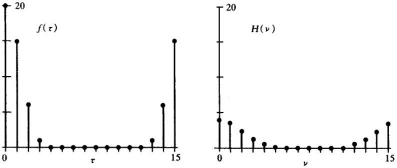


图 12.3　二项式序列(左)和它的 DHT 变换(右)

为了进行数值校验，知道下面的事实非常有用，和离散傅里叶变换一样，DHT 的和 $\sum H(\nu)$ 等于 $f(0)$；反之，数据值的和 $\sum f(\tau)$ 等于 $NF(0)$。

讨论

初一看，DHT 的 N 个实数值就能取代 DFT 的 N 个复数值，即 $2N$ 个实数。但是我们可以这样理解：DFT 的 Hermitian 性质意味着 2 倍的冗余。由于对称的原因，$N/2$ 个实数足以确定余弦变换，另外 $N/2$ 个实数确定正弦变换，二者结合构成了 N 个离散哈特利变换系数且不损失任何信息。

函数 $\mathrm{cas}\theta$，可以看作一个有 45° 相移的正弦波，它对余弦和正弦分量的响应相等。一般地，如果我们使用 $2^{\frac{1}{2}}\sin(\theta+\alpha)$ 作为内核(基)函数，其中 α 表示任意的相移，此时对正、余弦的响应不相等但并不损失任何信息，除非 $\alpha=0,\ \pi/2,\ \cdots$。相应地，我们希望它是可逆的，逆变换的内核(基)函数是 $\cot^{\frac{1}{2}}\alpha\sin\theta+\tan^{\frac{1}{2}}\alpha\cos\theta$。

一维和二维的卷积运算

DHT 服从的卷积定理如下：如果 $f(\tau)$ 是 $f_1(\tau)$ 和 $f_2(\tau)$ 的卷积，即

$$f(\tau)\equiv f_1(\tau)*f_2(\tau)=\sum_{\tau'=0}^{N-1}f_1(\tau')f_2(t-\tau'),$$

那么

$$H(\nu)=H_1(\nu)H_{2e}(\nu)+H_1(-\nu)H_{2o}(\nu),$$

其中 $H(\nu)$，$H_1(\nu)$ 和 $H_2(\nu)$ 分别为 $f(\tau)$，$f_1(\tau)$ 和 $f_2(\tau)$ 的离散哈特利变换。且 $H_2(\nu)=H_{2e}(\nu)+H_{2o}(v)$，即其奇部与偶部的和。

计算卷积的常用方法是，先分别取两个序列的离散傅里叶变换，然后在频域上逐点进行复数乘法，这样每个点需要进行四次实数乘法运算。然后再取傅里叶反变换，要记住改变 i 的符号。类似地，如果利用哈特利变换进行卷积，每个点只需进行两次实的乘法运算。

不过，经常出现其中一个卷积函数，如 $f_2(\tau)$，是偶对称的情况，尤其是在图像处理或一般的数字滤波中。这种情况下，$H_{2o}(\nu)$ 为零，因此卷积定理简化为 $H(\nu)=H_1(\nu)H_2(\nu)$。对于定理的这种简化形式，只需要分别求出两个序列的离散哈特利变换，然后对两个实序列逐项相乘，再取反变换。每一点只需进行一次实的乘法运算。该过程可描述为

$$f_1(\tau)*f_2(\tau)=\mathrm{DHT}[\mathrm{DHT}(f_1)\times\mathrm{DHT}(f_2)]。$$

在进行 DHT 变换之前，为了给卷积留出空间，可以通过补零将一个给定序列的长度扩展为原长度的两倍。零点可以加在序列的前边、后边或两边。当进行卷积的两个序列长度不相等但相当时，就可以使用先补零再对变换相乘的方法；但是如果一个序列的长度比另一个序列短很多，就像数字滤波中常见的一样，则建议使用直接卷积的方法（参见第 3 章的简单代码）。

对于二维的图像处理，也可以使用同样的方法，而且其避免复数运算以及非互易子程序的优点更加明显。

二维 DHT

二维图像的处理也可以从实变换中受益。一个用 $M\times N$ 矩阵表示的图像 $f(\tau_1,\tau_2)$ 的确具有二维离散哈特利变换（^{2}DHT）$H(\nu_1,\nu_2)$，且变换本身是一个 $M\times N$ 的实矩阵。^{2}DHT 正变换与反变换表示如下：

$$H(\nu_1,\nu_2)=M^{-1}N^{-1}\sum_{\tau_1=0}^{M}\sum_{\tau_2=0}^{N}f(\tau_1,\tau_2)\mathrm{cas}[2\pi(\nu_1\tau_1+\nu_2\tau_2)],$$

$$f(\tau_1,\tau_2)=\sum_{\nu_1=0}^{M}\sum_{\nu_2=0}^{N}H(\nu_1,\nu_2)\mathrm{cas}[2\pi(\nu_1\tau_1+\nu_2\tau_2)]。$$

正如 Bracewell 等人(1986) 解释的一样，二维哈特利变换可以分解为 N 个一维的变换，它还可以更有效地完成(Meher，1992；Yang，1989)。

二维哈特利变换的优点之一是，仅需要一张图就可以表示一幅图像的谱分析；而一幅图像的傅里叶变换则需要两张图，或者分别表示实部和虚部，或者分别表示幅度和相位，因此几乎从未使用过。Bracewell 和 Villasenor (1990) 给出了这种表达在光学方面应用的例子。J. Villasenor 提出了螺旋缝隙的哈特利变换的一个引人注目的例子，出现在 *Proc. IEEE* 1994 年 3 月的封面上；而 Bracewell (1995b) 的第 587 和 588 页中，把二维对象的复的傅里叶变换和包含对象完全的幅度和相位信息的实的哈特利变换图进行了比较。把一个二维变换存储为单个的实数组和存储成图形表示（二维）都一样的方便。当表达中不包含相位信息时，DHT 和 DFT 两种变换具有相同的二维功率谱。

对三维的情况，参见 Hao 和 Bracewell (1987)；对四维的情况，参见 Buneman (1987)。

Cas-Cas 变换

在二维变换中，我们可以用 $\mathrm{cas}2\pi\nu_1\tau_1\mathrm{cas}2\pi\nu_2\tau_2$ 代替变换的内核（基）函数 $\mathrm{cas}[2\pi(\nu_1\tau_1+$

$\nu_2\tau_2)$]，它的显著特点是可分离性(Perkins, 1987)。这种 Cas-Cas 变换是互易的(Bracewell, 1983)，同样地，它和标准的二维哈特利变换有关。所不同的是，当选择 $\cos[2\pi(\nu_1\tau_1+\nu_2\tau_2)]$ 形式的基函数时，(ν_1,ν_2) 平面上的波纹表示它具有平行的零点轨迹；而若选择 $\cos 2\pi\nu_1\tau_1\cos 2\pi\nu_2\tau_2$ 作基函数，其零点轨迹具有直角交叉的形式。Millane (1994) 也讨论过内核(基)函数的选择，他给出了另外的参考。可分离性并未被证明是一个基的优先选择，因此 $\cos[2\pi(\nu_1\tau_1+\nu_2\tau_2)]$ 是 DHT 的标准基函数。

定理

对于每一个适用于傅里叶变换的定理，都有相应的哈特利变换的定理。其中一些定理完全对应，如 $\sum H(\nu)=f(0)$ 和 $\sum f(\tau)=NH(0)$。同样，正如前面提到的那样，在大多数情况下，卷积的哈特利变换等于哈特利变换的乘积。当然它们之间也有一些区别，如在实现快速哈特利算法时要用到的移位定理是

$$\mathrm{DHT}[f(\tau+\alpha)]=H(\nu)\cos\left(\frac{2\pi a\nu}{N}\right)-H(-\nu)\sin\left(\frac{2\pi a\nu}{N}\right)。$$

对于哈特利变换，存在平方积分(quadratic content)定理

$$\sum_{\tau=0}^{N-1}[f(\tau)]^2=N\sum_{\nu=0}^{N-1}[H(\nu)]^2。$$

离散傅里叶变换有类似的定理，只不过此处的定理不涉及复共轭，只有实数运算。

根据反转定理，$f(-\tau)$ 的 DHT 变换为 $H(-\nu)$，这种反转是以 N 为模的，即当 τ 落在 0 到 $N-1$ 之外时，需要加上或减去所需的 N 的整数倍将其映射到 $0\sim N-1$ 上。

一阶差分定理是指 $f(\tau+1)-f(\tau)$ 的 DHT 变换为

$$[\cos(2\pi\nu/N)-1]H(\nu)-\sin(2\pi\nu/N)H(N-\nu)。$$

离散正弦和离散余弦变换

$f(x)$ 的积分余弦变换被定义为 $2\int_0^\infty f(x)\cos 2\pi sx\,\mathrm{d}x$，可以直接通过在傅里叶变换图示集的每一列查找纯偶对称的图形得到积分余弦变换的许多例子。另外，还可以通过用代数的扩展函数方法得到余弦变换。给定一个 $x\geqslant 0$ 的原函数，补充左边的部分使得生成一个新的偶函数，然后使用各种技术获取它的傅里叶变换，这样就可以获得余弦变换。即使它不是高等数学中已存在函数的傅里叶正弦和余弦变换表的扩展(著名的 Erdélyi 的积分变换表)，这些变换也只能看作是傅里叶变换的特例。

余弦变换的离散形式为 $\sum_0^{N-1}f(\tau)\cos(2\pi\nu\tau/N)$(正弦变换亦类似)。但是这种变换无法通过反变换恢复出 $f(\tau)$，这是因为形如 $\sin(\pi\nu\tau/N)$ 的 $f(\tau)$ 的分量不可积且没有意义。若规定当 x 为负值时 $f(x)$ 为零，则正弦、余弦变换都是可逆的；当 $f(\tau)$ 是偶对称时(即对 $\tau=1$ 到 $N-1$，$f(\tau)=f(N-\tau)$)，我们说离散余弦变换是可逆的。

边界值问题 如果我们用 0，$\frac{1}{2}/N$，$1/N$，$1\frac{1}{2}/N$，… 取代上面的频率点 0，$1/N$，$2/N$，

$3/N,\cdots$，可以得到有用的可逆的离散正弦和离散余弦变换。此时，基频为 $1/2N$，基本周期为 $2N$。考虑下面的离散和

$$\sum_{\tau=1}^{N-1} f(\tau)\sin(\pi\nu\tau/N)。$$

在上述操作中，注意到 τ 的取值范围为 $1 \sim N-1$。即使是计算 $\sum_{\tau=0}^{N-1}$ 的和，给 $f(0)$ 赋值也是没有意义的，这是因为基函数 $\sin(\pi\nu\tau/N)$ 在 $\tau=0$ 处始终为零。连续进行两次这样的运算，可以得到 $\frac{1}{2}Nf(\tau)$。故可以定义离散正弦变换为

$$F_s(\nu) = \frac{2}{N}\sum_{\tau=1}^{N-1} f(\tau)\sin(\pi\nu\tau/N),$$

其反变换为

$$f(\tau) = \sum_{\nu=1}^{N-1} F_s(\nu)\sin(\pi\nu\tau/N)。$$

相应的离散余弦变换 $F_c(\nu)$ 为

$$F_c(\nu) = \frac{2}{N}\sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau)\cos(\pi\nu\tau/N)。$$

然而，若给定 $F_c(\nu)$，要想恢复出 $f(\tau)$，在代数上是很复杂的。Press 等人(1986) 提出了一种基于 FFT 的快速算法 COSFT。该书的第二版(1992) 介绍了一种修订的定义，这种定义基于 $N+1$ 个数据且是严格对称的：

$$^0F(\nu) = \sqrt{\frac{2}{N}}\left\{\frac{1}{2}[f(0)+(-1)^\nu f(N)] + \sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau)\cos(\pi\nu\tau/N)\right\}。$$

另一种有关的 DCT(Rao 和 Yip，1990) 没有使用上面使用的光滑余弦基函数，例如，当余弦的自变量为零时，用 $1/\sqrt{2}$ 代替 1。这样，

$$^1F_c(\nu) = \sqrt{\frac{2}{N}}k_\nu \sum_{\tau=0}^{N} k_\tau f(\tau)\cos(\pi\nu\tau/N), \quad \nu = 0 \sim N。$$

下标为 0 或 N 时，系数 k_ν 和 k_τ 的值为 $1/\sqrt{2}$，其余情况下它们的值均为 1。

然而，迄今为止 N 是组成 $f(\tau)$ 的元素个数，而这里 N 是元素个数减 1(共有 $N+1$ 个元素)。这个变换是严格对称的：

$$f(\tau) = \sqrt{\frac{2}{N}}k_\tau \sum_{\nu=0}^{N} K_\nu^1 F_c(\nu)\cos(\pi\nu\tau/N), \quad \nu = 0 \sim N,$$

上式被称为 DCT1。

一些不涉及复傅里叶分析的差分方程的求解知识，对于离散正弦和离散余弦变换很重要。举一个简单的例子，如果我们要研究在非中点处拉一根长为 L 的小提琴的弦所产生的结果，没有必要对弦的形状 $y(x)$ 进行完全的傅里叶分析。局限在级数 $\sin(\pi x/L)$，$\sin(2\pi x/L)$，

$\sin(3\pi x/L)$，等上面的分量足以合成弦的形状，因为边界条件 $y(0)=0$ 和 $y(L)=0$ 使得不再需要余弦项了。在另一种情况下，当边界条件变为 $[\mathrm{d}y/\mathrm{d}x]_{x=0,L}$ 等于零时，仅用余弦变换就足以得出结果。利用边界值处理傅里叶变换也是可行的，但并不常见。一般地，傅里叶分析法需要同时分析正弦、余弦两分量，而不是单独分析其中的一种。这样取 $L=1$，且

$$f(x)=\begin{cases}2x & 0<x<a\\ 1-x & a<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

其复的傅里叶变换为

$$f(s)=\frac{1}{2}\operatorname{sinc}^2 s-\frac{1}{2}a\operatorname{sinc}^2 as+\mathrm{i}\,\frac{\sin 2\pi s-3\sin 2\pi as}{4\pi^2 s^2}。$$

反过来，$f(x)$ 可以表达为$\int_{-\infty}^{\infty}F(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi sx}\mathrm{d}s$，其中被积函数是复的。

但是对 $0\leqslant x\leqslant\infty$ 的范围，我们也能写出更简单的关系

$$f(x)=2\int_0^{\infty}\frac{\sin 2\pi s-3\sin 2\pi as}{4\pi^2 s^2}\sin 2\pi sx\,\mathrm{d}s。$$

其中，被积函数是实的，仅由不同幅度和频率的正弦波组合而成。

无论在释放时刻弦的初始形状有多复杂，或是否存在对称或反对称关系，引人注目的是弦的形状总能只分解成正弦分量。在末端闭合的管道中的波形可以只分解成余弦分量。

物理学领域所涉及的波动方程、拉普拉斯方程、扩散方程以及其它基本的二、三、四维微分方程，为使用离散正弦和余弦变换的数值分析提供了广阔的应用范围。

数据压缩应用　当不得不用数字方式传输图像时，因计算机通常不够快而无法保证图片质量，更成功的努力就是能在减少传送比特量的同时使接收图像的失真减到最小。如果一幅图像由一百万个像素组成，每个像素量化为 256 级，对某些应用来说这样的位数太多了。若将每 2×2 个像素用一个像素代替，并赋以四个像素的平均值，则该图像的位数就减少为原来的四分之一。图像的失真主要由可描述为卷积的模糊以及较粗的采样构成。如果这幅图像按典型的报纸质量输出到一页信纸大小的面积上，眼睛看上去就会明显感到模糊。因为新闻纸只提供 8 个灰度等级，所以表示图像的位数缩减了 32 倍。但对很多应用来说，如识别一张脸，这样的图像失真是可以接受的。显然，图像失真的可接受的准则除了与数字化过程有关外，还与人眼的视觉感受以及图像的特点有关。

经验研究表明，当对图像进行空间谐波分析时，很多图像在高的空间频率内的信息很少。这提示我们可以传送图像的傅里叶变换，不过要抑制或不强调高频（如减少量化级数）。在接收端，取反变换可以得到失真程度可以接受的图像。这一过程被称为变换编码。不论数据压缩在图像域实现还是在变换域实现，图像的各个部分都被等同对待；但是显然，一张图像的不同区域可接受的模糊程度是不同的，例如一页文本。因此，使用像行程编码、TIFF 编码和 delta-row 编码这样的一维数据操作编码可以获得更多的编码增益。把图像分割成由均匀的空间统计特性部分（可大可小）所组成，这样提供了更多的（提高编码增益）机会。

当考虑图像的统计特性时，数据压缩的优点可由连续进行变换来代表。这样一个首选的变

换及其反变换定义如下：

$$^{\mathrm{II}}F(\nu)=\frac{\alpha(\nu)}{N}\sum_{\tau=0}^{N-1}f(\tau)\cos\left[\frac{\pi}{2N}(2\tau+1)\nu\right]$$

$$f(\tau)=\sum_{\nu=0}^{N-1}\alpha(\nu)^{\mathrm{II}}F(\nu)\cos\left[\frac{\pi}{2N}(2\tau+1)\nu\right],$$

其中除了 $\alpha(0)=1/\sqrt{2}$ 以外 $\alpha(\nu)=1$。变换 $F(\nu)$ 是由 Ahmed，Natarajan 和 Rao(1974) 等人作为“a DCT”引入的。这个有影响力的文字最终导致了在 Pennebaker 和 Mitchell(1993) 所描述的国际标准中提到了这种 DCT 变换，它被称为 DCT2(Rao 和 Yip，1990)。

同 DCT1 一样，DCT2 也是分解成频率 0，$\frac{1}{2}/N$，$1/N$，$1\frac{1}{2}/N$，…，但是采样点时移了半个单位，且其基函数不是严格意义上的余弦函数。此时余弦因子在 $\tau=0$ 处不是 1 而是一个变量 $\cos(\pi\nu/2N)$。然而，基向量是正交的。DCT2 变换不是严格可逆的，也就是说，连续进行两次该变换，并不能恢复原始信号。在 DFT 和哈特利变换中熟悉的定理，例如移位和卷积定理，对 DCT2 来说就没有那么明确了。通过重排数据使得可以使用 FFT 使计算更方便，Press 等人和 MATLAB(提供了一个操作 **dct(f)**) 都证明了这一点。作为一种选择，一些作者曾发表了利用哈特利变换得到 DCT2 的代码(Rao 和 Yip，1990，第 65 页)。DCT2 最显著的优势是，它能够有效地判断出统计特性近似于一阶 Markov 的图像，并有良好的性能。对于文本图像以及像 ASCII 码、蜂窝电话或数字化语音及音乐等的时间信号，数据压缩并不能明显提高其传输效率。

计算

离散哈特利变换的性质使得它适合于数值分析应用。当运算速度是主要的要求时，我们可以使用后面将要提到的“快速哈特利变换”(FHT)。很多用户用快速哈特利变换编制的程序比用 FFT 编制的程序运行明显地快；就个人计算机来说，哈特利变换的简单性也是一个优势。在引入了这种直接对实数操作的手段后，原来的用实数据构造为复数使之适合用傅里叶变换计算的方法的就很少使用了(Buneman，1986)。

傅里叶变换的复基函数是线性时不变算子的特征函数，这使得傅里叶变换在理论上比较方便。这种代数特性在实际计算中没有多大意义，正弦、余弦或 cas 函数都没有特征函数。

对数值变换的感性认识

傅里叶变换图形集中用图形表示傅里叶积分变换，使得对频率分析的解释有了感性认识；我们可以很容易地把这个经验应用于相应的数值变换。当然，从早期程序员继承来的避免使用负指标的习惯与数学分析中的负频率的概念不一致，例如，

$$\cos\omega t=\frac{1}{2}e^{-i\omega t}+\frac{1}{2}e^{i\omega t}。$$

余弦函数分解为两个频率，一正一负，每个频率的幅度为 1/2，我们熟悉的图 6.1 可以加深这种理解，它的左边是余弦函数，右边是两个幅度为 1/2 的冲激。如果对周期为 4 的余弦函数 $\cos(2\pi t/4)$ 在 t 的单位间隔上离散化，并把变换对数值化地表示为，

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & \tau=0 & & & & \\ \cdots & 0 & -1 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 & \cdots \end{array} \qquad \begin{array}{cccccccccc} & & & \nu=-2 & & & \nu=+2 & & \\ \cdots & 0 & +\frac{1}{2} & 0 & \mathbf{0} & 0 & +\frac{1}{2} & 0 & 0\cdots \end{array}$$

波形　　　　　　　　　　频谱

那么我们就可以把图形和离散形式联系起来。对于 $\sin(2\pi t/4)$ 同样有

$$\begin{array}{cccccccccc} & & & & \tau=0 & & & & & \\ \cdots & 1 & 0 & -1 & \mathbf{0} & 1 & 0 & -1 & \cdots \end{array} \qquad \begin{array}{cccccccccc} & & & & & \nu=0 & & & & \\ \cdots & 0 & 0 & +\frac{1}{2} & 0 & \mathbf{0} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \end{array}$$

波形　　　　　　　　　　频谱

若再加上一些强度为 2 的直流，图形表述形式为：

$$\cos(2\pi t/4) \supset \frac{1}{2}\delta\left(t+\frac{1}{4}\right)+2\delta(t)+\frac{1}{2}\delta\left(t-\frac{1}{4}\right),$$

也就是下面的对应关系

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \tau=0 & & & & \\ \cdots & 2 & 1 & 2 & \mathbf{3} & 2 & 1 & 2 & \cdots \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccccc} & & & & & \nu=0 & & & & & \\ \cdots & 0 & 0 & +\frac{1}{2} & 0 & \mathbf{2} & 0 & +\frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \end{array}$$

波形　　　　　　　　　　频谱

时间原点($\tau=0$) 和频率原点($\nu=0$) 都用粗体标出。

然而，对上述三个例子可以用习惯的下标表示如下：

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\tau=0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \nu=2 \qquad\qquad \nu=6 \\ \{\mathbf{1}\ \ 0\ \ -1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ -1\ \ 0\} \supset \{\mathbf{0}\ \ 0\ \ \frac{1}{2}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ \frac{1}{2}\ \ 0\} \\ \{\mathbf{0}\ \ 1\ \ 0\ \ -1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ -1\} \supset \{\mathbf{0}\ \ 0\ \ -\frac{1}{2}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ \frac{1}{2}\ \ 0\} \\ \{\mathbf{3}\ \ 2\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 2\ \ 1\ \ 2\} \supset \{\mathbf{2}\ \ 0\ \ \frac{1}{2}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ \frac{1}{2}\ \ 0\} \end{array}$$

ν 值的 1,2,3,4,5,6,7 分别表示频率 1/8,2/8,3/8,4/8,$-3/8$,$-2/8$,$-1/8$。

我们应记住，对非负的频率($0 \leqslant \nu \leqslant N$)，$\nu/N$ 直接给出了频率；而对一个负频率如 -0.25，如果允许使用负指标的话应落在 $\nu=-2$ 处，在此放在 -2 模 8 的地方，即 $\nu=6$。当我们看一个数值谱时，第一个元素给出直流的值(就像前面的傅里叶级数系数 a_0 一样)，而一个频率 f 在 $\nu=\pm Nf$ 对 N 取模的两个位置表示。余弦分量在这两个位置上有相等的值，而正弦分量的绝对值相等，符号相反。

所有上面的例子都适用于离散傅里叶变换和离散哈特利变换。对于其它的实变换要说的更多。为了比较，下面给出上面三个变换的 DCT1(中) 和 DCT2(右)。

$f(\tau)$	DCT1	DCT2
{**1** 0 −1 0 1 0 −1 0}	{**.11** .47 .32 1.31 1.31 −.32 .41 −.11}	{**0** .53 0 1.09 1.41 −.73 0. −.11}
{**0** 1 0 −1 0 1 0 −1}	{**0** 1 0 −1 0 1 0 −1}	{**5.66** .53 0 1.09 1.41 −.73 0 −.11}
{**3** 2 1 2 3 2 1 2}	{**5.49** .41 .12 1.31 1.75 −.32 .85 −.11}	{**0** .53 0 1.09 −1.41 0 −.73 −.11}

复哈特利变换

由于天线的辐射方向图可以表示为电磁场的孔径分布的傅里叶变换，而且由于透镜可以将一个光学孔径分布转换为另一种可以相似表达的分布，如此看来哈特利变换也许是一个没有物理意义的数学构造。然而，这两种变换之间有密切的关系，一种变换具有什么样的性质，另一种变换也有相应的性质。这种关系可以通过图 2.10 的帮助来解释，其中傅里叶变换 $F(s)$ 的实部和虚部被绘成 $R=\mathrm{Im}F$ 对 $S=\mathrm{Re}F$ 的复平面上的点的轨迹，轨迹上的每一点对应 s 的一个值。通过把 R 轴和 S 轴旋转 -45° 得到一个新的坐标系 $R'-S'$，R' 方向上的分量可以看作是 s 的函数，其结果即为哈特利变换。另一方面，如果是对一个实函数 $f(x)$ 进行变换，则 S' 方向的分量不包含信息。变换

$$R'(s)+\mathrm{i}I'(s)=[R(s)+\mathrm{i}I(s)]\times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$$

描述了两个变换间的密切关系。由 $R(s)$ 和 $I(s)$ 可以重建复平面上的点，但缺少了与 $R(s)$ 和 $I(s)$ 的对称性有关的冗余，使得仅用 R' 方向的分量，或者除仅用 R 和 S 方向之外的任何方向，就可以恢复出实的 $f(x)$。

对表示复数据的函数 $f(x)$，则 S' 方向包含有附加信息，此时传统定义的哈特利变换将得到复的结果。Millane (1994) 给出了一种复哈特利变换的扩展处理方法。

哈特利变换的物理特性

从这种复平面的观点，可以得到物理空间中的哈特利变换结构(Bracewell, 1989)。第一个证明从一个实的电磁场分布中可以恢复相位信息的仪器利用了一个光学分光镜(Bracewell 等人, 1985; Bracewell, 1986; Villasenor 和 Bracewell, 1987; Villasenor, 1989) 和 Michelson 干涉仪。后来，通过替换合适的微波元件扩展了可用的波长范围(Villasenor 和 Bracewell, 1988)。

在哈特利平面上，相位信息包含在幅度信息中。事实上，只要器械调节合适，除了哈特利变换为负时相位变反，哈特利平面是等相位的。通过测量幅度或强度来获得电磁波相位信息具有很重要的技术意义，因为对紫外线和 X 射线，它们的相位很重要但很难测量。已经有人讨论过用 X 射线来实现，但由于技术上有困难，所以仍需要更进一步的研究。

快速哈特利变换

长度为 N 的实序列的离散哈特利变换(DHT) 也是一个长度为 N 的实序列。对变换后的序列再进行一次同样的变换即可恢复原序列。由于 DHT 不需要像傅里叶变换那样处理实部和虚部(傅里叶变换或者用分开的两个数组，或者在一个两倍长的数组中交叉存取，或者用各种傅里叶变换实现中采用的其它具有创造性的方法来处理实部和虚部)，所以人们考虑将其应用于数值谱分析以及卷积当中。DHT 无需考虑逆变换的不同，这也是很有帮助的。

对某些应用来说，DHT 是一个离散傅里叶变换(DFT) 的合适代替者。如果明确要求 DFT 的实部或虚部时，可以直接由 DHT 的奇部和偶部得到；如果要计算功率谱，可以直接从 DHT 求得，而不用像通常计算功率谱那样首先计算 DFT 的实部和虚部。

人们已经研究出一种计算 DHT 的快速算法，与快速傅里叶变换类似，我们称其为快速哈特利变换(FHT)。在 Bracewell (1986) 中解释哈特利变换时就有一段名为 FHTSUB 的子程

序。本章末尾提供了一段基为 4 的代码。为了提高其可读性，这里采用的是不带有任何特有风格的伪码，并能很方便地将其移植为任何通用的计算机语言。

除了以上优点外，FHT 在下面讨论的情况中也比复的 FFT 算法效率高。当仅处理实数据并且通过省略计算那些是其它系数复共轭的系数来节省时间时，存在一个与 FFT 相关的单向程序。然而，当输入实信号时，FFT 的输出为复信号；对复的输出求逆变换需要另一个适合接收复数据的单向程序，它通过不对虚部进行计算来节省时间。通过比较，FHT 是实数运算且是双向的，更简单且更优美。没有一种(FFT 的)快速单向程序能接受自己的输出。后来的研究参见 Guo 等的文献(1998)。

自 1984 年快速哈特利变换问世以来，通过与熟悉的傅里叶变换比较，有不少人曾对其速度、真实性及可逆性产生了怀疑。然而出现了数百篇文章(Olejniczak 和 Heydt, 1994)，制造出了芯片并应用于商业仪器，并且在实验室中用微波和可见光证明了哈特利变换的物理意义。有人批评哈特利变换不像傅里叶变换是一种自然的性质，因为复数是一种智力的结构，所以很难对这种批评进行辩护，然而工程应用回应了这个批评。很快这两种变换就被证明有着密切的联系，两者基本上完全等价。

现在回忆对实函数 $f(\tau)$，$\tau = 0,1,\cdots,N-1$，其离散哈特利变换 $H(\nu)$ 定义为：

$$H(\nu) = N^{-1}\sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau)\operatorname{cas}\left(\frac{2\pi\nu\tau}{N}\right), \quad \nu = 0,\ 1,\ \cdots,N-1。$$

反变换为

$$f(\tau) = \sum_{\tau=0}^{N-1} H(\nu)\operatorname{cas}\left(\frac{2\pi\nu\tau}{N}\right), \quad \tau = 0,\ 1,\ \cdots,N-1。$$

整数 τ 可以看作时间的助记符，而 ν/N，其中 $\nu \leqslant N/2$，表示用单位时间周期数度量的频率。

快速算法

如果按照定义计算 DHT，则运算时间同 DFT 相同，它们对长度为 N 的数据序列都需要与 N^2 成正比的时间。这是由于每计算一个 ν，要进行 N 次乘法运算 $f(\tau)\operatorname{cas}(2\pi\nu\tau/N)$，总共要计算 N 个 ν 的值。令 N 取 2 的 P 次方，即 $N = 2^P$，则同 FFT 一样，运算次数将被减为 $N\log_2 N$ 或 NP 阶。

图 12.4 的流程图给出了 $N = 8$，$P = 3$ 时的一种处理过程。标记为“置换”的操作对数据序列进行重排，后面有一节将更深入地讨论置换操作。第 i 个数被放在第 j 个位置，其中 j 可以通过下面的运算从 i 中得到：

```
R = 1
J = 0
FOR K = 1 TO P
    S = R DIV 2
    J = J + J + R - S - S
    R = S
NEXT K
```

置换的目的同 FFT 一样，即逐步把数据分为两半直到最后得到数据对。由定义，当 $N=2$ 时，

$$\{a \quad b\} \overset{\text{DHT}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\{a+b \quad a-b\}$$

这很简单。要对所有的两元变换进行叠加，需要一个分解公式，它可以用两个半长序列的 DHT 表示给定序列的 DHT。例如，这个公式可以用两个交替的两元序列$\{a_1 \quad b_1\}$和$\{a_2 \quad b_2\}$的 DHT 表示一个四元序列$\{a_1 \quad a_2 \quad b_1 \quad b_2\}$的 DHT 变换。为了推导分解公式，我们需要两个定理：移位定理和相似性定理。移位定理表述为，如果 $f(\tau)$ 的离散哈特利变换为 $H(\nu)$，则

$$f(\tau+a) \overset{\text{DHT}}{\longleftrightarrow} H(\nu)\cos\left(\frac{2\pi a\nu}{N}\right) - H(N-\nu)\sin\left(\frac{2\pi a\nu}{N}\right)。$$

DHT 的相似性定理与 DFT 的相同，可以表述为如果一个序列 $f(\tau)$ 通过在每一元素后插入零元素使其长度扩展到原来的两倍，那么原 DHT 的元素将被重复一次。例如，

$$\{1\ 2\ 3\ 4\} \overset{\text{DHT}}{\longleftrightarrow} \{2.5 \quad -1 \quad -0.5 \quad 0\},$$

$$\{1\ 0\ 2\ 0\ 3\ 0\ 4\ 0\} \overset{\text{DHT}}{\longleftrightarrow} \{2.5 \quad -1 \quad -0.5 \quad 0 \quad 2.5 \quad -1 \quad -0.5 \quad 0\}。$$

这两个定理都可以通过 DHT 的定义进行证明。假设，$\{a_1\ a_2\ b_1\ b_2\ c_1\ c_2\ \cdots\}$ 的 DHT 变换为 $H(\nu)$，其中序列及其变换都有 N 个元素。且 a_1 序列$\{a_1\ b_2\ c_1\ \cdots\}$的 DHT 变换为$\{\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ \cdots\}$，$a_2$ 序列$\{a_2\ b_2\ c_2\ \cdots\}$的 DHT 变换为$\{\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2\ \cdots\}$。我们有：

$$\begin{aligned}
H(\nu) &= \text{DHT}[\{a_1\ 0\ b_1\ 0\ c_1\ 0\ \cdots\}] + \text{DHT}[\{0\ a_2\ 0\ b_2\ 0\ c_2\ \cdots\}] \\
&= \{\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ \cdots\ \alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ \cdots\} + \text{DHT}[\{0\ 1\}] * \{a_2\ b_2\ c_2\ \cdots\} \\
&= \{\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ \cdots\ \alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ \cdots\} + \left\{\alpha_2\ \beta_2\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)\ \gamma_2\cos\left(\frac{2\pi\cdot 2}{N}\right)\cdots\right. \\
&\quad \left. -\alpha_2\ \beta_2\cos\left[\frac{2\pi(N/2+1)}{N}\right]\ \gamma_2\cos\left[\frac{2\pi(N/2+1)}{N}\right]\cdots\right\} \\
&\quad + \left\{0\ \cdots\ \gamma_2\sin\left[\frac{2\pi(N/2-2)}{N}\right]\ \beta_2\sin\left[\frac{2\pi(N/2-1)}{N}\right]\ 0\ \cdots\right. \\
&\quad \left.\gamma_2\sin\left[\frac{2\pi(N/2+2)}{N}\right]\ \beta_2\sin\left[\frac{2\pi(N/2+3)}{N}\right]\right\}。
\end{aligned}$$

则分解公式一般表示为

$$H(\nu) = H_{a_1}(\nu) + H_{a_2}(\nu)\cos\left(\frac{2\pi\nu}{N}\right) + H_{a_2}(N-\nu)\sin\left(\frac{2\pi\nu}{N}\right),$$

其中 $H_{a_1}(\nu)$ 和 $H_{a_2}(\nu)$ 分别表示$\frac{1}{2}\{\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ \cdots\ \alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ \cdots\}$和$\frac{1}{2}\{\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2\ \cdots\ \alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2\ \cdots\}$。在推导中，我们令移位性质中 $a=-1$。在图 12.4 左边紧接置换操作的前两次操作中，正弦、余弦因子的值只能取 0，1 和 -1。因此流程图用两种线形来表示：实线表示保持原值不变，虚线对原值取反。在稍后的步骤中，有三分之二的流程线与正弦和余弦因子有关，当然，这些因子大多仍然取 0，1 和 -1。对 $N=16$ 的情况，表 12.1 总结了用流程图表示的等式，表中与分级有关的缩写 C_n

和 S_n 分别表示 $\frac{\cos}{\sin}(2\pi n/2^L)$，其中 L 为所在阶段的级数。表 12.2 显示了当用特殊值 0，1，-1 和 $r=2^{-1/2}$ 代替 C_n 和 S_n 时，等式是如何被简化的。在算法的最后几步，(图12.4) 所有连接的三分之一是交叉连接。包含这些连接的方框用来完成移位定理中的 $H(N-\nu)$ 所要求的符号取反（当 $\nu=0$ 时，$H(N)$ 将被赋值为 $H(0)$）。

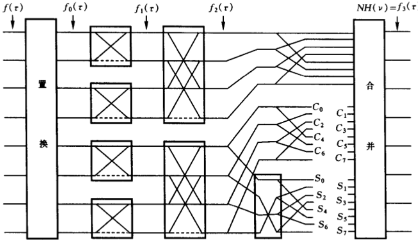


图 12.4　离散哈特利变换流程图($N=8$，$P=3$)；虚线代表传输系数为 -1，实线代表传输系数为 1。交叉的方框完成移位定理所要求的符号变反功能

表 12.3 的一个例子说明了有关的步骤。正如所看到的那样，对 $N=8$ 的情况，可以很容易地通过手算进行。为了说明，令给定序列为 $f(\tau)=\{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\}$。需要进行 $P-1$ 步的置换操作。第一步将数据分为两个四元序列{1 3 5 7 } 和{2 4 6 8}，见图 12.4 第三列，列首为 π。第二步将每个四元序列再分成两个两元序列，分别为{1 5}，{3 7}，{2 6} 和{4 8}。当 $P=3$ 时，第二步也就是置换的最后一步。

重排后的序列 $f_0(\tau)$ 为{1 5 3 7 2 6 4 8}。对每个两元序列{$a\ b$} 进行变换，这样{1 5} 将变为 $\frac{1}{2}\{6-4\}$，但我们可以把因子 $\frac{1}{2}$ 放到最后进行处理。将这些简单的二元变换连接起来得到第一次变换的结果 $f_1(\tau)=\{6\ -4\ 10\ -4\ 8\ -4\ 12\ -4\}$。由于表 12.1 所呈现的简化性，$f_2(\tau)$ 的计算也非常简单。如此 $16=6+10$，$-8=-4-4$，$-4=6-10$，$0=-4+4$ 等等。为了便于前后对照，表 12.3 中绘出了图 12.4 中的部分流程线。在最后一步中，$f_3(\tau)$ 的计算涉及圆周八等分($\pi/4*n$) 的正弦和余弦的计算。在"合并"操作中，输入为三组八元序列组成，输出为一个八元序列。其中，输出的第一个元素是三个输入组第一个元素的和，其它输出元素也与此类似。

表 12.1 FHT 分步计算公式

数据	序列重排	第一步	第二步	第三步	16×DHT
$F(0,0)$	$F(0,0) = F(0,0)$	$F(1,0) = F(0,0) + F(0,1)$	$F(2,0) = F(1,0) + F(1,2)C_0 + F(1,2)S_0$	$F(3,0) = F(2,0) + F(2,4)C_0 + F(2,4)S_0$	$F(4,0) = F(3,0) + F(3,8)C_0 + F(3,8)S_0$
$F(0,1)$	$F(0,1) = F(0,8)$	$F(1,1) = F(0,0) - F(0,1)$	$F(2,1) = F(1,1) + F(1,3)C_1 + F(1,3)S_1$	$F(3,1) = F(2,1) + F(2,5)C_1 + F(2,7)S_1$	$F(4,1) = F(3,1) + F(3,9)C_1 + F(3,15)S_1$
$F(0,2)$	$F(0,2) = F(0,4)$	$F(1,2) = F(0,2) + F(0,3)$	$F(2,2) = F(1,0) + F(1,2)C_2 + F(1,2)S_2$	$F(3,2) = F(2,2) + F(2,6)C_2 + F(2,6)S_2$	$F(4,2) = F(3,2) + F(3,10)C_2 + F(3,14)S_2$
$F(0,3)$	$F(0,3) = F(0,12)$	$F(1,3) = F(0,2) - F(0,3)$	$F(2,3) = F(1,1) + F(1,3)C_3 + F(1,3)S_3$	$F(3,3) = F(2,3) + F(2,7)C_3 + F(2,5)S_3$	$F(4,3) = F(3,3) + F(3,11)C_3 + F(3,13)S_3$
$F(0,4)$	$F(0,4) = F(0,2)$	$F(1,4) = F(0,4) + F(0,5)$	$F(2,4) = F(1,4) + F(1,6)C_0 + F(1,6)S_0$	$F(3,4) = F(2,0) + F(2,4)C_4 + F(2,4)S_4$	$F(4,4) = F(3,4) + F(3,12)C_4 + F(3,12)S_4$
$F(0,5)$	$F(0,5) = F(0,10)$	$F(1,5) = F(0,4) - F(0,5)$	$F(2,5) = F(1,5) + F(1,7)C_1 + F(1,7)S_1$	$F(3,5) = F(2,1) + F(2,5)C_5 + F(2,7)S_5$	$F(4,5) = F(3,5) + F(3,13)C_5 + F(3,11)S_5$
$F(0,6)$	$F(0,6) = F(0,6)$	$F(1,6) = F(0,6) + F(0,7)$	$F(2,6) = F(1,4) + F(1,6)C_2 + F(1,6)S_2$	$F(3,6) = F(2,2) + F(2,6)C_6 + F(2,6)S_6$	$F(4,6) = F(3,6) + F(3,14)C_6 + F(3,10)S_6$
$F(0,7)$	$F(0,7) = F(0,14)$	$F(1,7) = F(0,6) - F(0,7)$	$F(2,7) = F(1,5) + F(1,7)C_3 + F(1,7)S_3$	$F(3,7) = F(2,3) + F(2,7)C_7 + F(2,5)S_7$	$F(4,7) = F(3,7) + F(3,15)C_7 + F(3,9)S_7$
$F(0,8)$	$F(0,8) = F(0,1)$	$F(1,8) = F(0,8) + F(0,9)$	$F(2,8) = F(1,8) + F(1,10)C_0 + F(1,10)S_0$	$F(3,8) = F(2,8) + F(2,12)C_0 + F(2,12)S_0$	$F(4,8) = F(3,0) + F(3,8)C_8 + F(3,8)S_8$
$F(0,9)$	$F(0,9) = F(0,9)$	$F(1,9) = F(0,8) - F(0,9)$	$F(2,9) = F(1,9) + F(1,11)C_1 + F(1,11)S_1$	$F(3,9) = F(2,9) + F(2,13)C_1 + F(2,15)S_1$	$F(4,9) = F(3,1) + F(3,9)C_9 + F(3,15)S_9$
$F(0,10)$	$F(0,10) = F(0,5)$	$F(1,10) = F(0,10) + F(0,11)$	$F(2,10) = F(1,8) + F(1,10)C_2 + F(1,10)S_2$	$F(3,10) = F(2,10) + F(2,14)C_2 + F(2,14)S_2$	$F(4,10) = F(3,2) + F(3,10)C_{10} + F(3,14)S_{10}$
$F(0,11)$	$F(0,11) = F(0,13)$	$F(1,11) = F(0,10) - F(0,11)$	$F(2,11) = F(1,9) + F(1,11)C_3 + F(1,11)S_3$	$F(3,11) = F(2,11) + F(2,15)C_3 + F(2,13)S_3$	$F(4,11) = F(3,3) + F(3,11)C_{11} + F(3,13)S_{11}$
$F(0,12)$	$F(0,12) = F(0,3)$	$F(1,12) = F(0,12) + F(0,13)$	$F(2,12) = F(1,12) + F(1,14)C_0 + F(1,14)S_0$	$F(3,12) = F(2,8) + F(2,12)C_4 + F(2,12)S_4$	$F(4,12) = F(3,4) + F(3,12)C_{12} + F(3,12)S_{12}$
$F(0,13)$	$F(0,13) = F(0,11)$	$F(1,13) = F(0,12) - F(0,13)$	$F(2,13) = F(1,13) + F(1,15)C_1 + F(1,15)S_1$	$F(3,13) = F(2,9) + F(2,13)C_5 + F(2,15)S_5$	$F(4,13) = F(3,5) + F(3,13)C_{13} + F(3,11)S_{13}$
$F(0,14)$	$F(0,14) = F(0,7)$	$F(1,14) = F(0,14) + F(0,15)$	$F(2,14) = F(1,12) + F(1,14)C_2 - F(1,14)S_2$	$F(3,14) = F(2,10) + F(2,14)C_6 + F(2,14)S_6$	$F(4,14) = F(3,6) + F(3,14)C_{14} + F(3,10)S_{14}$
$F(0,15)$	$F(0,15) = F(0,15)$	$F(1,15) = F(0,14) - F(0,15)$	$F(2,15) = F(1,13) + F(1,15)C_3 + F(1,15)S_3$	$F(3,15) = F(2,11) + F(2,15)C_7 + F(2,13)S_7$	$F(4,15) = F(3,7) + F(3,15)C_{15} + F(3,9)S_{15}$

表 12.2　正、余弦因子由 0,1 和取代后的简化 FHT 分步计算公式

数据	序列重排	第一步	第二步	第三步
$F(0,0)$	$F(0,0) = F(0,0)$	$F(1,0) = F(0,0) + F(0,1)$	$F(2,0) = F(1,0) + F(1,2)$	$F(3,0) = F(2,0) + F(2,4)$
$F(0,1)$	$F(0,1) = F(0,8)$	$F(1,1) = F(0,0) - F(0,1)$	$F(2,1) = F(1,1) + F(1,3)$	$F(3,1) = F(2,1) + rF(2,5) + rF(2,7)$
$F(0,2)$	$F(0,2) = F(0,4)$	$F(1,2) = F(0,2) + F(0,3)$	$F(2,2) = F(1,0) - F(1,2)$	$F(3,2) = F(2,2) + F(2,6)$
$F(0,3)$	$F(0,3) = F(0,12)$	$F(1,3) = F(0,2) - F(0,3)$	$F(2,3) = F(1,1) - F(1,3)$	$F(3,3) = F(2,3) - rF(2,7) + rF(2,5)$
$F(0,4)$	$F(0,4) = F(0,2)$	$F(1,4) = F(0,4) + F(0,5)$	$F(2,4) = F(1,4) + F(1,6)$	$F(3,4) = F(2,0) - F(2,4)$
$F(0,5)$	$F(0,5) = F(0,10)$	$F(1,5) = F(0,4) - F(0,5)$	$F(2,5) = F(1,5) + F(1,7)$	$F(3,5) = F(2,1) - rF(2,5) - rF(2,7)$
$F(0,6)$	$F(0,6) = F(0,6)$	$F(1,6) = F(0,6) + F(0,7)$	$F(2,6) = F(1,4) - F(1,6)$	$F(3,6) = F(2,2) - F(2,6)$
$F(0,7)$	$F(0,7) = F(0,14)$	$F(1,7) = F(0,6) - F(0,7)$	$F(2,7) = F(1,5) - F(1,7)$	$F(3,7) = F(2,3) + rF(2,7) - rF(2,5)$
$F(0,8)$	$F(0,8) = F(0,1)$	$F(1,8) = F(0,8) + F(0,9)$	$F(2,8) = F(1,8) + F(1,10)$	$F(3,8) = F(2,8) + F(2,12)$
$F(0,9)$	$F(0,9) = F(0,9)$	$F(1,9) = F(0,8) - F(0,9)$	$F(2,9) = F(1,9) + F(1,11)$	$F(3,9) = F(2,9) + rF(2,13) + rF(2,15)$
$F(0,10)$	$F(0,10) = F(0,5)$	$F(1,10) = F(0,10) + F(0,11)$	$F(2,10) = F(1,8) - F(1,10)$	$F(3,10) = F(2,10) + F(2,14)$
$F(0,11)$	$F(0,11) = F(0,13)$	$F(1,11) = F(0,10) - F(0,11)$	$F(2,11) = F(1,9) - F(1,11)$	$F(3,11) = F(2,11) - rF(2,15) + rF(2,13)$
$F(0,12)$	$F(0,12) = F(0,3)$	$F(1,12) = F(0,12) + F(0,13)$	$F(2,12) = F(1,12) + F(1,14)$	$F(3,12) = F(2,8) - F(2,12)$
$F(0,13)$	$F(0,13) = F(0,11)$	$F(1,13) = F(0,12) - F(0,13)$	$F(2,13) = F(1,13) + F(1,15)$	$F(3,13) = F(2,9) - rF(2,13) + rF(2,15)$
$F(0,14)$	$F(0,14) = F(0,7)$	$F(1,14) = F(0,14) + F(0,15)$	$F(2,14) = F(1,12) - F(1,14)$	$F(3,14) = F(2,10) - F(2,14)$
$F(0,15)$	$F(0,15) = F(0,15)$	$F(1,15) = F(0,14) - F(0,15)$	$F(2,15) = F(1,13) - F(1,15)$	$F(3,15) = F(2,11) + rF(2,15) - rF(2,13)$

表 12.3　$N=8$, $P=3$ 时 FHT 计算示例

τ	$f(\tau)$	π	$f_0(\tau)$	$f_1(\tau)$	$f_2(\tau)$	$f_3(\tau)$	$H(\nu)$	ν
0	1	1	1	6	16	36	4.5	0
1	2	3	5	−4	−8	−13.6	−1.7	1
2	3	5	3	10	−4	−8	−1	2
3	4	7	7	−4	0	−5.6	−0.7	3
4	5	2	2	8	20	−4	−0.5	4
5	6	4	6	−4	−8	−2.4	−0.3	5
6	7	6	4	12	−4	0	0	6
7	8	8	8	−4	0	5.6	0.7	7

由于在运算过程中省略了 P 次 $\frac{1}{2}$ 因子，所以结果需要除以 8，这样得到

$$\{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\} \overset{\text{DHT}}{\longleftrightarrow} \{4.5\ \ -1.7\ \ -1\ \ -0.7\ \ -0.5\ \ -0.3\ \ 0\ \ 0.7\}。$$

作为检验，我们注意到数据的和等于 DHT 变换后第一个元素的 8 倍。Hou (1987) 设计了另一种方便用 VLSI 实现的流程图。

如果还想继续以得到 DFT $R(\nu)+\mathrm{j}X(\nu)$，我们还需进行如下运算。DFT 的实部 $R(\nu)$ 等于 DHT 的偶部，DFT 的虚部 $X(\nu)$ 等于负的 DHT 的奇部。若要进一步求功率谱 $Z^2=R^2+X^2$，我们不必用复数量 $R+\mathrm{j}X$ 计算，可以直接由下式得到

$$Z^2=\frac{[H(\nu)]^2+[H(-\nu)]^2}{2}。$$

运行时间

现在我们来关注 FHT 和 FFT 在运行速度上的比较。运行时间的比与好几个因素有关，其中包括所用的编程语言及硬件设施等因素；下面的结论是在 HP－85 个人电脑（它可以提供可重复的运行时间）上得到的经验。为了对结果进行归一化，我们引入如下的品质因数 Υ。FFT 的核心运算是一个复数乘法，它可以用 4 个实数乘法实现，虽然 Buneman (1973) 发明了一种只用三个乘法的聪明的方法。可以用下面的随机但明确的命令确定 4 次实数乘法运算所需要的时间 T_4：

```
A = RND; B = RND; C = RND; D = RND
TO = TIME
FOR I = 1 TO 1000; R = A * C - B * D; X = B * C + A * D; NEXT I
T4 = (TIME - TO)/1000; PRINT T4; END
```

那么，对一个长为 $N=2^P$ 的序列进行 FHT 所需要的时间可以表示为

$$T_{\text{FHT}}=\Upsilon NPT_4。$$

为了更规范地比较，我把一段有名的快速傅里叶变换程序移植到我的计算机上（参见后面的章节）。当 $1<P<11$ 时，Υ 的范围是 3.1～5.8。如果用快速哈特利变换求傅里叶变换，Υ

近似为 1.3。要和其它的程序进行比较，需要在同一台机器上且使用相同的编程语言（包括汇编语言）进行实验。编程风格不同也会导致实验结果不一致，故必须统一编程风格。一个有趣的事实是，Υ 的值和序列长度 N 有关，这不仅仅是由内部循环次数的增加而导致的，下面将分析这个问题。

通过条纹图记时

使用下面给出的程序来研究运行时间与序列长度 N 的关系。为了使程序尽可能清楚，采用了一些简化。例如，给每一个连续的阶段分配一个单独的数组 $F(L,I)$，其中 L 是级数或段数，I 的范围从 $0 \sim N-1$。在迄今为止所用的符号中 $F(L,I) \equiv f_L(I)$。不过，$F(0,I)$ 首先用于数据序列 $f(\tau)$ 然后又用于置换序列 $f_0(\tau)$。第一和第二阶段可以直接通过表 12.2 的短等式计算，不需要求助于正弦和余弦函数。接下来是一个迭代循环，当每一步计算完成时跳回循环的开始处。

通过改变 N 的值，可以观察 Υ 在图 12.5 的"条纹图"中的变化情况。图中有三种情况需要注意。首先，系统存在一些与 N 关系不大的额外开销，当纵坐标用 NP 归一化时，这些额外开销将迅速地趋近于零；第二，有一些预处理操作，比如需要预先计算一个周期内 $1/N$ 的整数倍处的正弦、余弦值，它所需要的时间与 N 成正比（最好是预先计算这些因子，否则它们需要重复计算很多次）。因此，在除以 NP 以后，预先计算量对运行时间的贡献以 P^{-1} 逐渐趋于零，就像图中标有"C&S"条纹的垂直厚度减小一样。第二个例子是第三步操作对运行时间的影响：随着 N 的增大，第三步操作所需要的时间与 N 成正比。因此，图中标有"3"的线也以 P^{-1} 的速度衰减。但是，这种条纹的数量随着 P 的增大而增大。加粗实线内的区域保持近似恒定的垂直厚度。

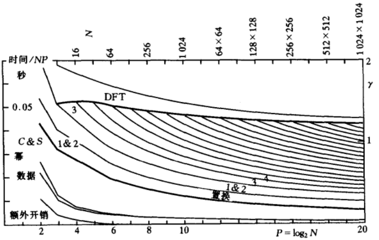


图 12.5　条纹图显示了下面的 FHT 程序的品质因数 Υ 随 P 的变化情况（上面的粗线）以及额外开销，插值，2 的幂、正弦、余弦的预计算，置换和各种有限步骤的贡献。最上面条纹为计算离散傅里叶变换的实部和虚部时所需的额外时间。左边的纵坐标为运行时间除以 NP，它对作者的个人计算机来说是精确的。

第三个需要注意的是序列置换的贡献。序列置换需要对 N 个数据重排，且要重复 P 次，因此，所用的时间正比于 NP，所有表示置换的条纹不会衰减到零。因此，任何改进置换操作的努力都是有意义的。简单地用 $0.5*J$ 代替 $J/2$，或者用 $J+J$ 代替 $2*J$ 最终都会有明显的改善。

我们合并了算法的第一步和第二步以达到条纹图的目的（计时）。显然，标有"1&2"的条纹和标有"3"的条纹几乎具有同样的宽度。第一步和第二步是用相似的公式计算的，而第三步具有可以用计时来量化的速度损失并比较显著。这就是使用表 12.2 中的短等式的正当理由。进一步地延迟迭代可以获得更大的（但逐渐缩小的）增益。

如果最后一步采用 DFT 变换，就要在上面加上一个最终可以忽略的第二种情况下的窄衰减带。

条纹图中用粗线显示的区域是非衰减的区域，其厚度为 0.038s。这意味着，当 P 趋于无穷大时，运行时间将趋近于 $0.038NP$。在 $P=10$ 附近，运行时间大约比这个时间要多三分之一。通过特殊的窍门，我们希望能减小这三分之一的时间。其最宽的分量来自于为内嵌正弦和余弦函数所做的预建表的操作，事实上，通过 Buneman(1986) 提出的算法可以减小这部分时间，否则，如他所说，就需要重复运行或者引入专用的硬件来完全消除它。这种方法忽略了额外开销和预先计算 2 的幂次的时间，还忽略了读取和加载数据的时间，置换操作也尽可能接近理想的极限。

矩阵公式

把表 12.1 中的等式用矩阵表示，可以得到另外的一种简明的哈特利变换形式。即：

$$\boldsymbol{H} = N^{-1}\boldsymbol{L}_4\boldsymbol{L}_3\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{P}\boldsymbol{f},$$

其中 N 元的列矩阵 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 分别表示数据 $f(\tau)$ 及其哈特利变换 $H(\nu)$，$\boldsymbol{P}$ 为置换矩阵，$\boldsymbol{L}_i$ 为矩阵算子，它把操作数列矩阵转换为第 i 级的列矩阵。本例中，$N=16$，$\boldsymbol{P}=4$，i 从 $1\sim4$。同样，后面的转换成离散傅里叶变换 $F(\nu)$ 的步骤也可以用（复）矩阵乘法来表示：

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{H}。$$

合并上面的方程，我们可以得到离散傅里叶变换的一种新的表示：

$$\boldsymbol{F} = N^{-1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{L}_P\boldsymbol{L}_{P-1}\cdots\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{P}\boldsymbol{f}。$$

矩阵算子 $N^{-1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{L}_P\boldsymbol{L}_{P-1}\cdots\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{P}\boldsymbol{f}$ 是 DFT 矩阵算子 $\boldsymbol{W}$ 的一种新的因式分解形式，其中，$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{W}\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{W}=\exp(-\mathrm{i}2\pi/N)$ 且

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & & \\ 1 & W & W^2 & & & \\ 1 & W^2 & W^4 & & & \\ & & & & & \\ & & & W^{(N-3)^2} & W^{(N-3)(N-2)} & W^{(N-1)(N-3)} \\ & & & W^{(N-2)(N-3)} & W^{(N-2)^2} & W^{(N-2)(N-1)} \\ & & & W^{(N-1)(N-3)} & W^{(N-1)(N-2)} & W^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

由表 12.1 可以直接得到各个因子如下：

$$
P=\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
1&&& & &&& & &&& & &&& \\
&&& & 1&&& & &&& & &&& \\
&&& & &&& & 1&&& & &&& \\
&&& & &&& & &&& & 1&&& \\
\hline
&&1& & &&& & &&& & &&& \\
&&& & &&1& & &&& & &&& \\
&&& & &&& & &&1& & &&& \\
&&& & &&& & &&& & &&1& \\
\hline
&1&& & &&& & &&& & &&& \\
&&& & &1&& & &&& & &&& \\
&&& & &&& & &1&& & &&& \\
&&& & &&& & &&& & &1&& \\
\hline
&&&1 & &&& & &&& & &&& \\
&&& & &&&1 & &&& & &&& \\
&&& & &&& & &&&1 & &&& \\
&&& & &&& & &&& & &&&1
\end{array}\right]
$$

$$
L_1=\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
1&1&& & &&& & &&& & &&& \\
1&-1&& & &&& & &&& & &&& \\
&&1&1 & &&& & &&& & &&& \\
&&1&-1 & &&& & &&& & &&& \\
\hline
&&& & 1&1&& & &&& & &&& \\
&&& & 1&-1&& & &&& & &&& \\
&&& & &&1&1 & &&& & &&& \\
&&& & &&1&-1 & &&& & &&& \\
\hline
&&& & &&& & 1&1&& & &&& \\
&&& & &&& & 1&-1&& & &&& \\
&&& & &&& & &&1&1 & &&& \\
&&& & &&& & &&1&-1 & &&& \\
\hline
&&& & &&& & &&& & 1&1&& \\
&&& & &&& & &&& & 1&-1&& \\
&&& & &&& & &&& & &&1&1 \\
&&& & &&& & &&& & &&1&-1
\end{array}\right]
$$

$$
L_2=\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
1&&1& & &&& & &&& & &&& \\
&1&&1 & &&& & &&& & &&& \\
1&&-1& & &&& & &&& & &&& \\
&1&&-1 & &&& & &&& & &&& \\
\hline
&&& & 1&&1& & &&& & &&& \\
&&& & &1&&1 & &&& & &&& \\
&&& & 1&&-1& & &&& & &&& \\
&&& & &1&&-1 & &&& & &&& \\
\hline
&&& & &&& & 1&&1& & &&& \\
&&& & &&& & &1&&1 & &&& \\
&&& & &&& & 1&&-1& & &&& \\
&&& & &&& & &1&&-1 & &&& \\
\hline
&&& & &&& & &&& & 1&&1& \\
&&& & &&& & &&& & &1&&1 \\
&&& & &&& & &&& & 1&&-1& \\
&&& & &&& & &&& & &1&&-1
\end{array}\right]
$$

在上述公式中，C_n 和 S_n 分别为与级数有关的 $\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(2\pi n/2^L)$ 的缩写形式，且 $K_n = C_n + S_n$。

矩阵表示法提供了一种观察快速哈特利变换的不同方法。例如，L_4 中 45° 方向上的元素为

$$L_3=\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
1&&& & C_0&&& & &&& & &&& \\
&1&& & &C_1&&S_1 & &&& & &&& \\
&&1& & &&K_2& & &&& & &&& \\
&&&1 & &S_3&&C_3 & &&& & &&& \\
\hline
1&&& & C_4&&& & &&& & &&& \\
&1&& & &C_5&&S_5 & &&& & &&& \\
&&1& & &&K_6& & &&& & &&& \\
&&&1 & &S_7&&C_7 & &&& & &&& \\
\hline
&&& & &&& & 1&&& & C_0&&& \\
&&& & &&& & &1&& & &C_1&&S_1 \\
&&& & &&& & &&1& & &&K_2& \\
&&& & &&& & &&&1 & &S_3&&C_3 \\
\hline
&&& & &&& & 1&&& & C_4&&& \\
&&& & &&& & &1&& & &C_5&&S_5 \\
&&& & &&& & &&1& & &&K_6& \\
&&& & &&& & &&&1 & &S_7&&C_7
\end{array}\right]$$

$$L_4=\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
1&&& & &&& & C_0&&& & &&& \\
&1&& & &&& & &C_1&& & &&&S_1 \\
&&1& & &&& & &&C_2& & &&S_2& \\
&&&1 & &&& & &&&C_3 & &S_3&& \\
\hline
&&& & 1&&& & &&& & K_4&&& \\
&&& & &1&& & &&&S_5 & &C_5&& \\
&&& & &&1& & &&S_6& & &&C_6& \\
&&& & &&&1 & &S_7&& & &&&C_7 \\
\hline
1&&& & &&& & K_8&&& & &&& \\
&1&& & &&& & &C_9&& & &&&S_9 \\
&&1& & &&& & &&C_{10}& & &&S_{10}& \\
&&&1 & &&& & &&&C_{11} & &S_{11}&& \\
\hline
&&& & 1&&& & &&& & K_{12}&&& \\
&&& & &1&& & &&&S_{13} & &C_{13}&& \\
&&& & &&1& & &&S_{14}& & &&C_{14}& \\
&&& & &&&1 & &S_{15}&& & &&&C_{15}
\end{array}\right]$$

$$2\boldsymbol{\Phi}=\left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
2&&& & &&& & &&& & &&& \\
&1-i&& & &&& & &&& & &&&1+i \\
&&1-i& & &&& & &&& & &&1+i& \\
&&&1-i & &&& & &&& & &1+i&& \\
&&& & 1-i&&& & &&& & 1+i&&& \\
&&& & &1-i&& & &&&1+i & &&& \\
&&& & &&1-i& & &&1+i& & &&& \\
&&& & &&&1-i & &1+i&& & &&& \\
&&& & &&& & 2&&& & &&& \\
&&& & &&&1+i & &1-i&& & &&& \\
&&& & &&1+i& & &&1-i& & &&& \\
&&& & &1+i&& & &&&1-i & &&& \\
&&& & 1+i&&& & &&& & 1-i&&& \\
&&&1+i & &&& & &&& & &1-i&& \\
&&1+i& & &&& & &&& & &&1-i& \\
&1+i&& & &&& & &&& & &&&1-i
\end{array}\right]$$

下标反向的正弦因子。$\boldsymbol{L}_1$ 和 $\boldsymbol{L}_2$ 根本没有这样的元素。我们还注意到，$\boldsymbol{L}_1$ 和 $\boldsymbol{L}_2$ 只有 $2N$ 个非零元素，而更高层的因子在极限情况下具有 $3N$ 个非零元素。考虑到存取三角函数值的时间，我们就可以完全理解图 12.2 的经验计时结果。

卷积

在大量的图像处理应用中，进行卷积的两个函数中有一个是对称的。因为可以将图像信号连续地延展为一维信号（就像电视波形那样），使得对一个图形的二维卷积可以简化为一维的卷积，所以这里用一维的情况讨论足够了。一个无特殊对称的函数 $f_1(\tau)$ 与一个偶对称的函数 $f_2(\tau)$ 卷积，DHT 的卷积定理可以表述为

$$f_1(\tau) * f_2(\tau) \xleftrightarrow{\text{DHT}} H_1(\nu)H_2(\nu)。$$

也就是说，这种形式的卷积的 DHT 是两个函数各自的哈特利变换的乘积。因此，在进行卷积时，我们分别求两个函数的 DHT，再把它们逐项相乘，然后再取 DHT。这一过程比先取两个函数的 DFT，再进行复数相乘，最后再取逆的过程更好，因为一个复数乘法 $(a+\mathrm{j}b)(a+\mathrm{j}d)=ac-bd+\mathrm{j}(ad+bc)$ 需要四次实数乘法。

对 $f_2(\tau)$ 非对称的一般情况，卷积定理还有一项。令 $H_2(\nu)=H_{2e}(\nu)+H_{2o}(\nu)$，其中 $H_{2e}(\nu)$ 和 $H_{2o}(\nu)$ 分别为 $H_2(\nu)$ 的偶部和奇部。（若 $f_2(\tau)$ 是偶对称的，则 $H_2(\nu)$ 的奇部 $H_{2o}(\nu)$ 为零。）一般的卷积定理如下：

$$f_1(\tau) * f_2(\tau) \xleftrightarrow{\text{DHT}} H_1(\nu)H_{2e}(\nu)+H_1(-\nu)H_{2o}(\nu)。$$

从 DFT 的卷积定理可以立即推出这个定理。

如果用变换的方法进行卷积，那么置换阶段所用的时间就可以忽略，这是因为两个因子在变换域中的失序是一致的。如果采用下一节的快速置换而不是显式对位取反，这种加速（不用置换）就减小了。对使用内置（built-in）变换或基于变换的卷积子程序的用户，他们更看重方便而不是效率，这种改进没有多少实际意义。

当 $f_1()$ 与 $f_2()$ 的长度不相等但可比较时，为了用变换进行卷积，可以对其中的短序列补零。然而，在对冗长的数据 $f_1()$ 进行数字滤波时，滤波器序列 $f_2()$ 通常比数据序列短很多，在这种情况下，推荐用计算机直接进行卷积（参见第 3 章）。

置换

给定一个八元序列 $f(i)$，下标 i 取 0，…，7。经置换操作重排后顺序为 $f(0)$，$f(4)$，$f(2)$，$f(6)$，$f(1)$，$f(5)$，$f(3)$，$f(7)$。将参数 i 写为二进制形式 i_b，我们可以看出对 i_b 反向（第三行）再换成十进制形式即为置换下标 j。

i	0	1	2	3	4	5	6	7
i_b	000	001	010	011	100	101	110	111
	000	100	010	110	001	101	011	111
j	0	4	2	6	1	5	3	7

Press 等（1990）很好地描述了这一步是如何实现的。置换，也称为位取反、扰乱，或者混组，一般是通过重复地除以 2 取整来实现，然而回顾过去，这种对二进制序列的反向排列在实际中显得“很自然”。对傅里叶变换来说，置换操作占用了执行时间的一大部分，如图 12.6 的经典时间测定图。在上述例子中，一半的下标，即 0，2，5，和 7，在置换后位置保持不变，这是因

表 12.4 快速哈特利变换的伪码程序段(N 为 4 的整数次方)

```
FAST HARTLEY TRANSFORM TO RADIX 4
SUB "FHTradix4" (F(),P)
N = 4^P
N4 = N/4
R = SQR(2)
        Permute  to  radix  4
J = 1
I = 0
a: I = I + 1
IF I >= J  THEN  GOTO  b
T = F(J - 1)
F(J - 1) = F(I - 1)
F(I - 1) = T
b: K = N4
c: IF 3 * K >= J  THEN  GOTO  d
J = J - 3 * K
K = K/4
GOTO c
d: J = J + K
IF  I < N - 1  THEN  GOTO  a
              Get  DHT
              Stage  1
FOR I = 0  TO  N - 1  STEP  4
   T1 = F(I) + F(I + 1)
   T2 = F(I) - F(I + 1)
   T3 = F(I + 2) + F(I + 3)
   T4 = F(I + 2) - F(I + 3)
   F(I) = T1 + T3
   F(I + 1) = T1 - T3
   F(I + 2) = T2 + T4
   F(I + 3) = T2 - T4
NEXT I
              Stages  2  to  P
FOR L = 2 TO P
   E1 = 2^(L + L - 3)
   E2 = E1 + E1
   E3 = E2 + E1
   E4 = E3 + E1
   E5 = E4 + E1
   E6 = E5 + E1
   E7 = E6 + E1
   E8 = E7 + E1
   FOR J = 0 TO N - 1 STEP E8
      T1 = F(J) + F(J + E2)
      T2 = F(J) - F(J + E2)
      T3 = F(J + E4) + F(J + E6)
      T4 = F(J + E4) - F(J + E6)
      F(J) = T1 + T3
      F(J + E2) = T1 - T3
      F(J + E4) = T2 + T4
      F(J + E6) = T2 - T4
      T1 = F(J + E1)
      T2 = F(J + E3) * R
      T3 = F(J + E5)
      T4 = F(J + E7) * R
      F(J + E1) = T1 + T2 + T3
      F(J + E3) = T1 - T3 + T4
      F(J + E5) = T1 - T2 + T3
      F(J - E7) = T1 - T3 - T4
      FOR K = 1 TO E1 - 1
         L1 = J + K
         L2 = L1 + E2
         L3 = L1 + E4
         L4 = L1 + E6
         L5 = J + E2 - K
         L6 = L5 + E2
         L7 = L5 + E4
         L8 = L5 + E6
         A1 = PI * K/E4
         A2 = A1 + A1

         A3 = A1 + A2
         C1 = COS(A1)
         S1 = SIN(A1)
         C2 = COS(A2)
         S2 = SIN(A2)
         C3 = COS(A3)
         S3 = SIN(A3)
         T5 = F(L2) * C1 + F(L6) * S1
         T6 = F(L3) * C2 + F(L7) * S2
         T7 = F(L4) * C3 + F(L8) * S3
         T8 = F(L6) * C1 - F(L2) * S1
         T9 = F(L7) * C2 - F(L3) * S2
         T0 = F(L8) * C3 - F(L4) * S3
         T1 = F(L5) - T9
         T2 = F(L5) + T9
         T3 = - T8 - T0
         T4 = T5 - T7
         F(L5) = T1 + T4
         F(L6) = T2 + T3
         F(L7) = T1 - T4
         F(L8) = T2 - T3
         T1 = F(L1) + T6
         T2 = F(L1) - T6
         T3 = T8 - T0
         T4 = T5 + T7
         F(L1) = T1 + T4
         F(L2) = T2 + T3
         F(L3) = T1 - T4
         F(L4) = T2 - T3
      NEXT K
   NEXT J
NEXT L
SUBEND
```

为它们的二进制表示是对称的，通过观察可知，跳过它们可以节省许多时间。为了寻求进一步的简化，笔者绘制了 j 对 i 的散点图，而且发现所有的图分解为两种基本的单元(图 12.6)。

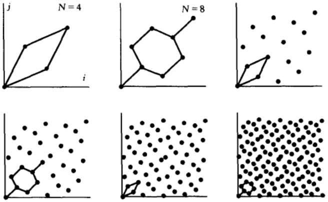


图 12.6 重排的散点图，$N = 4,8,16,\cdots$ 时的下标 j 对下标 i 的散点图，该图说明每一幅图都像一个由包含一个风筝($N = 4$)或包含一个青蛙($N = 8$)复制单元形成的晶体

第一种基本单元要求通过交换下标对，1⇌2 进行四元置换；而第二种基本单元涉及上面列表的八元的例子，它要求交换两对 1⇌4 和 3⇌6。在所有的单元上简单重复这些普通的交换，除移位外无需其它操作。如需程序参见 Bracewell (1986)，其它的研究方法的文章参见 Evans (1987) 和 Walker (1990)。

快速哈特利变换子程序

随着 CPU 速度的逐年提高，程序在速度上的小改善所带来的好处就减小了。但当效率比较重要时，可以推荐一种底数为 4 的算法，它可以将运行时间缩短 25% 左右。将数据长度限制为 4 的幂(16, 64, 256, 1 024, 4 096, …)，如果需要的话可以给数据补零。下列伪码出现在 Bracewell (1995) 中，并在美国物理学会的许可下出版。

通过把底数为 2 的算法与底数为 4 的算法结合的方法，可以获得速度的提高(Pei 和 Wu, 1986; Bracewell, 1987)。对很长的数据，人们考虑使用矢量哈特利变换的并行处理算法(Villasenor 和 Bracewell, 1989) 并且发现与相应的多处理器上求 FFT 的过程比较，并行哈特利算法更有吸引力。

本书中其它地方出现的短代码段是为了说明原理，但这个子程序是作为谱分析的工具介绍的。为了方便读者理解，伪码表达写在左边而例子写在右边。

```
FOR K = 0 TO N - 1 STEP 4          FOR K = 1:4:N
NEXT K                             NEXT or ENDFOR or END
K < N                              (K .LT. N)
```

由于编译器会把结果隐含的转移代码(例如上面例子中第二行) 变成类似于高级 GOTO 的转移指令，所以当时间比较重要时，围绕 GOTO 语句转圈看起来很不经济。C, FORTRAN 以及 PASCAL 语言中有 GOTO 语句，但 MATLAB 中没有。然而，对于一个下标从 1 ~ N 的序列

F(),伪码子程序中的置换段中的 GOTO 语句可以用下面的方法去除(程序由 John E. Baron 提供)。

```
J = 1;
I = 0;
while (1 < N - 1),
    I = I + 1;
    if (I < J),
      T = F(J);
      F(J) = F(I);
      F(I) = T;
    end;
    K = N4;
    while (3 * K < J),
      J = J - 3 * K;
      K = K / 4;
    end;
    J = J + K;
end;
```

为了更快的操作,可以把伪码程序重写为 C 语言或汇编语言的程序。若要立即得到哈特利变换,可以使用已有的 FFT 包,只用所得复数值的一半,从实部中减去虚部就可以得到哈特利变换。

参考书目

Ahmed, N., T. Natarajan, and K. Rao: *IEEE Trans. Comp.*, vol. C-23, pp. 90-93, 1974.

Bracewell, R. N.: "The Discrete Hartley Transform," *J. Optical Soc. Amer.*, vol. 73, pp. 1 832 - 1 835, 1 983.

Bracewell, R. N.: "The Fast Hartley Transform," *Proc. IEEE.*, vol. 72, pp. 1010 - 1018, 1984.

Bracewell, R. N.: "The Hartley Transform," Oxford University Press, New York, 1986.

Bracewell, R. N.: "Alternative to Split-Radix Hartley Transform," *Electronics Letters*, vol. 23, pp. 1 148 - 1 149, 1987.

Bracewell, R. N.: "Physical Aspects of the Hartley Transform," *J. Atmospheric Terestrial Physics*, vol. 51, pp. 791 - 795, 1989.

Bracewell, R. N.: "Assessing the Hartley Transform," *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. ASSP - 38, pp. 2 174 - 2 176, 1990.

Bracewell, R. N.: "Affine Theorem for the Hartley Transform," *Proc. IEEE*, vol. 82, pp. 388 - 390, 1994.

Bracewell, R. N.: "Computing with the Hartley Transform," *Computers in Physics*, vol. 9, pp. 373 - 379, 1995a.

Bracewell, R. N.: "Two-Dimensional Imaging," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New

Jersey, 1995b.

Bracewell, R. N., H. Bartelt, A. W. Lohmann, and N. Streibl: *Applied Optics*, "Optical Synthesis of Hartley Transform," vol. 24, pp. 1401-1402, 1985.

Bracewell, R. N., O. Buneman, H. Hao, and J. Villasenor: "Fast Two-dimensional Hartley Transform," *Proc. IEEE*, vol. 74, pp. 1282-1283, 1986.

Buneman, O.: "Inversion of the Helmholtz (or Laplace-Poisson) Operator for Slab Geometry," *J. Comp. Phys.*, vol. 12, pp. 124-130, 1973.

Buneman, O.: "Conversion of FFT's to Fast Hartley Transforms," *SIAM J. Sci. Statist. Comp.*, vol. 7, pp. 624-638, 1986.

Buneman, O.: "Multidimensional Hartley Transform," *Proc. IEEE*, vol. 75, p. 267, 1987.

Buneman, O.: "In-situ Bit-reversed Ordering for the Hartley Transform," *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-35, pp. 1120-1125, 1989.

Ersoy, O. K.: "A Comparative Review of Real and Complex Fourier-Related Transforms," *Proc. IEEE*, vol. 82, pp. 429-447, 1994.

Evans, D. M.: "An Improved Bit-reversal Algorithm," *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-35, pp. 1120-1125, 1987.

Guo, H., G. A. Sutton, and C. S. Burrus: "The Quick Fourier Transform," *IEEE Trans. SP*, vol. 46, pp. 338-341, 1998.

Hao, H., and R. N. Bracewell: "A Three-dimensional DFT Using the Fast Hartley Transform," *Proc. IEEE*. vol. 75, pp. 264-266, 1987.

Hartley, R. V. L.: "A More Symmetrical Fourier Analysis Applied to Transmission Problems," *Proc. Inst. Radio Engrs.*, vol. 30, pp. 144-150, 1942. Introduced the cas function kernel, emphasizing the property of real spectral representation of real data and noting the failure of reciprocity of the complex Fourier transform kernel.

Hou, H. S.: "The Fast Hartley Transform Algorithm," *IEEE Trans. Comp.*, vol. C-36, pp. 147-156, 1987.

Meher, P. K., J. K. Satapathy, and G. Panda: *Electronics Letters*, vol. 28, pp. 1077-1078, 1992.

Millane, R. P.: "Analytic Properties of the Hartley Transform and Their Implications," *Proc. IEEE*, vol. 82, pp. 413-428, 1994.

Olnejniczak, K. J.: "The Hartley Transform," in E. Poularikas ed. "The Handbook of Transforms," Chemical Rubber Company, Boca Raton, Florida, 1998.

Olnejniczak, K. J., and G. T. Heydt: "Scanning the Special Section on the Hartley Transform," *Proc. IEEE*, vol. 82, pp. 372-380, 1994. Contains extensive bibliography.

Pei, S-C, and J-L Wu: "Split-Radix Fast Hartley Transform," *Electronics Letters*, vol. 22, pp. 26-27, 1986.

Pennebaker, W., and J. L. Mitchell: "JPEG: Still Image Data Compression Standard," Van Nostrand Reinhold, New York, 1993.

Perkins, M. G.: "A Separable Hartley-like Transform in Two or More Dimensions," *Proc. IEEE*, vol. 75, pp. 1127-1129, 1987.

Press, W. H., B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling: "Numerical Recipes, the Art of Scientific Programming," Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1990. See also successor volumes devoted to programs and examples in BASIC, C, FORTRAN 77, FORTRAN 90, and PASCAL.

Rao, K. R., and P. Yip: "Discrete Cosine Transform: Algorithms, Advantages,

Applications," Academic Press, Boston, 1990.

Trans. IEEE: "Special Issue on the Fast Fourier Transform with an Extensive bibliography", *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, vol. AU-17, no. 2, 1969.

Villasenor, J. D.: "Two-dimensional Optical Hartley Transforms in the Presence of Errors," *Applied Optics*, vol. 28, pp. 2671–2676, 1989.

Villasenor, J. D.: "Optical Hartley Transform," *Proc. IEEE*, vol. 82, pp. 391–399, 1994.

Villasenor, J. D., and R. N. Bracewell: "Optical Phase Obtained by Analogue Hartley Transformation," *Nature*, vol. 330, pp. 735–737, 1987.

Villasenor, J. D., and R. N. Bracewell: "Lensless Microwave Imaging Using the Hartley Transform," *Nature*, vol. 335, pp. 617–619, 1988.

Villasenor, J. D., and R. N. Bracewell: "Vector Hartley Transform," *Electronics Letters*, vol. 25, pp. 1110–1111, 1989.

Walker, J. S.: "A New Bit-reversal Algorithm," *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-38, pp. 1472–1474, 1990.

Wang, Z.: "Fast Algorithms for the Discrete W Transform and for the Discrete Fourier Transform," *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-32, pp. 803–816, 1984.

Yang, D.: "New Fast Algorithm to Compute the Two-dimensional Discrete Hartley Transform," *Electronics Letters*, vol. 25, pp. 1705–1706, 1989.

习题

1. 求以下各序列的离散哈特利变换：{1 2}，{1 2 3 4}，{1 2 3 4 5 6 7 8}。
2. (a) 从上题的结果中，推测序列{1 2 3 … 2^P} 的 DHT 变换零元素出现的位置；

   (b) 验证 $P=4$ 时，推论是否正确；

   (c) 用代数方法证明序列{1 2 3 … 2^P} 的 DHT 变换中总有一项为零。
3. 求以下各序列的离散哈特利变换：{2 1}，{4 3 2 1}，{8 7 6 5 4 3 2 1}。
4. (a) 利用{8 7 6 5 4 3 2 1} 的 DHT 求其 DFT；

   (b) 通过{8 7 6 5 4 3 2 1} 的 DHT 直接求其功率谱。
5. 求序列{2 3 4 5 6 7 8 1} 和{3 4 5 6 7 8 1 2} 的 DHT。
6. (a) 利用{3 4 5 6 7 8 1 2} 的 DHT 求其 DFT；

   (b) 通过{3 4 5 6 7 8 1 2} 的 DHT 直接求其功率谱。
7. 求序列{7 6 5 4 3 2 1 8} 和{6 5 4 3 2 1 8 7} 的 DHT。
8. 求序列{1 2 3 4 1 2 3 4 1 2 3 4 1 2 3 4} 的 DHT。
9. (a) 求序列{1 2 1 2 1 2 1 2} 和{1 1 2 1 1 2 1 1} 的 DHT；

   (b) 解释峰值落在所处位置的原因。
10. (a) 求序列{−2 2 −2 2 −2 2 −2 2} 的 DHT 并解释其结构；

    (b) 求该序列的功率谱并分析其结构。
11. **Cas 函数的新应用** 在极坐标上绘制函数 $r=\left[\operatorname{cas}\left(\theta \bmod \frac{1}{2}\pi\right)\right]^{-1}$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$。
12. **循环变换** 证明：连续进行四次傅里叶变换，可以恢复初始信号；而连续进行两次哈

特利变换，即可恢复初始信号。

13. 离散余弦变换 取 $N=8$，对 DCT1 和 DCT2 两种离散变换，作出当 $\nu=0, 1, 2, 3$ 以及 $\nu=7$ 时基函数对 τ 的图形，选择一对基函数，检验它们乘积的和是否为零。

14. 插零 求以下序列的 DFT，并指出它们之间所有值得注意的相互关系。{2718 2818 0000 0000}，{0000 2718 2818 0000}，{2000 0000 0818 2817}。

15. 整数数据 在什么情况下，一个由 8 个整数组成的序列，其 DHT 变换也是整数？

16. 二项式序列 解释以下序列的 DHT 变换。

{1 7 21 35 35 21 7 1}，{35 35 21 7 1 1 7 21}，{1 8 28 56 70 56 28 8 1}，{70 56 28 8 1 1 8 28 56}。

17. 随机二进制数据 一个序列由 N 个随机选择的 1 或 -1 组成。(a) $H(0)$ 和 $H(N/2)$ 的期望值是多少？(b) 如果用大量这样的序列进行计算，问 $H(0)$ 的标准差应为多少？

18. 离散变换的精度 通过比较序列{8765 4321 0000 0000 0123 4567}的 DHT 和 $(8/3)\mathrm{sinc}^2(\nu/3)$ 的 24 个等间隔的值，获得一些数值变换的直观认识。

19. 两个角度的和 证明 $\mathrm{cas}(A+B)=\mathrm{cas}A\mathrm{cas}B+\mathrm{cas}'A\sin B$。

20. 微分定理 如果 $V(t)$ 的哈特利变换为 $H(f)$，那么 $V'(t)$ 的哈特利变换是什么？

21. 哈特利强度 一个移位的冲激信号 $\delta(x-a, y-b)$ 的哈特利强度为 $[H(u,\nu)]^2$，它由从 WNW(北，西北) 到 SSE(南，东南) 的平行边缘组成。离原点最近的边缘峰值在第一象限且边缘的周期为 d，求初始冲激的确切位置 (a,b)。

22. 复哈特利平面 证明实轴为 $H(\nu)$，虚轴为 $H(-\nu)$ 复平面与复的傅里叶变换的坐标旋转 $-45°$ 并扩大 $\sqrt{2}$ 倍有关。即

$$H(v)+\mathrm{i}H(-v)=(F_{real}+\mathrm{i}F_{imag})\times\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}。$$

23. 傅里叶相位 证明傅里叶变换的相位 $\phi=\arctan(F_{imag}/F_{real})$ 可直接由哈特利变换得到，根本不需要涉及复的傅里叶变换。$\phi=\arctan[H(-\nu)/H(\nu)]-\pi/4$。

24. 仿射定理 二维仿射变换(Bracewell, 1993) 可以表述为，若 $f(x,y)^2\supset H(u,v)$，则

$$f(ax+by+c, dx+ey+f)^2\supset\frac{H(\alpha,\beta)\cos\theta-H(-\alpha,-\beta)\sin\theta}{|ae-bd|}$$

其中 $\alpha=\dfrac{eu-dv}{ae-bd}$，$\beta=\dfrac{-bu+av}{ae-bd}$，$\theta=\dfrac{2\pi[(ec-bf)/u+(af-cd)/v]}{ae-bd}$。

很多哈特利变换的定理都是它的特例。证明旋转定理是仿射定理的特例。

25. 利用 DCT 进行卷积 Hubert Smith(医学博士) 和 Dy Jones(科学硕士) 是一家小型医学仪器公司的程序员。Smith 说："我想用 DCT 进行卷积，但是我太忙，不能推导公式。我知道卷积的 DCT 为各函数 DCT 乘积的 K 倍，且序列{4 3 2 1} 的 DCT 为{5.0000 2.2304 0 0.1585}，序列{2 3 5 7} 的 DCT 为{8.5000 -3.8076 0.5000 -0.0464}。你认为我能得到 K 的值吗？"

Jones 说："为什么你不用序列{1 2 3 4 0 0 0} 和{2 3 5 7 0 0 0} 进行运算，这样不就能避免交叠了吗？" 通过上面两种方法得到的 K 值分别为多少？你对他们有什么建议？

26. DCT 的数值检验 离散哈特利变换可以通过验证 $H(0)$ 是否等于序列均值(或直流)进行数值检验。反过来,其反变换的数值检验可以通过检查 $f(0)$ 是否等于 DHT 值的和来达到。若考虑复数的情况,DFT 也有相同的性质。在对其它离散变换进行数值检验时,我们发现序列{1 2 3 4}的 DCT2 为{1.77 −0.79 0 −0.06},$^{\mathrm{II}}F(0)$ 既不等于 $f(\tau)$ 各元素的和,也不等于其均值。求检验$^{\mathrm{II}}F(0)$ 的表达式?反过来,利用$^{\mathrm{II}}F(\nu)$ 的何种属性可以检验 $f(0)$?

注意序列 $f(\tau)=\{1\ 2\ 3\ 4\}$ 的 DCT1 为$^{\mathrm{I}}F_c(\nu)=\{4.03\ \ 2.14\ \ 0.85\ \ -0.65\}$,求检验 $f(\tau)$ 和$^{\mathrm{II}}F_c(\nu)$ 首元素的表达式。

第 13 章

傅里叶变换的近亲

许多常用的线性变换都和傅里叶变换或拉普拉斯变换有直接联系。这些紧密的关系包括把傅里叶变换推广到二维或更高维，在对称情况下多维傅里叶变换退化成零阶或高阶的汉克尔(Hankel) 变换。拉普拉斯变换的早期研究阐明了梅林(Mellin) 变换，梅林变换也是构建傅里叶内核函数基本理论的工具。希尔伯特变换通过傅里叶变换加以研究时，其简化形式给人留下特别深刻的印象。最后是 Abel 变换，傅里叶变换和汉克尔变换之间有着内在的关系，即对一个函数相继使用这些变换可以重新生成原来的函数。

Erdélyi 等(1954) 在两本书中把所有这些变换制成了表格。Radon 变换(Deans, 1983) 可以看作是 Abel 变换去掉圆周对称后的推广。Abel-Fourier-Hankel 循环变换可以推广为投影-切片定理或者 Radon 逆变换，投影-切片定理是从投影中进行重构的重要的思考工具。

二维傅里叶变换

变量 x 代表一些诸如时间或频率的物理量，它本质上是一维的，或者它可以等同于一个一维物理系统，如一条拉长的弦或电力传输线。然而在二维情况下 —— 如天线和天线阵、透镜和衍射光栅、电视屏幕上的图像等等 —— 就需要使用更一般的公式。

一个二维函数 $f(x,y)$ 有一个二维的变换 $F(u,v)$，它们之间存在如下关系：

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)e^{-i2\pi(ux+vy)}\,dx\,dy$$

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F(u,v)e^{i2\pi(ux+vy)}\,du\,dv\ 。$$

这些等式说明二维函数 $f(x,y)$ 可以分解为形如 $\exp[i2\pi(ux+vy)]$ 的分量。由于任何这种分量都能分为正弦部分和余弦部分，我们可以从考虑一个余弦分量 $\cos[2\pi(ux+vy)]$ 来开始我们的研究。

作为一个二维函数的例子，考虑在地理点(x,y) 处的地面高度，例如山脉所在的区域通常

用图 13.1 中的等高线来表示。函数 $\cos[2\pi(ux+vy)]$ 代表一个余弦褶皱面，其等高线与方程为 $ux+vy=$ 常数的直线重合。褶皱面的方向和 x 轴的夹角为 $\arctan(v/u)$，它们的波长为$(u^2+v^2)^{-\frac{1}{2}}$。如果通过褶皱在 x 轴方向做一个截面，截面将会以每单位 x 上 u 个周期的频率波动。相似地，v 可以解释为在 y 方向上每单位 y 的周期数。

图 13.1 中显示了山脉的主要傅里叶分量。在变换域中复分量用 uv 平面上的点(u,v)处的波长和方向以及幅度 $F(u,v)$ 来表示。为了强调 u 和 v 作为空间频率这一解释，我们相应选定 u^{-1} 和 v^{-1} 来分别表示截面在 x 方向和 y 方向上的波长(见图 13.1)。上文给出的第二个傅里叶变换关系表明，对一些具有恰当波长和方向的褶皱取合适的幅度后求和，就能重构出原来的山脉。正弦分量也必须包括进来，它考虑到了褶皱有时必须被放入合适的空间相位这种可能性。

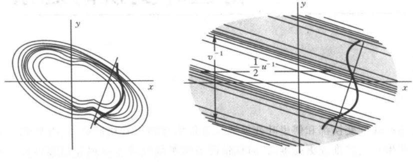


图 13.1 山脉(左图)和它的主要傅里叶分量(右图)

二维卷积

二维函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 的卷积积分定义为

$$f**g=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x',y')g(x-x',y-y')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'。$$

这样，通过对 x 和 y 反号使其中的一个函数关于原点旋转 180 度，然后移位，再与另一个函数相乘，最后对乘积进行积分就获得了卷积积分在特定位移处的值。

除了不用反号以外，二维自相关函数用相同的方法定义；这样

$$f\star\star g=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x',y')g(x+x',y+y')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'。$$

能够领会将一个给定函数表示为卷积的方法常常会很方便。例如，二维函数

$$^2\Pi(x,y)=\begin{cases}1 & |x|\text{ 和 }|y|<\frac{1}{2}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

可以表示为乘积或者卷积的形式

$$^2\Pi(x,y)=\Pi(x)\Pi(y)=[\Pi(x)\delta(y)]*[\Pi(y)\delta(x)]。$$

图 13.2 说明了这两种可能性。

有关一维傅里叶变换的定理可以很容易地推广到二维，如表 13.1 所示。

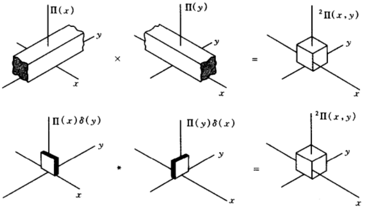


图 13.2 二维函数表示为乘积和卷积

表 13.1 二维傅里叶变换的定理

定理	$f(x,y)$	$F(u,v)$
相似性	$f(ax,by)$	$\frac{1}{\lvert ab \rvert}F(\frac{u}{a},\frac{v}{b})$
叠加	$f(x,y)+g(x,y)$	$F(u,v)+G(u,v)$
移位	$f(x-a,y-b)$	$e^{-2\pi i(au+bv)}F(u,v)$
调制	$F(x,y)\cos\omega x$	$\frac{1}{2}F(u+\frac{\omega}{2\pi},v)+\frac{1}{2}F(u-\frac{\omega}{2\pi},v)$
卷积	$f(x,y)*g(x,y)$	$F(u,v)G(u,v)$
自相关	$f(x,y)*f^*(-x,-y)$	$\lvert F(u,v)\rvert^2$
瑞利	$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert f(x,y)\rvert^2 dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert F(u,v)\rvert^2 dudv$	
能量	$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)g^*(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F(u,v)G^*(u,v)dudv$	
帕塞伐	$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\lvert f(x,y)\rvert^2=\sum\sum a_{mn}^2$，其中 $F(u,v)=\sum\sum a_{mn}[{}^2\delta(u-m,v-n)]$	
微分	$(\frac{\partial}{\partial x})^m(\frac{\partial}{\partial y})^n f(x,y)$	$(2\pi iu)^m(2\pi iv)^n F(u,v)$
	$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=f'_x(x,y)$	$2\pi iuF(u,v)$
	$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=f'_y(x,y)$	$2\pi ivF(u,v)$
	$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)=f''_{xx}(x,y)$	$-4\pi^2u^2F(u,v)$
	$\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)=f''_{yy}(x,y)$	$-4\pi^2v^2F(u,v)$
	$\frac{\partial}{\partial x\partial y}f(x,y)=f''_{xy}(x,y)$	$-4\pi^2uvF(u,v)$
	$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})f(x,y)$	$-4\pi^2(u^2+v^2)F(u,v)$

续表 13.1

定理	$f(x,y)$	$F(u,v)$
定积分	$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = F(0,0)$	
一阶矩	$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}F'_u(0,0)$	
	$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x\cos\theta + y\sin\theta)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}[\cos\theta F'_u(0,0) + \sin\theta F'_v(0,0)]$	
重心	$\langle x\rangle = \frac{F'_u(0,0)}{-2\pi\mathrm{i}F(0,0)}$ $\quad\langle y\rangle = \frac{F'_v(0,0)}{-2\pi\mathrm{i}F(0,0)}$	
二阶矩	$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = F''_{uu}(0,0)/-4\pi^2$	
	$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = F''_{uv}(0,0)/-4\pi^2$	
	$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x^2+y^2)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{4\pi^2}[F''_{uu}(0,0) + F''_{vv}(0,0)]$	
等效宽度	$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{f(0,0)} = \frac{F(0,0)}{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v}$	
有限差分⁺	$\Delta_x f(x,y)$	$\mathrm{i}2\sin\pi uF(u,v)$
	$\Delta^2_{xy} f(x,y)$	$-4\sin\pi u\sin\pi vF(u,v)$
	$\Delta^2_{xx} f(x,y)$	$-4(\sin\pi u)^2 F(u,v)$
滑动平均	$[\prod(\frac{x}{a})\prod(\frac{y}{b})] * f(x,y)$	$ab\,\mathrm{sinc}au\,\mathrm{sinc}bvF(u,v)$
可分离乘积	$f(x)g(y)$	$F(u)G(v)$

+ 表中的有限差分定义如下：

$$\Delta_x f(x,y) = f(x+\frac{1}{2},y) - f(x-\frac{1}{2},y)$$

$$\Delta^2_{xy} f(x,y) = f(x+\frac{1}{2},y+\frac{1}{2}) - f(x-\frac{1}{2},\ y+\frac{1}{2}) - f(x+\frac{1}{2},\ y-\frac{1}{2}) + f(x-\frac{1}{2},\ y-\frac{1}{2})$$

$$\Delta^2_{xx} f(x,y) = f(x+1,y) - 2f(x,y) + f(x-1,y)。$$

二维变换中存在的一些定理如下。

旋转定理 如果 $f(x,y)$ 在 (x,y) 平面上旋转一个角度，那么其变换在 (u,v) 平面上也旋转同样的角度。在此意义下，$f(x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta)$ 的二维傅里叶变换为

$$F(u\cos\theta - v\sin\theta,\ u\sin\theta + v\cos\theta)。$$

简单剪切定理 如果对 $f(x,y)$ 进行剪切，其变换将在正交方向上受到相同程度的剪切。即 $f(x+by,y)$ 的二维傅里叶变换是 $F(u,v-bu)$。

仿射定理 对 $f(x,y)$ 在其坐标平面上进行仿射变换，变为 $f(ax+by+c,\ dx+ey+$

f)(Bracewell 等，1993；Bracewell，1994)，那么其二维傅里叶变换为

$$|ae-bd|^{-1}\exp\{i2\pi(ae-bd)^{-1}[(ec-bf)u+(af-cd)v]\}F[(eu-dv)/(ae-bd),(-bu+av)/(ae-bd)]。$$

图 13.3 图示了一些二维傅里叶变换。

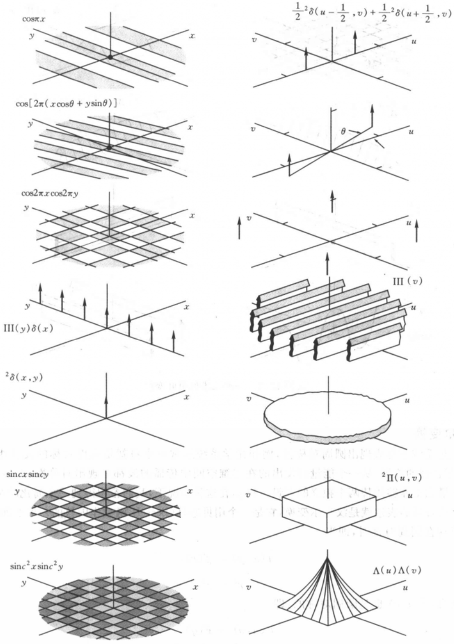
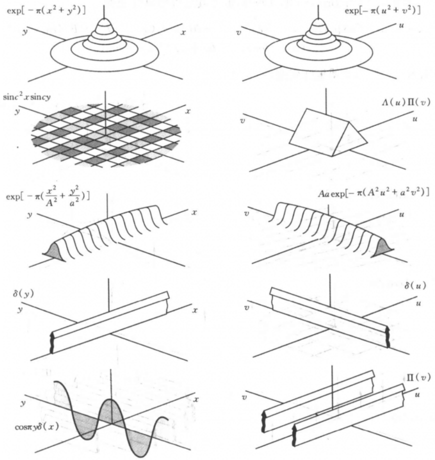


图 13.3　一些二维傅里叶变换



续图 13.3　一些二维傅里叶变换

汉克尔变换

二维系统常常表现出圆周对称性，例如光学系统通常由本身就是圆周对称的元件组成。还有，出于自然的原因，从一个能量源发出的在二维空间中传播的波都呈现出对称性。因为用一个径向变量完全能够代替两个独立的变量 x 和 y，在这种情况下，我们希望得到一个简化的结果。这个问题的合适的表达就是汉克尔变换，它是一个用贝塞耳(Bessel) 函数作内核的一维变换。

当存在圆周对称时，即当

$$f(x,y) = \boldsymbol{f}(r),$$

其中，

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

可以证明，$F(u,v)$ 也是圆周对称的，即

$$F(u,v) = \boldsymbol{F}(q),$$

其中，

$$q^2 = u^2 + v^2。$$

为了证明这一点，把变换公式变为极坐标形式并对所有的角变量积分 ①。那么两个一维变换 $F(q)$ 和 $f(r)$ 之间的关系是

$$F(q) = 2\pi\int_0^{\infty} f(r)J_0(2\pi qr)r\mathrm{d}r$$

和

$$f(r) = 2\pi\int_0^{\infty} F(q)J_0(2\pi qr)q\mathrm{d}q。$$

我们把 $F(q)$ 称为 $f(r)$ 的（零阶）汉克尔变换并且注意到这个变换是严格互易的，这与内核函数是 sin 和 cos 时的情况一样。从与互易变换有联系的内核函数的广义范畴讲，J_0 与 sin，cos 以及其他内核函数一起被称为傅里叶内核函数。

通过适当的变量重定义，可以消去上面公式中的 2π 因子，但是保留它们在逻辑上遵从了傅里叶变换所采用的形式。在物理情形下，括号中的 2π 是由每单位 r 的完整周期内对 q 的度量所造成的。积分号前的 2π 来自于面积分量 $2\pi r\mathrm{d}r$。

在图 13.4 中把许多零阶汉克尔变换表示为二维傅里叶变换。为便于参考，表 13.2 列出了多种汉克尔变换。

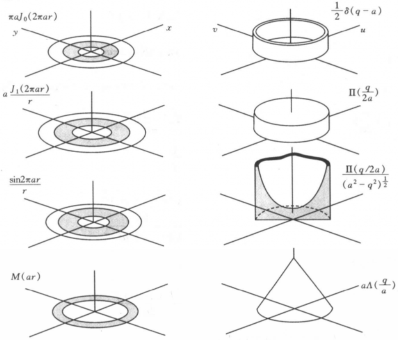


图 13.4　一些图示为二维傅里叶变换的零阶汉克尔变换

① 即 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(xu+yv)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} f(r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi qr\cos(\theta-\phi)}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

$= \int_0^{\infty} f(\tau)[\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi qr\cos\theta}\mathrm{d}\theta]r\mathrm{d}r$

$= 2\pi\int_0^{\infty} f(r)J_0(2\pi qr)r\mathrm{d}r$

其中 $x+\mathrm{i}y = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$u+\mathrm{i}v = q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$，并且我们用了关系式 $J_0(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\cos\beta}\mathrm{d}\beta$

表 13.2 一些汉克尔变换

$f(r)$	$F(q)$
$\Pi(\frac{r}{2a})$	$\frac{aJ_1(2\pi aq)}{q}$
$\frac{\sin 2\pi ar}{r}$	$\frac{\Pi(q/2a)}{(a^2-q^2)^{\frac{1}{2}}}$
$\frac{1}{2}\delta(r-a)$	$\pi aJ_0(2\pi aq)$
$M(ar)^{\dagger}$	$a^{-2}\Lambda(\frac{q}{a})$
$e^{-\pi r^2}$	$e^{-\pi q^2}$
$\frac{1}{(a^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{e^{-2\pi aq}}{q}$
$\frac{1}{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{2\pi e^{-2\pi aq}}{a}$
$\frac{1}{a^2+r^2}$	$2\pi K_0(2\pi aq)$
$\frac{2a^2}{(a^2+r^2)^2}$	$4\pi^2 aqK_1(2\pi aq)$
$\frac{4a^4}{(a^2+r^2)^3}$	$4\pi^2 aqK_1(2\pi aq)+4\pi^3 a^2 q^2 K_0(2\pi aq)$
$(a-r^2)\Pi(\frac{r}{2a})$	$\frac{a^2 J_2(2\pi aq)}{\pi q^2}$
$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{q}$
e^{-ar}	$\frac{2\pi a}{(4\pi^2 q^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$
$\frac{e^{-ar}}{r}$	$\frac{2\pi}{(4\pi^2 q^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}$
$\frac{\delta(r)}{\pi r}={}^2\delta(x,y)$	1
$\frac{\Pi(\frac{r}{2a})**^2}{2a^2}$	$\frac{[J_1(2\pi aq)]^2}{2q^2}$
$=[\cos^{-1}\frac{r}{2a}-\frac{r}{2a}(1-\frac{r^2}{4a^2})^{\frac{1}{2}}]\Pi(\frac{r}{4a})$	
$-4\pi^2 r^2 f(r)$	$(\frac{d^2F}{dq^2}+\frac{1}{q}\frac{dF}{dq})=\nabla^2 F$
$r^2 e^{-\pi r^2}$	$(\frac{1}{\pi}-q^2)e^{-\pi q^2}$
$J_0^2(2\pi ar)$	$\pi^{-2}q^{-1}(\pi^{-2}-q^2)^{-1/2}\Pi(\pi q/2)$

续表 13.2

$f(r)$	$F(q)$
$\mathrm{jinc}\,ar$	$a^{-2}\prod(q/a)$
$\mathrm{jinc}^2 ar$	$\frac{1}{2}[\cos^{-1}q - q(1-q^2)^{1/2}\prod(q/2)]$
$\mathrm{sinc}^2 ar$	$(\pi a^2)^{-1}\cosh^{-1}(a/q)$
$r^{-n}J_n(r)$	$2\pi(1-4\pi^2q^2)^{n-1}\prod(\pi q)/2^{n-1}(n-1)!$
e^{ir^2}	$i\pi e^{-i\pi^2q^2}$

+ 表中 $M(x) = 2\pi[x^{-3}\int_0^x J_0(x)dx - x^{-2}J_0(x)]$

许多二维傅里叶变换的定理能够按照汉克尔变换重新叙述。表 13.3 列出了相应的傅里叶变换定理的名字以便进行比较。

表 13.3　汉克尔变换的定理

定理	$f(r)$	$F(q)$
尺度	$f(ar)$	$a^{-2}F(\frac{q}{a})$
叠加	$f(r)+g(r)$	$F(q)+G(q)$
移位	移位破坏了圆周对称	
卷积	$\int_0^\infty\int_0^{2\pi} f(r')g(R)r'dr'd\theta$	$F(q)G(q)$
	$(R^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta)$	
瑞利	$\int_0^\infty \lvert f(r)\rvert^2 rdr = \int_0^\infty \lvert F(q)\rvert^2 qdq$	
功率	$\int_0^\infty f(r)g^*(r)rdr = \int_0^\infty F(q)G^*(q)qdq$	
微分	留作学生练习	
定积分	$2\pi\int_0^\infty f(r)rdr = F(0)$	
二阶距	$2\pi\int_0^\infty r^2 f(r)rdr = \frac{F''(0)}{-2\pi^2}$	
等效宽度	$\frac{2\pi\int_0^\infty f(r)rdr}{f(0)} = \frac{F(0)}{2\pi\int_0^\infty F(q)qdq}$	

如果有可以使用的贝塞耳函数 J_0，汉克尔变换的数值计算就可以直接进行。另一种可选的方法是：对非负的 x 求其 Abel 变换 $f_A(x)$，通过对负的 x 补值把它变成一个两倍长度的偶函数，然后再调用快速傅里叶变换。

与成像(imaging) 有关的汉克尔变换和二维傅里叶变换的特性参见 Bracewell(1995)。

傅里叶核函数

设两个函数 f 和 g 满足下面的核为 k 的积分方程，

$$g(s)=\int_0^{\infty}f(x)k(s,x)\mathrm{d}x,$$

并且设所选择的核 k 使得互易关系也成立；即

$$f(x)=\int_0^{\infty}g(s)k(s,x)\mathrm{d}s\ 。$$

我们知道 $2\cos2\pi ax$，$2\sin2\pi ax$ 和 $2\mathrm{cas}2\pi ax$ 都是这样的内核，更进一步，通过由汉克尔确立的定理可以得到一个完整的集合，即 ①

$$g(x)=\int_0^{\infty}\mathrm{d}s(xs)^{\frac{1}{2}}J_\nu(xs)\int_0^{\infty}g(x)(xs)^{\frac{1}{2}}J_\nu(xs)\mathrm{d}x,$$

据此

$$G(s)=\int_0^{+\infty}g(x)(xs)^{\frac{1}{2}}J_\nu(xs)\mathrm{d}x;$$

反过来

$$g(x)=\int_0^{+\infty}G(s)(xs)^{\frac{1}{2}}J_\nu(xs)\mathrm{d}s\ 。$$

通过从 $G(s)$ 中分离出一个因子 $s^{\frac{1}{2}}$，从 $g(x)$ 中分离出因子 $x^{\frac{1}{2}}$，即令 $G(s)=s^{\frac{1}{2}}F(s)$ 以及 $g(x)=x^{\frac{1}{2}}f(x)$，我们就获得了上述公式的另一种表达式：

$$F(s)=\int_0^{\infty}xf(x)J_\nu(xs)\mathrm{d}x$$

$$f(x)=\int_0^{\infty}sF(s)J_\nu(xs)\mathrm{d}s。$$

当 $\nu=0$ 时的情况来自于前面的圆周对称条件下的二维傅里叶变换。

有趣的是，取 $\nu=\pm\frac{1}{2}$ 并利用关系式

$$J_{\frac{1}{2}}(z)=(\frac{2}{\pi z})^{\frac{1}{2}}\sin z,\ J_{-\frac{1}{2}}(z)=(\frac{2}{\pi z})^{\frac{1}{2}}\cos z,$$

我们就重新得到了已知的内核函数 $2\cos2\pi ax$ 和 $2\sin2\pi ax$，这也证明了正弦和余弦变换公式包含在汉克尔定理中。

三维傅里叶变换

毋庸置疑，存在三维物理系统，但是为了理论上方便处理，我们通常寻求简化形式。不过，必须面对三维傅里叶分析的典型例子是 X 射线通过晶体的衍射。公式为：

---

① 当 $f(x)$ 不连续时，等式左边应该用 $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ 替换

$$F(u,v,w)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y,z)e^{-i2\pi(xu+yv+zw)}dxdydz$$

$$f(x,y,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(u,v,w)e^{i2\pi(xu+yv+zw)}dudvdw\ 。$$

多维变换，如果碰到的话，很容易识别。令 **x** 和 **s** 为向量，它们的分量分别为 $(x_1,x_2,\cdots)$ 和 $(s_1,s_2,\cdots)$，对 n 维傅里叶变换，我们有如下方便的向量记法：

$$F(\mathbf{s})=\iint\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(\mathbf{x})e^{-i2\pi\mathbf{x}\mathbf{s}}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

在柱坐标 r,θ,z 中，有 $\quad x+iy=re^{i\theta}$

三维傅里叶变换可以用变换域的变量 s,ϕ,w 表示，其中

$$u+iv=se^{i\phi},$$

公式为：

$$G(s,\phi,w)=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(r,\theta,z)e^{-i2\pi[sr\cos(\theta-\phi)+wz]}rdrd\theta dz$$

$$g(r,\theta,z)=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(s,\phi,w)e^{i2\pi[sr\cos(\theta-\phi)+wz]}sdsd\phi dw。$$

这个结果可以由基本公式通过下面的替换直接得到：

$$g(r,\theta,z)=f(x,y,z)$$

和 $$G(s,\phi,w)=F(u,v,w)。$$

在圆周对称的情况下，即 f 与 θ 无关(因此 F 与 ϕ 无关)时，由

$$h(r,z)=f(x,y,z)$$

和 $$H(s,w)=F(u,v,w),$$

我们发现

$$H(s,w)=2\pi\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(r,z)J_0(2\pi sr)e^{-i2\pi wz}rdrdz$$

$$h(r,z)=2\pi\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}H(s,w)J_0(2\pi sr)e^{i2\pi wz}sdsdw。$$

为了得到这个结果，我们使用了前面推导零阶汉克尔变换时使用的公式。

在柱对称情况下，即 f 与 θ 和 z 都无关，仅是 r 的函数，假定 $f(x,y,z)=\mathbf{k}(r)$ 且 $F(u,v,w)=K(s,w)$，那么

$$K(s,w)=\mathbf{K}(s)\delta(w)$$

其中

$$\mathbf{K}(s)=2\pi\int_0^{\infty}\mathbf{k}(r)J_0(2\pi sr)rdr\ 。$$

在球坐标 r,θ,ϕ 中，相应的变换域变量为 s,ϑ,φ，我们有

$$x = r\sin\theta\cos\phi \qquad y = r\sin\theta\sin\phi \qquad z = r\cos\theta$$
$$u = s\sin\vartheta\cos\varphi \qquad v = s\sin\vartheta\sin\varphi \qquad w = s\cos\vartheta。$$

记 $f(x,y,z) = g(r,\theta,\phi)$，以及 $F(u,v,w) = G(s,\vartheta,\varphi)$，我们发现

$$G(s,\vartheta,\varphi) = \int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} g(r,\theta,\phi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi sr[\cos\vartheta\cos\theta+\sin\vartheta\sin\theta\cos(\phi-\varphi)]} r^2\sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi。$$

$$g(r,\theta,\phi) = \int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} G(s,\vartheta,\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi sr[\cos\vartheta\cos\theta+\sin\vartheta\sin\theta\cos(\phi-\varphi)]} s^2\sin\vartheta \mathrm{d}s\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi。$$

对圆周对称的情况，即当 $f(x,y,z)$ 与 ϕ 无关时，记 $f(x,y,z) = h(r,\theta)$ 和 $F(u,v,w) = H(s,\vartheta)$，我们有

$$H(s,\vartheta) = 2\pi\int_0^{\infty}\int_0^{\pi} h(r,\theta)J_0(2\pi sr\sin\vartheta\sin\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi sr\cos\vartheta\cos\theta} r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta。$$

在球对称情况下，记 $f(x,y,z) = k(r)$ 和 $F(u,v,w) = K(s)$，我们有

$$K(s) = 4\pi\int_0^{\infty} k(r)\operatorname{sinc}(2sr)r^2\mathrm{d}r,$$
$$k(r) = 4\pi\int_0^{\infty} K(s)\operatorname{sinc}(2sr)s^2\mathrm{d}s\ 。$$

表 13.4 给出了几个三维傅里叶变换的例子。更多的变换可以通过下式产生

$$f(x)g(y)h(z) \supset F(u)G(v)H(w),$$

其中 $f(x)$，$F(u)$ 是一维傅里叶变换对，其它两对也一样。通过把 $f(x)g(y)h(z)$ 表示成下面的形式，然后应用三维卷积定理，可以证明这个结果。

表 13.4　一些三维傅里叶变换①

$f(x,y,z)$		$F(u,v,w)$
${}^3\delta(x-a,\ y-b,\ z-c)$	点	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(au+bv+cw)}$
$\mathrm{e}^{-\pi(x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2)}$	高斯	$abc\mathrm{e}^{-\pi(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2)}$
${}^3\Pi(x,y,z)$	立方体	$\operatorname{sinc} u \operatorname{sinc} v \operatorname{sinc} w$
${}^2\Pi(x,y)$	杆	$\operatorname{sinc} u \operatorname{sinc} v\,\delta(w)$
$\Pi(x)$	片	$\operatorname{sinc} u\,\delta(v)\delta(w)$
$\Pi(x)\Pi[(y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}]$	盘	$\operatorname{sinc}u\dfrac{[J_1[\pi(v^2+w^2)]^{\frac{1}{2}}]}{2(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}}$
$\Pi(\frac{r}{2})$	球	$\dfrac{\sin 2\pi s - 2\pi s\cos 2\pi s}{2\pi^2 s^3}$
$(1-\lvert r\rvert)\Pi(\frac{r}{2})$		$\dfrac{\pi}{3}\dfrac{12}{(2\pi)^4}\dfrac{2(1-\cos 2\pi s)-2\pi s\sin 2\pi s}{s^4}$
$(1-r^2)\Pi(\frac{r}{2})$		$\dfrac{8\pi}{(2\pi)^5}\dfrac{[3-(2\pi s)^2]\sin 2\pi s - 3(2\pi s)\cos 2\pi s}{s^5}$
$\dfrac{\mathrm{e}^{-r/R}}{\frac{4}{3}\pi R^3}$		$\dfrac{6}{(1+4\pi^2R^2s^2)^2}$
$\mathrm{e}^{-\pi r^2}$		$\mathrm{e}^{-\pi s^2}$

① 本表中 $r^2 = x^2+y^2+z^2$，$s^2 = u^2+v^2+w^2$。

$$f(x)\delta(y)\delta(z) * \delta(x)g(y)\delta(z) * \delta(x)\delta(y)h(z)$$

我们有类似的各种不同情况

$$f(x)g(y)h(z) \supset F(u)G(v)H(w)$$
$$f(x)g(y) \supset F(u)G(v)\delta(w)$$
$$f(x) \supset F(u)\delta(v)\delta(w)$$
$$\boldsymbol{k}(r)h(z) \supset \boldsymbol{K}(s)H(w)$$
$$\boldsymbol{k}(r) \supset \boldsymbol{K}(s)\delta(w)\ 。$$

n 维汉克尔变换

当存在 n 维对称时，所得到的一维变换是

$$\mathscr{F}(q) = \frac{2\pi}{q^{\frac{1}{2}n-1}}\int_0^\infty f(r)J_{\frac{1}{2}n-1}(2\pi qr)r^{\frac{1}{2}n}\mathrm{d}r\ 。$$

分别令 $n = 1,2,3$，我们将得到傅里叶变换、汉克尔变换和前面所述的球对称的情况（记住 $J_{\frac{1}{2}}(x) = (2/\pi x)^{\frac{1}{2}}\sin x$ 以及 $J_{-\frac{1}{2}}(x) = (2/\pi x)^{\frac{1}{2}}\cos x$）。

梅林变换

对复数 s，用下式定义了梅林变换

$$F_M(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}\mathrm{d}x$$

通过简单的变量变换可以证明它和拉普拉斯变换（第 14 章）是等价的。令

$$x = \mathrm{e}^{-t}$$

我们有　　$\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 和 $x^{s-1} = \mathrm{e}^{-t(s-1)}$，

据此　　$F_M(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$。

如图 13.5 所示，t 函数的拉普拉斯变换和 x 函数的梅林变换是相同的。当我们用 e^{-t} 的函数重画时间的函数时，我们就把所有正的时间压缩进从 1 ～ 0 的范围。

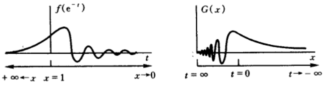


图 13.5　拉普拉斯变换和梅林变换的关系

梅林变换的逆变换公式是

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} F_M(s)x^{-s}\mathrm{d}s。$$

作为一种特殊情况，当 $F_L(s)$ 的非零部分集中在 s 的虚部积分值上时，拉普拉斯变换趋于傅里叶级数，与此类似，梅林变换与幂级数有关。

我们可以把 $F_M(s)$ 看作 $f(x)$ 的 $(s-1)$ 阶矩。例如，如果 $f(x)=\Pi(x-\frac{1}{2})$，那么 $F_M(s)=s^{-1}$（假设 s 的实部是正的）。这个梅林变换对如图 13.6 所示。一般地，

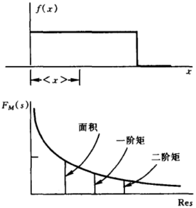


图 13.6 梅林变换对

$f(x)$ 的面积 $=F_M(1)$

$f(x)$ 的一阶矩 $=F_M(2)$

$f(x)$ 的二阶矩 $=F_M(3)$

质心的横座标，$\langle x\rangle$ $=\dfrac{F_M(2)}{F_M(1)}$

回转半径 $=\left[\dfrac{F_M(3)}{F_M(1)}\right]^{\frac{1}{2}}$

质心的二阶矩 $=F_M(3)-\dfrac{[F_M(2)]^2}{F_M(1)}$

表 13.5 列出了几个梅林变换。

表 13.5 一些梅林变换

$f(x)$	$F_M(s)$	收敛条件
$\delta(x-a)$	a^{s-1}	
$H(x-a)$	$-\frac{a^s}{s}$	
$H(a-x)$	$\frac{a^s}{s}$	
$x^n H(x-a)$	$-\frac{a^{s+n}}{s+n}$	
$x^n H(a-x)$	$\frac{a^{s+n}}{s+n}$	
e^{-ax}	$a^{-s}\Gamma(s)$	$\mathrm{Re}a>0$，$\mathrm{Re}s>0$
e^{-x^2}	$\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}s)$	
$\sin x$	$\Gamma(s)\sin\frac{1}{2}\pi s$	$-1<\mathrm{Re}s<1$
$\cos x$	$\Gamma(s)\cos\frac{1}{2}\pi s$	$0<\mathrm{Re}s<1$
$\frac{1}{1+x}$	$\pi\mathrm{cosec}\pi s$	
$\frac{1}{1-x}$	$\pi\cot\pi s$	
$\frac{1}{(1+x)^a}$	$\frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)}{\Gamma(a)}$	$\mathrm{Re}a>0$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{2}\pi\mathrm{cosec}\frac{1}{2}\pi s$	
$(1-x)^{a-1}H(1-x)$	$\frac{\Gamma(s)\Gamma(a)}{\Gamma(s+a)}$	$\mathrm{Re}a>0$

续表 13.5

$f(x)$	$F_M(s)$	收敛条件
$(x-1)^a H(x-1)$	$\dfrac{\Gamma(a-s)\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-s)}$	$0<\mathrm{Re}a<1$
$\ln(1+x)$	$\dfrac{\pi}{s}\mathrm{cosec}\pi s$	$-1<\mathrm{Re}s<0$
$\dfrac{1}{2}\pi-\tan^{-1}x$	$\dfrac{1}{2}\pi s^{-1}\sec\dfrac{1}{2}s$	
$\Lambda(x-1)$	$\begin{cases}\dfrac{2(2^s-1)}{s(s+1)} & s\neq 0\\ 2\ln 2 & s=0\end{cases}$	$\mathrm{Re}s>-1$
$\mathrm{erfc}x$	$\dfrac{\Gamma(\frac{1}{2}s+\frac{1}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}s}$	$\mathrm{Re}s>0$
$\mathrm{Si}x$	$\dfrac{\Gamma(s)\sin\frac{1}{2}\pi s}{s}$	$-1<\mathrm{Re}s<0$

表 13.6 列出了梅林变换定理。这些定理和前面讨论过的有关傅里叶变换的定理有着紧密的关系。

表 13.6 梅林变换定理

$f(x)$	$F_M(s)$
$f(ax)$	$a^{-s}F_M(s)\quad a>0$
f_1+f_2	$F_{1M}+F_{2M}$
$xf(x)$	$F_M(s+1)$
$x^a f(x)$	$F_M(s+a)$
$f(\frac{1}{x})$	$F_M(-s)$
$f(x^a)$	$a^{-1}F_M(\frac{s}{a})\quad a>0$
$f(x^{-a})$	$a^{-1}F_M(-\frac{s}{a})\quad a>0$
$f'(x)$	$-(s-1)F_M(s-1)$
$xf'(x)$	$-sF_M(s)$
$x^a f'(x)$	$-(s+a-1)F_M(s+a^{-1})$
$f''(x)$	$(s-1)(s-2)F_M(s-2)$
$x^2 f''(x)$	$s(s+1)F_M(s)$
$f^{(n)}(x)$	$(-1)^n(s-n)\cdots(s-1)F_M(s-n)$
$(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})^n f(x)$	$(-1)^n s^n F_M(s)$
$\int_0^\infty f(\frac{x}{u})g(u)\frac{\mathrm{d}u}{u}$	$F_M(s)G_M(s+1)$
$\int_0^\infty f(\frac{x}{u})g(u)\mathrm{d}u$	$F_M(s)G_M(s)$
$f(x)g(x)$	$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}F(\tau)G(s-\tau)\mathrm{d}\tau$

通过对下面的每个等式分别取梅林变换

$$g(\alpha)=\int_0^{\infty}f(x)k(\alpha x)\mathrm{d}x$$

和
$$f(x)=\int_0^{\infty}g(\alpha)h(\alpha x)\mathrm{d}\alpha,$$

可以发现两个梅林变换 $K_M(s)$ 和 $H_M(s)$ 之间的关系是

$$K_M(s)H_M(1-s)=1。$$

这个关系使得可以通过解内核 $h(\alpha x)$ 来求解含有内核 $k(\alpha x)$ 的积分方程，而且当 $h(\alpha x)=k(\alpha x)$ 时，可以得到形如 $k(\alpha x)$ 的傅里叶内核的条件，即

$$K_M(s)K_M(1-s)=1。$$

Z 变换

我们对那些用等时间间隔的采样值构成其全部可用信息的信号很感兴趣。使用脉冲调制且多个信息分时交替的通信系统就产生这样的信号，另一个感兴趣的重要领域是控制系统，在控制系统中要把反馈加到一些受控制的量的等间隔的采样点上。当然，还能想到很多其它的例子，包括涉及概率理论和空间中的周期结构等主题的例子，但是脉冲调制和采样数据控制系统是常引入 Z 变换的主要领域。

通常假设采样点之间的时间间隔为 T，但此处时间间隔取为单位 1。如果必须处理其它间隔的话，我们总可以引入相差一个适当因子的新的独立变量。

若我们已知函数 $f(t)$ 在 $t=0,1,2,\cdots,n$ 时的采样值，即

$$f(0)\ f(1)\ f(2)\ \cdots\ f(n),$$

那么多项式

$$F(z)=f(0)+f(1)z^{-1}+f(2)z^{-2}+f(3)z^{-3}+\cdots+f(n)z^{-n}$$

被称为 $f(t)$ 的 Z 变换。这里函数 $f(t)$ 是实函数且当 $t<0$ 时函数值取为 0；变量 z 取复数。冲激串

$$\phi(t)=f(0)\delta(t)+f(1)\delta(t-1)+f(2)\delta(t-2)+\cdots+f(n)\delta(t-n)$$

尽管和原始函数 $f(t)$ 的书写符号十分不同，但正如有关的采样定理已经指出的那样，冲激串和样本的集合完全等价。实际上，直接处理下面不指明信号种类的序列通常更方便一些：

$$\{f(0)\ f(1)\ f(2)\ \cdots\ f(n)\}。$$

如果这样的信号作为输入施加于一个冲激响应为

$$\{h(0)\ h(1)\ h(2)\ \cdots\ h(n)\}$$

的系统，那么系统的输出可以用下面的序列积表示

$$\{f(0)\ f(1)\ f(2)\ \cdots\ f(n)\}*\{h(0)\ h(1)\ h(2)\ \cdots\ h(n)\}。$$

在第 3 章我们已经知道了用于序列卷积的序列积法则和用于多项式乘法的法则是一样的。因此输出的 Z 变换是乘积

$$\boldsymbol{F}(z)\boldsymbol{H}(z),$$

其中 $\boldsymbol{H}(z)$ 是冲激响应的 Z 变换。

例如，如果一个信号{2 1} 作用到冲激响应为{8 4 2 1} 的系统上，那么

$$\boldsymbol{F}(z) = 2 + z^{-1}$$
$$\boldsymbol{H}(z) = 8 + 4z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}$$

则输出的 Z 变换为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(z)\boldsymbol{H}(z) &= (2 + z^{-1})(8 + 4z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}) \\ &= 16 + 16z^{-1} + 8z^{-2} + 4z^{-3} + z^{-4})\text{。}\end{aligned}$$

因此输出系列为{16 16 8 4 1}。

相反地，如果给定输入和输出要求系统的冲激响应，我们可以简单地用输出的 Z 变换除以输入的 Z 变换并将结果展开为 z^{-1} 的多项式，所得系数即为所求的冲激响应。

正如第 3 章介绍的那样，序列的乘法和它的逆构成了这种数值问题理论的一种可选择的且十分直接的方法，当许多 Z 的幂可以忽略时，Z 变换本质上就剩下简单的乘除算术运算。

涉及乘积或商的多项式因式分解的可能性使 Z 变换在理论上很便于讨论，也允许我们使用我们熟悉的代数操作。由于这个原因，有一张可用于参考的常用冲激信号的 Z 变换表非常有用。如果信号是用一个数字数据序列表示的，很容易就能写出它的 Z 变换。这里，我们考虑连续冲激的强度由一个简单的公式而不是由实际数据给出的情况。令

$$\phi(t) = f(0)\delta(t) + f(1)\delta(t-1) + f(2)\delta(t-2) + \cdots + f(n)\delta(t-n),$$

取 $\phi(t)$ 的拉普拉斯变换并记之为 $F_L(p)$，我们有

$$F_L(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\mathrm{e}^{-np}\text{。}$$

这是一个 $\exp(-p)$ 的简单多项式。令

$$z = \mathrm{e}^{p},$$

我们得到

$$F_L(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n},$$

而根据定义这个多项式是 $f(t)$ 的 Z 变换。

作为一个例子，考虑脉冲序列 $\delta(t)+\delta(t-1)+\delta(t-2)\cdots$。它的拉普拉斯变换为 $1+\mathrm{e}^{-p}+\mathrm{e}^{-2p}+\cdots$，它的 Z 变换为 $1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots$，因此可以直接从拉普拉斯变换得到 Z 变换。在用简单的公式而不是数据描述函数的情况下，多项式可以表示为有限形式，

$$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-p}} = \frac{1}{1-z^{-1}},$$

且它构成了列有 Z 变换的表 13.7 当中一个简明的条目。

对 $f(n)$ 的操作和对 Z 变换的操作是一致的；表 13.8 列出了这样的操作对。

把这个表和梅林变换中的定理进行比较可以发现它们实际上是一致的。这是因为梅林变换与拉普拉斯变换之间的联系方式和逆 Z 变换与拉普拉斯变换之间的联系方式几乎相同。因此，在拉普拉斯积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

中，我们令 $x = \exp(-t)$ 就得到梅林变换，而令 $z = \exp(-p)$ 就得到 Z 变换。为了便于参考和比较，下面列出了这三种变换和它们逆变换：

$$F_L(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} F_L(p)\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p$$

$$F_M(s) = \int_0^{\infty} f(x)x^{s-1}\,\mathrm{d}x \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} F_M(s)x^{-s}\,\mathrm{d}s$$

$$f(n) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma} F(z)z^{n-1}\,\mathrm{d}z \qquad F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)z^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_0^{\infty} f(n)z^{-n}\text{。}$$

显然，除了 t 必须是实数而 s 可以是复数，x 是实数而 z 是复数以外，Z 变换就像逆梅林变换一样。z 平面上的围线 Γ 可理解如下：它必须包围被积函数的极点，如果把逆拉普拉斯变换的积分限（$c-\mathrm{i}\infty$ 到 $c+\mathrm{i}\infty$）选在所有极点的右边，那么用变换 $z = \exp(-p)$ 得到的圆就包围了所有极点。一般情况下，取 $c = 0$ 是适合的（$F_L(p)$ 的所有极点在左半平面），围线 Γ 就变成了圆 $|x| = 1$。

表 13.7　一些可以代数描述的信号的 Z 变换

$\{f(n)\}$	$f(n)$	$F(z)$
$\{a_0\ a_1\ a_2\ \cdots\}$	a_n	$a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \cdots$
$\{1\ 1\ 1\ 1\ \cdots\}$	1	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$
$\{0\ 1\ 1\ 1\ \cdots\}$		$\dfrac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$
$\{0\ 1\ 2\ 3\ \cdots\}$	n	$\dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
$\{0\ 1\ 4\ 9\ \cdots\}$	n^2	$\dfrac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$
$\{0\ 1\ 8\ 27\ \cdots\}$	n^3	$\dfrac{3z^{-2}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^4} + \dfrac{z^{-1}(1+2z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$
$\{1\ \mathrm{e}^{-a}\ \mathrm{e}^{-2a}\ \cdots\}$	e^{-an}	$\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-a}z^{-1}}$
$\{0\ 1-\mathrm{e}^{-a}\ 1-\mathrm{e}^{-2a}\ \cdots\}$	$1-\mathrm{e}^{-an}$	$\dfrac{(1-\mathrm{e}^{-a})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-\mathrm{e}^{-a}z^{-1})}$

续表 13.7

$\{f(n)\}$	$f(n)$	$F(z)$
$\{0\ e^{-a}\ 2e^{-2a}\ \cdots\}$	ne^{-an}	$\dfrac{e^{-a}z^{-1}}{(1-e^{-a}z^{-1})^2}$
$\{0\ e^{-a}\ 4e^{-2a}\ \cdots\}$	n^2e^{-an}	$\dfrac{e^{-a}z^{-1}(1+e^{-a}z^{-1})}{(1-e^{-a}z^{-1})^3}$
	$\dfrac{1}{a}(an-1+e^{-an})$	$\dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}-\dfrac{(1-e^{-a})z^{-1}}{a(1-z^{-1})(1-e^{-a}z^{-1})}$
	$e^{-an}-e^{-\beta n}$	$\dfrac{(e^{-a}-e^{-\beta})z^{-1}}{(1-e^{-a}z^{-1})(1-e^{-\beta}z^{-1})}$
	$\sin\alpha n$	$\dfrac{z^{-1}\sin\alpha}{1-z^{-1}2\cos\alpha+z^{-2}}$
	$\cos\alpha n$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos\alpha}{1-z^{-1}2\cos\alpha+z^{-2}}$
	$\sinh\alpha n$	$\dfrac{z^{-1}\sinh\alpha}{1-z^{-1}2\cosh\alpha+z^{-2}}$
	$\cosh\alpha n$	$\dfrac{1-z^{-1}\cosh\alpha}{1-z^{-1}2\cosh\alpha+z^{-2}}$
	$e^{-an}\cos\omega n$	$\dfrac{1-z^{-1}e^{-a}\cos\omega}{1-z^{-1}2e^{-a}\cos\omega+e^{-2a}z^{-2}}$
	$e^{-an}\sin\omega n$	$\dfrac{z^{-1}e^{-a}\sin\omega}{1-z^{-1}2e^{-a}\cos\omega+e^{-2a}z^{-2}}$
	$f(n+1)$	$zF(z)-f(0)z$
	$f(n+2)$	$z^2F(z)-f(0)z^2-f(1)z$
	$n^af(n)$	$-z(d/dz)^aF(z)$

表 13.8　Z 变换定理

$f(n)$	$F(z)$
$f_1(n)+f_2(n)$	$F_1(z)+F_2(z)$
$f(n-1)$	$z^{-1}F(z)$
$f(n-a)$	$z^{-a}F(z)\quad a\geqslant 0$①
$nf(n)$	$-zF'(z)$
$-(n-1)f(n-1)$	$F'(z)$
$a^{-n}f(n)$	$F(az)\quad a>0$
$f_1(n)*f_2(n)$	$F_1(z)F_2(z)$

① 这个限制是假设 $n<0$ 时 $f(n)$ 取零的后果。

Abel 变换

一旦我们超出傅里叶变换的一维应用而涉及光学成像系统、电视光栅显示、雷达或被动检测成像等问题时，为了对它们进行简单的处理，我们就会遇到需要使用 Abel 变换的现象。当二维中的圆对称分布投影到一维时就引起这种现象。一个典型的例子是电视摄像机对一条窄线的响应；另一个例子是一个测微密度计的缝隙扫过一个照相底板上的圆周对称的密度分布时的响应。

分数阶的导数也和 Abel 变换有密切的关系，诸如固体中的热传导这样的场就会引起分数阶的导数，或者电信号通过电缆的传输也会遇到分数阶的导数。

函数 $f(r)$ 的 Abel 变换 $f_A(x)$ 一般定义为

$$f_A(x) = 2\int_x^\infty \frac{f(r)r\mathrm{d}r}{(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}\text{。}$$

很多应用场合建议选取符号 x 和 r 来分别表示同平面内的横坐标和半径。

上面的公式也可以写为

$$f_A(x) = \int_0^\infty k(r,x)f(r)\mathrm{d}r,$$

其中

$$k(r,x) = \begin{cases} 2r(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} & r > x \\ 0 & r < x \end{cases}\text{。}$$

内核 $k(r,x)$ 可以看作是 r 为变量，x 为参数的函数，随 x 的增大，它向右移动且形式也发生变化，对变量稍作变化可以得到一个只是简单移位而不改变形式的内核。这样，令 $\xi = x^2$ 和 $\rho = r^2$，再设 $f_A(x) = F_A(x^2)$ 以及 $f(r) = F(r^2)$，我们有

$$F_A(\xi) = \int_0^\infty K(\xi - p)F(\rho)\mathrm{d}\rho,$$

其中

$$K(\xi) = \begin{cases} (-\xi)^{-\frac{1}{2}} & \xi < 0 \\ 0 & \xi \geqslant 0; \end{cases}$$

或者，

$$F_A(\xi) = \int_\rho^\infty \frac{F(\rho)\mathrm{d}\rho}{(\rho - \xi)^{\frac{1}{2}}}$$

再有

$$F_A = K * F\text{。}$$

必要时，可以把 F_A 称为“F 的改进的 Abel 变换”。在把公式简化为卷积积分后，我们可以取傅里叶变换并记为

$$\overline{F_A} = \overline{K}\,\overline{F}\text{。}$$

由于

$$\overline{K}(s) = \frac{1}{(-2is)^{\frac{1}{2}}}$$

从而

$$\overline{F}=(-2\mathrm{i}s)^{\frac{1}{2}}\ \overline{F_A}=-\frac{1}{\pi}\ \frac{1}{(-2\mathrm{i}s)^{\frac{1}{2}}}\ \mathrm{i}2\pi s\,\overline{F_A},$$

据此
$$F=-\frac{1}{\pi}K*F'_A,$$

即

$$F(\rho)=-\frac{1}{\pi}\int_{\rho}^{\infty}\frac{F'_A(\xi)\mathrm{d}\xi}{(\xi-\rho)^{\frac{1}{2}}}。$$

修正的Abel积分方程的解使得F可以用F_A的导数来表示。对这个解进行分部积分，或者对 F 的变换选择不同的因子，我们可以得到一个用 F_A 的二阶导数表示的解：

$$F=\frac{2}{\pi}\mathscr{K}*F''_A$$

其中
$$\mathscr{K}(\xi)=\begin{cases}(-\xi)^{\frac{1}{2}} & \xi<0\\ 0 & \xi\geqslant 0\end{cases};$$

由于 $\overline{K}$ 永不为零，解是惟一的（除了叠加的零函数以外）。

再变换回 f 和 f_A，我们可以把解写为

$$f(r)=-\frac{1}{\pi}\int_{r}^{\infty}\frac{f'_A(x)\mathrm{d}x}{(x^2-r^2)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{\pi}\int_{r}^{\infty}(x^2-r^2)^{\frac{1}{2}}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{f'_A(x)}{x}\right]\mathrm{d}x,$$

或者如果除 $x=r_0$ 外，积分为零，并且考虑到被积函数在 r_0 处可能有冲激，我们有

$$\begin{aligned}f(r)&=-\frac{1}{\pi}\int_{r}^{r_0}\frac{f'_A(x)\mathrm{d}x}{(x^2-r^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{f_A(r_0)}{\pi(r_0^2-r^2)^{\frac{1}{2}}}\\&=-\frac{1}{\pi}\int_{r}^{r_0}(x^2-r^2)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{f'_A(x)}{x}\right]\mathrm{d}x-\frac{f'_A(r_0)}{\pi r_0}(r_0^2-r^2)^{\frac{1}{2}}。\end{aligned}$$

检验 Abel 变换的有用的关系式有

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_A(x)\mathrm{d}x=2\pi\int_{0}^{\infty}f(r)r\mathrm{d}r$$

和
$$f_A(0)=2\int_{0}^{\infty}f(r)\mathrm{d}r。$$

另一个性质是

$$K*K*F'=-\pi F;$$

即，连续两次使用操作 $K*$ 消去了微分操作；那么 F_A 是F 的半阶积分，反之，F 是 F_A 的半阶微分系数。为了证明这一点，注意到如果 $F_A=K*F$ 意味着 $F=-\pi^{-1}K*F'_A$，那么进一步可得 $F'_A=K*F'$；据此

$$K*K*F'=K*F'_A=-\pi F。$$

在表 13.9 的前 8 个例子中，在 r 和 x 大于 a 时取为零。

考虑到 Abel 变换可以化为卷积积分，它的数值计算比较简单。我们首先改变变量，然后在

ρ的离散间隔上计算$K(\rho)$和$f(\xi-\rho)$乘积的和。由于采样间隔无论选得多精细，除了一个归一化因子外，K的值证明是一样的；因此，为了永久的参考，可以建立一张通用的表格（如表13.10）。表中给出了在$\rho=\frac{1}{2}$，$1\frac{1}{2}$，…，$9\frac{1}{2}$处读取F值时立即可以使用的系数，这样的ρ的取值范围使得在$\rho=10$处F的值为0或可以忽略。表中给出了在间隔$0-1$，$1-2$，…上的K的平均值。因此在$\rho=n+\frac{1}{2}$时，值为

$$\int_n^{n+1} K(-\rho)\mathrm{d}\rho = 2(n+1)^{\frac{1}{2}} - 2n^{\frac{1}{2}}。$$

表 13.9 一些 Abel 变换

$f(r)$		$f_A(x)$	
$\prod(r/2a)$	圆盘	$2(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\prod(x/2a)$	半椭圆
$(a^2-r^2)^{-\frac{1}{2}}\prod(r/2a)$		$\pi\prod(x/2a)$	矩形
$(a^2-r^2)^{\frac{1}{2}}\prod(r/2a)$	半球	$\frac{1}{2}\pi(a^2-x^2)\prod(x/2a)$	抛物线
$(a^2-r^2)\prod(r/2a)$	抛物面	$\frac{4}{3}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\prod(x/2a)$	
$(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\prod(r/2a)$		$(3\pi/8)(a^2-x^2)^2\prod(x/2a)$	
$a\Lambda(r/a)$	圆锥	$[a(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}-x^2\cosh^{-1}(a/x)]\prod(x/2a)$	
$\pi^{-1}\cosh^{-1}(a/r)\prod(r/2a)$		$a\Lambda(x/a)$	三角形
$\delta(r-a)$	圆环冲激	$2a(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\prod(x/2a)$	
$\exp(-r^2/2\sigma^2)$	高斯	$(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sigma\exp(-x^2/2\sigma^2)$	高斯
$r^2\exp(-r^2/2\sigma^2)$		$(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sigma(x^2+\sigma^2)\exp(-x^2/2\sigma^2)$	
$(r^2-\sigma^2)\exp(-r^2/2\sigma^2)$		$(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sigma x^2\exp(-x^2/2\sigma^2)$	
$(a^2+r^2)^{-1}$		$\pi(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}$	
$J_0(2\pi ar)$		$(\pi a)^{-1}\cos 2\pi ax$	
$2\pi[r^{-3}\int_0^r J_0(r)\mathrm{d}r - r^{-2}J_0(r)] = M(r)$		$\mathrm{sinc}^2 x$	
$\delta(r)/\pi\mid r\mid$		$\delta(x)$	
$2a\,\mathrm{sinc}2ar$		$J_0(2\pi ax)$	
$\frac{1}{2}r^{-1}J_1(2\pi ar)$		$\mathrm{sinc}2ax$	

表 13.10　用于 Abel 变换和逆变换的系数

ρ	K	ρ	K	ρ	K	ρ	K
$\frac{1}{2}$	2.000	$5\frac{1}{2}$	0.427	$10\frac{1}{2}$	0.309	$15\frac{1}{2}$	0.254
$1\frac{1}{2}$	0.828	$6\frac{1}{2}$	0.393	$11\frac{1}{2}$	0.295	$16\frac{1}{2}$	0.246
$2\frac{1}{2}$	0.636	$7\frac{1}{2}$	0.364	$12\frac{1}{2}$	0.283	$17\frac{1}{2}$	0.293
$3\frac{1}{2}$	0.536	$8\frac{1}{2}$	0.343	$13\frac{1}{2}$	0.272	$18\frac{1}{2}$	0.233
$4\frac{1}{2}$	0.472	$9\frac{1}{2}$	0.325	$14\frac{1}{2}$	0.263	$19\frac{1}{2}$	0.226

当使用 N 点的细分时，可以安排 ρ 的取值范围使得当 $\rho = N$ 时 F 为 0。将所有系数乘以 $(10/N)^{\frac{1}{2}}$，或者保持系数不变，但是把结果乘以 $(10/N)^{\frac{1}{2}}$。

作为一个例子，考虑 $F(\rho) = (10-\rho)^{\frac{1}{2}}$，其修正的 Abel 变换已知为 $F_A(\xi) = \frac{1}{2}\pi(1-\xi)$。首先如手动过程一样把算法形象化，我们在单位间隔上进行计算，并把系数复制到可移动的纸带上。图 13.7 是正在进行中的计算过程。

ρ	F	K	F_A
			15.65
	3.08		
1			14.08
	2.91		
2			12.52
	2.74		
3			10.94
	2.55		
4			9.37
	2.35		
5			7.78
	2.12	2.000	
6			6.20
	1.87	0.828	
7			4.62
	1.58	0.636	
8			3.03
	1.22	0.536	
9			1.42
	0.71	0.472	
10			0
		0.427	

图 13.7　计算修正的 Abel 变换

可移动的纸带正处在用下式中 F 和 K 的相应值的乘积的和计算 $F_A(\xi)$ 的位置上：

$$7.78 = 2.12 \times 2.000 + 1.87 \times 0.828 + \cdots + 0.71 \times 0.472 \text{ 。}$$

如果 F_A 一阶可微，那么从 F_A 计算 F 的逆问题就可以通过关系 $F = -\pi^{-1} K * F'_A$ 来处理。然而直观感觉上，通过使用 F_A 的值并把可移动的纸带从下往上移动，上面所叙述的计算过程可以反过来进行。假设我们有一个便携计算器，图中纸带所处是计算 $F(5-\frac{1}{2})$ 的位置。算出 0.71×0.472，…，1.87×0.828 的乘积，并在存储器中对它们进行累加。从 7.78 减去这个乘积

和再除以 2.000 就得到了要计算的值，$F(5-\frac{1}{2}) = 2.12$。

这些卷积过程很容易编程实现。同样具有可以避免当 r 趋近于 x 时的奇点这一性质的另外一种可选择的方法如下。使用代数表达式建立一个用户定义的函数 **FNf(r)**，或者，如果以数据样本表示的径向函数可以得到，那么可以通过内插的方法计算样本点之间的 $f(r)$ 的值。下面的程序基于从 0 到 $N-1$ 的 $f(r)$ 的 N 个等间隔的整数值。增加 M 可得到更高的精度。

```
N = 10
M = 10
FOR i = 0 TO N - 1
    s = 0.5 * FNf(i/N)
    FOR j = 1 TO INT(M * SQR(N^2 - i^2))
        r = SQR(i^2 + (j/M)^2)/N
      s = s + FNf(r)
    NEXT j
    PRINT 1/N;FNr(2 * s/N/M)
NEXT i
```

下面给出一个 $f(r)=1-r$ 时的例子，平均绝对误差小于 10^{-5}。

r	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
$f(r)$	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1
$f_A(x)$	1	.9651	.8881	.7853	.6658	.5368	.4045	.2753	.1564	.0575

Radon 变换和断层摄影技术

当用一个缝隙扫描一个照相底板上的具有圆周对称的二维密度分布时，就由径向密度函数 $f(r)$ 产生了一个分布 $f_A(x)$，对此我们有一个一维 Abel 变换所用方法的例子。如果密度分布 $f(x,y)$ 不对称，但与两个坐标有关，仍然可以扫描但结果与扫描方向 θ 有关。引用每次扫描的横坐标 R，函数 $f(x,y)$ 的 Radon 变换 $g_\theta(R)$ 定义为

$$g_\theta(R)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(R-x\cos\theta-\sin\theta)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

如何对这个变换求逆，即给定扫描结果 $g_\theta(R)$——通常是在连续的 R 和一组离散的扫描方向 θ 上给出，如何得到未知函数 $f(x,y)$，这对计算机辅助断层摄影技术来说非常重要。在我们感兴趣的器官前后的肋骨所造成的多余的图像干扰了肺部的 X 射线胸片。通过没有肋骨或其他邻近组织阴影的 X 射线来获取体内一片组织的密度分布的可能性使诊断发生了革命性的变化，计算机辅助断层摄影技术（CAT 扫描）及其后的 NMR（核磁共振）成像都实现了这一点。计算前的断层摄影技术是一种使前景和背景散焦的技术，这种技术是通过在曝光期间移动 X 射线源同时以合适的速度向相对的方向移动 X 射线底板来实现的。

因子 $\delta(R-x\cos\theta-y\sin\theta)$ 的值在除了它的参数为 0 外的任何地方都是 0，即除图 13.8 中直线 $x\cos\theta+y\sin\theta=R$ 外的地方。直线 L 代表一条与原点的垂直距离为 R，且和 y 轴夹角为 θ

的缝隙。如果 θ 值固定，设为 θ_1，而 R 变化，那么对 $g_{\theta 1}(R)$ 的积分构成了密度分布 $f(x,y)$ 在直线 $\theta=\theta_1$ 上的投影，它是 R 的函数。所得的剖面被称为一个单次扫描。

求逆的实际计算方法可以通过如下方法达到，对 Radon 积分方程进行傅里叶变换，寻找求解方法，然后再变换回数据平面上进行操作，这实际上省却了数值傅里叶变换。这种技术被称为"修正的反向投影"(Bracewell 和 Riddle, 1967)，它是与射电天文成像联系起来研究的，在射电天文成像中，从天空的一个窄带中接收信号的天线扫描一个辐射的分布源，不同扫描间的窄带方向 θ 可以变化。

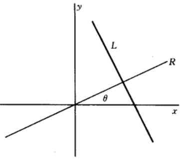


图 13.8　用线 L 在 R 的方向上移动扫描 (x,y) 平面上的密度分布生成一个投影

我们可以从傅里叶、Abel 和汉克尔变换之间存在的值得注意的关系或者从被称为投影-切片定理的推广中得到求逆过程。

Abel-Fourier-Hankel 变换环　从一个偶函数 $f(r)$ 开始，如果我们对它取 Abel 变换，然后取傅里叶变换，最后再做汉克尔变换，我们就回到了原来的函数 $f(r)$(Bracewell 1956)。例如，从位于 $r=a$ 上的环形冲激 $f(r)=\delta(r-a)$ 开始，取它的 Abel 变换（表 13.9）得到 $2a/\sqrt{a^2-x^2}\,\Pi(x/2a)$，它的傅里叶变换为 $2\pi aJ_0(2\pi as)$(第 22 章图示集)。从表 13.2 我们验证贝塞耳函数的汉克尔变换是我们开始的函数 $\delta(r-a)$。

投影-切片定理　当一个两维的密度分布仅为半径的函数时，所有上面的三个变换都是一维的，但是 $f(r)$ 能被推广为一个 x 和 y 的函数 $f(x,y)$，它的汉克尔变换可以推广为 u 和 v 的函数 $F(u,v)$。就像本章前面与汉克尔变换有关的解释一样，这两个二维函数组成了一对二维傅里叶变换对。在二维情况下思考傅里叶变换的一种方法是注意到 $F(u,0)$，它是 $F(u,v)$ 沿着 u 轴的一个切片，在二维傅里叶变换定义中令 $v=0$ 可得

$$F(u,0)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi ux}\mathrm{d}x。$$

方括号中的项是 $f(x,y)$ 在 x 轴上的投影。剩下的对 x 的积分是对投影的简单变换。结果，当给定 $f(x,y)$ 时，$F(u,v)$ 沿 u 轴的一个切片，可以通过先把 $f(x,y)$ 投影到它的 x 轴上然后再取一维傅里叶变换获得。投影-切片定理指的是在 (u,v) 平面上 $F(u,v)$ 沿任意角度 θ_1 的切片，也就是，在沿平行于 R 轴的直线的切片，可以通过对 (u,v) 平面上 $f(x,y)$ 在 R 轴上的投影进行傅里叶变换得到(Bracewell 1956)。

通过改进的反向投影进行重构　现在断层摄影技术的过程是把某个确定的函数 $f(x,y)$ 在合适数量和等间隔的角度 θ 上投影；因此变换 $F(u,v)$ 的那些部分可以用相应角度的切片推导得到。用 $F(u,v)$ 的知识，我们通过二维傅里叶变换就可以恢复 $f(x,y)$；但是要这样做，我们必须在 (u,v) 平面中的方格上插值以便能够使用可利用的算法。已经证明，这种数值内插比变换需要的时间更长。为了避免内插，我们注意到在 (u,v) 平面上，从各种一维傅里叶变换得到的数据点取决于发散的辐条状 $\theta=$ 常数。这样，点的密度和半径成反比，不均匀性可以通过乘以 (u,v) 平面上的半径来校正。设 M 是 (u,v) 平面上的空间频率，超出 M 的内容可以忽略，且

令 $q = \sqrt{u^2 + v^2}$。那么校正因子是 $\Pi(q/2M) - \Lambda(q/M)$。经过这样的校正后，二维傅里叶变换将得到所需的 $f(x,y)$。

但是对 (u,v) 平面上沿切片的值的乘法校正相应于在数据域上对原始投影 $g_\theta(R)$ 做一个相当简单的卷积操作，此操作可以产生一个改进的扫描。

$$\hat{g}_\theta(R) = g_\theta(R) * (2M\mathrm{sinc}2MR - M\mathrm{sinc}^2 MR)。$$

这样，对 Radon 变换求逆的步骤是：(a) 通过简单的卷积修正每个测量的扫描从而得到 $\hat{g}_\theta(R)$；(b) 进行反向投影；(c) 在 (x,y) 平面上累加分开的投影。反向投影就是把修正过的扫描 $\hat{g}_\theta(R)$ 均匀地分布在 (x,y) 平面上垂直于 R 轴的方向上。欲知更多细节参见 Bracewell(1995) 和 Deans(1983)。

希尔伯特变换

希尔伯特变换有许多种应用；这里所提到的应用与因果性和超出纯粹交流电相位矢量范畴的广义相位矢量有关。

我们定义 $f(x)$ 的希尔伯特变换为

$$F_{\mathrm{Hi}}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')\mathrm{d}x'}{x' - x}。$$

通过取积分的柯西主值来考虑 $x = x'$ 时的散度。可以看出 $F_{\mathrm{Hi}}(x)$ 是 $f(x)$ 的线性泛函；实际上，可以从 $f(x)$ 和 $(-\pi x)^{-1}$ 的卷积得到希尔伯特变换。为了强调这个关系，我们写为

$$F_{\mathrm{Hi}} = \frac{-1}{\pi x} * f(x)。$$

由卷积定理，我们现在就可以阐明 $F_{\mathrm{Hi}}(x)$ 的频谱是如何与 $f(x)$ 的频谱联系起来的。

$(-\pi x)^{-1}$ 的傅里叶变换是 $i\ \mathrm{sgn}\ s$（如图 13.9），对正的 s 它等于 $+\mathrm{i}$ 且对负的 s 它等于 $-\mathrm{i}$；所以希尔伯特变换相当于一种奇特的滤波，滤波后频谱的幅度保持不变，但相位根据 s 的符号改变正的或负的 $\pi/2$（如图 13.9）。

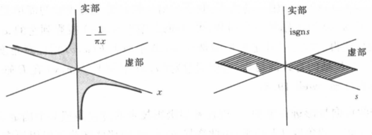


图 13.9 内核 $(-\pi x)^{-1}$ 和它的傅里叶变换 isgn$s$

因为连续应用两次希尔伯特变换就可以使所有频谱分量的相位变反，由此可以得到负的原函数。因此

$$f(x) = -\left(\frac{-1}{\pi x}\right) * F_{\mathrm{Hi}}$$

或
$$f(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_{Hi}(x')\mathrm{d}x'}{x'-x}。$$

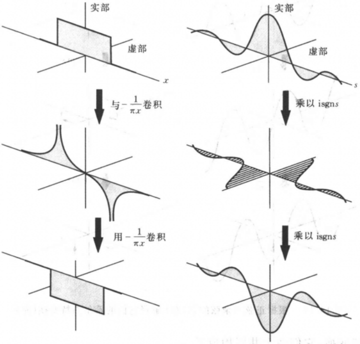


图 13.10　左边一列是一个函数和连续两次希尔伯特变换的结果，右边是相应的傅里叶变换

如果选择$[\mathrm{i}\pi(x'-x)]^{-1}$而不是$[\pi(x'-x)]^{-1}$作为内核，变换就将是严格互逆的，因为它的影响就是对谱乘以 sgn s，两次相乘后谱不发生任何变化。传统的内核牺牲了这种过程所具有的对称性但具有实函数的希尔伯特变换仍然是实函数这个性质。

可以注意到所有余弦分量的变换为负的正弦分量而且所有的正弦分量变换为余弦分量（见图 13.11）。这个结果使得偶函数的希尔伯特变换是奇函数而奇函数的希尔伯特变换是偶函数。

解析信号　考虑一个实函数 $f(t)$，我们可以把它和下面的复函数联系起来
$$f(t) - \mathrm{i}F_{Hi}(t),$$
复函数的实部为 $f(t)$。在独立变量是时间的信号分析和光学中，这个有关联的复函数被称为解析信号，而希尔伯特变换被称为 $f(t)$ 的正交函数。举例来说，$\cos t$ 的正交函数是 $-\sin t$，与 $\cos t$ 对应的解析信号是 $\exp \mathrm{i}t$。我们可以说解析信号与 $f(t)$ 的关系就像 $\exp \mathrm{i}t$ 和 $\cos t$ 之间的关系一样。

正如相位矢量法简化了交流电理论中的运算一样，解析信号在那些由于偏离绝对单频而不能使用相位矢量的场合非常有用。已调载波和激光信号就是这样的例子。图 13.12 给出了一个能被看作已调载波的函数 $f(t)$；即它是一个缓慢地增大和减弱的准单频脉冲。图中也画出

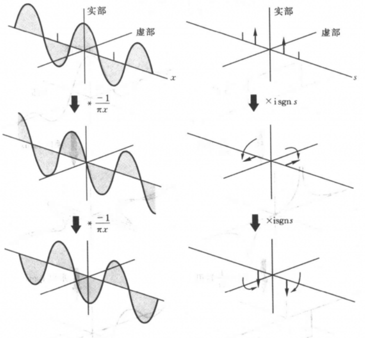


图 13.11 根据正弦和余弦的谱(右)解释它们的希尔伯特变换(左)

了它的希尔伯特变换,它们两个共同构成了一个缓慢膨胀和收缩的螺旋状复时间函数。原始函数 $f(t)$ 是这条螺旋曲线在时间轴和实轴所确定的平面(图中的垂直平面)上的投影,它的正交函数 $F_{\mathrm{Hi}}(x)$ 是在水平平面上的投影。

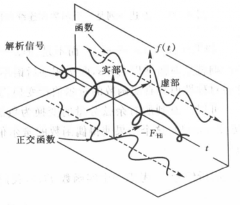


图 13.12 一个调幅载波 $f(t)$,它的正交函数 $F_{\mathrm{Hi}}(x)$ 和相关的复解析信号

如果给定平均角频率 $\bar{\omega}$,那么解析信号可以写成

$$V(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\omega}t},$$

其中 $V(t)$ 是复系数,由于它是相位矢量的推广,所以被称为"时变相位矢量"。在图 13.12 所示的情况下,$V(t)$ 是实的并且它的值缓慢地上升和下降。如果有一些频率调制,$V(t)$ 在相位上也会向前和向后摇摆。

从解释中可以看出解析信号不包含负频率分量;实际上可以通过抑制 $f(t)$ 的负频率得到解析信号。例如,注意到

$$\cos\omega t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{2},$$

我们通过抑制它的负频率项 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ 获得解析信号。还需要把所得结果加倍。为了直接证明

这一点，设 $f(t) \supset F(f)$ 且 $\hat{f}(t)$ 是通过抑制负频率并加倍以后所得的结果：

$$\hat{f}(t) \supset 2H(f)F(f)。$$

由于

$$H(f) \subset \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{\mathrm{i}}{2\pi t},$$

由此可得

$$\begin{aligned}\hat{f}(t) &= 2\left[\frac{1}{2}\delta(t) + \frac{\mathrm{i}}{2\pi t}\right] * f(t)\\ &= f(t) - \mathrm{i}\left(\frac{-1}{\pi t}\right) * f(t)\\ &= f(t) - \mathrm{i}F_{\mathrm{Hi}}(t)。\end{aligned}$$

这样 $f(t)$ 的确是解析信号，与最初的定义一样。

瞬时频率和包络　如何定义一个信号的包络还有一些问题，因为它只是偶尔涉及到信号的波形而在中间可以做任何事。类似地，准单频信号的频率也不能被明显地定义。然而，我们可以毫不犹豫地说，正弦波的幅度就是它的峰值；进一步地，只要最大值和最小值以及过零间隔保持稳定，那么时刻到时刻的频率就有相等的置信度。由于解析信号 $V(t)\exp i\bar{\omega}t$ 是对连续时间定义的，我们可以说在不是严格正弦（或单频）情况下，$|V(t)|$ 是瞬时幅度或包络，而且解析信号相位的时间变换率就是瞬时频率。

为了计算一个给定 $f(t)$ 的瞬时幅度，需要使用平均角频率$\bar{\omega}$，对一些波形来说这个参数可以用一定的置信度来指定。例如，对一个调幅信号可以取$\bar{\omega}$ 为载波频率。但一般地，$V(t)$ 和$\bar{\omega}$ 的定义并不惟一；因此如果你看到用 $V(t)$ 表示包络也不应该感到惊奇。

因果性　众所周知结果不可能先于它们的原因发生，因此一个物理系统对 $t=0$ 时的冲激的响应 $I(t)$ 对 t 的负值一定为 0：

$$I(t) = 0 \qquad t < 0$$

冲激响应满足这个条件被称为是"因果的"。这种条件有时被称为"物理可实现性"的条件，这个术语不太确切，因为它忽视了一个事实，即除了因果性以外还有其它的条件能使系统在物理上不可实现①。

考虑一个实函数 $J(t)$，最一般的因果冲激响应具有如下的形式

$$I(t) = H(t)J(t)。$$

$I(t)$ 的谱，即传输函数 $T(f)$，其中

$$T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} I(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi ft}\,\mathrm{d}t,$$

① 物理可实现性可能包括和因果性无关的另外一个意思，即 $I(t)$ 会随时间逐渐减弱而无法形成回路，例如传输线段没有一个有限的自由度。

对应于 $I(t)$ 的因果特性，$T(f)$ 一定有一个特殊的性质，从前面对解析信号的讨论中可以知道，这个性质一定是 $T(f)$ 的实部和虚部是一对希尔伯特变换。把 $I(t)$ 分为奇部和偶部：

$$I(t)=E(t)+O(t)=\frac{1}{2}[I(t)+I(-t)]+\frac{1}{2}[I(t)-I(-t)]。$$

现在由于 $O(t)=\operatorname{sgn}t E(t)$，并且 $\operatorname{sgn}t \supset -\mathrm{i}/\pi f$，

$$I(t)=(1+\operatorname{sgn}t)E(t)\supset G(f)+\mathrm{i}(\frac{-1}{\pi f})*G(f)。$$

因此所有的因果传输函数 $T(f)$ 都有如下形式

$$T(f)=G(f)+\mathrm{i}B(f),$$

其中 $B(f)$ 是 $G(f)$ 的希尔伯特变换；即，

$$B(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(f')}{f'-f}\mathrm{d}f',$$

和

$$G(f)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B(f')}{f'-f}\mathrm{d}f'。$$

表 13.11 列出了一些希尔伯特变换。

表 13.11 一些希尔伯特变换

$f(x)$	$F_{\mathrm{Hi}}(x)$
常数	0
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos^2 x$	$-\frac{1}{2}\sin 2x$
$\sin^2 x$	$\frac{1}{2}\sin 2x$
$\operatorname{cas} x$	$\operatorname{cas}(-x)$
e^{ix}	ie^{ix}
$x^{-1}\sin x$	$x^{-1}(\cos x-1)$
$\Pi(x)$	$\pi^{-1}\ln\|(x-\frac{1}{2})/(x+\frac{1}{2})\|$
$\Lambda(x)$	$\pi^{-1}\{\ln\|(x-1)/(x+1)\|+\ln\|x^2/(x^2-1)\|\}$
$\Lambda(x)\operatorname{sgn}x$	$-\pi^{-1}\{(1-x)\ln\|x/(x+1)\|+1\}$
$1/(1+x^2)$	$-x/(1+x^2)$
$\operatorname{sinc}'x$	$-\pi\operatorname{sinc}x-\frac{1}{2}\pi\operatorname{sinc}^2\frac{1}{2}x$
$\delta(x)$	$-1/\pi x$
$\delta'(x)$	$1/\pi x^2$

续表 13.11

$f(x)$	$F_{\mathrm{Hi}}(x)$
$\delta''(x)$	$-2/\pi x^3$
$\lvert x \rvert^{\frac{1}{2}}$	$\lvert x \rvert^{-\frac{1}{2}}$
$\lvert x \rvert^{\frac{1}{2}}\operatorname{sgn}x$	$-\lvert x \rvert^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sgn}x$
$(1-x^2)\prod(x/2)$	$-\pi^{-1}\{(1-x^2)\ln\lvert(x-1)/(x+1)\rvert-2x\}$
$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\prod(x/2)$	$-x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}[1-\prod(x/2)]\operatorname{sgn}x$
$(1+x)/(1+x^2)$	$(1-x)/(1+x^2)$
$\mathrm{II}(x)$	$x/\pi(\frac{1}{4}-x^2)$
$\mathrm{I_I}(x)$	$-\frac{1}{2}\pi(\frac{1}{4}-x^2)$
$\mathrm{III}(x)$	$-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cot[\pi(x-n)]$

计算希尔伯特变换

看起来 $f(x)$ 的希尔伯特变换似乎能用下面的方法来计算。首先在 x 的单位间隔上离散化。取它的离散傅里叶变换，乘以 $i\operatorname{sgn}s$（它是 $-i/\pi x$ 的傅里叶变换），最后再求逆变换。然而，更简单的方法是，离散化 $f(x)$ 并与表示 $-1/\pi x$ 的一组系数进行卷积。例如，如果认为半跨度有 $N=5$ 个采样间隔就足够了的话，那么 $2N+1$ 个系数为

{0.64 0.80 .106 .159 .318 0 −.318 −.159 −.106 −.080 −.064 }。

把每个希尔伯特变换值的相关性限制在紧邻的点比涉及更远的 $f(x)$ 的特性看起来更满意。当仅用 10 个跨度（或任何有限的宽度）时我们关注远距离的原因和被抛弃的系数有关，因为所抛弃的系数的和为无穷大（在左边）或负的无穷大（在右边）。通过与有限的系数卷积，我们相信两个无穷大将会对消，但是在与数据样本相乘后它们能怎么办?第二个要关心的是离散采样间隔，它必须足够小以便减小 $\lvert s \rvert > 0.5$ 的信号分量的混叠。似乎可以通过傅里叶变换的方法减轻混叠，但实际上是不行的。

首先注意到卷积函数 $h(x)$ 代表一串冲激

$$h(x)=\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{\pi n}\delta(x+n)-\frac{1}{\pi n}\delta(x-n)\right]$$

它的傅里叶变换为

$$H(s)=\sum_{n=1}^{N}\frac{2i}{\pi n}\sin 2\pi ns,$$

它可以和理想的传输函数 $i\operatorname{sgn}s$ 进行比较（图 13.13）。相位是正确的，对正的 s 为 $\pi/2$，对负的 s 为 $-\pi/2$，但是幅度不再是理想的单位幅度（见细实线），不论对高频还是低频都有较大差别，仅在峰值约为 $0.45N$ 附近的一个相对窄的频带内和单位传输函数近似一致。在 $x=\pm\frac{1}{2}$，$1\frac{1}{2}$，… 处而不是 x 的 11 个整数值上对 $1/\pi x$ 采样导致相同的结果。

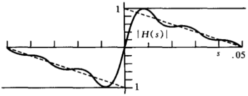


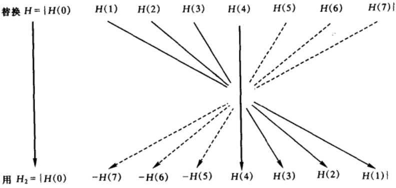
图 13.13　希尔伯特变换所需的幅度为 sgn$s$ 的传输函数（细线）和用 11 个元素实际得到的传输函数（曲线）作比较。使用同样离散间隔的傅里叶方法也是同样失败的效果（虚线）

现在用傅里叶方法得到传输函数不再有相似性，尽管事实上乘积因子 i sgn s 对所有的 s 都是单位幅度的，但是我们得到的传输函数根据数据集的长度或多或少地紧靠从(0,1) 到(0.5,0) 的直线。产生这种锯齿行为的原因是由于欠采样带来的不可避免的混叠。

对一个诸如太阳黑子数序列(Bracewell 1985) 这样的窄带振荡函数，我们可以获得一个满意的包络，但是通常建议把 $N=5$ 的卷积方法在数据所占频带的一些正弦信号上进行试验。那么传输函数在 1 以下的下降就能被经验地校正。通过调整采样间隔就可以减小出现在所期望的毗邻数据点之间的包络上的波动。通过改变傅里叶方法以及在感兴趣的频带上除以 $|H(s)|$ 调整傅里叶变换可以得到更进一步的改善。

对任何有限持续期的信号都可以进行数值希尔伯特变换，但是当希尔伯特变换用于解析情况时会有一些不明显的令人不愉快的属性。

希尔伯特变换可以按如下方式用离散哈特利变换来实现。设数据 $f(\tau)$ 用 τ 从 0 到 $N-1$ 的值确定，求出哈特利变换 $H(\nu)$ 并交换 $N/2-1$ 对值形成 $H_2(\nu)$。在每个交换中，其中的一个元素按下图方式改变符号。这样取 $f(t)$ 的哈特利逆变换就得到了希尔伯特变换(Pei 和 Jaw, 1989)。



分数阶傅里叶变换

正如第 2 章提到的一样，重复使用傅里叶变换 $\mathscr{F}\mathscr{F}f(x)$ 得到 $f(-x)$，而进行四次傅里叶变换 $\mathscr{F}\mathscr{F}\mathscr{F}\mathscr{F}f(x)$ 就回到原地得到原来的 $f(x)$。在两维情况下 $\mathscr{F}\mathscr{F}f(x,y)$ 将得到 $f(-x,-y)$，它可以看作 $f(x,y)$ 旋转了一个角度 π，而 $\mathscr{F}\mathscr{F}\mathscr{F}\mathscr{F}f(x,y)$，或者简写为 $\mathscr{F}^4$，就再旋转了角度 π 回到

最初的 $f(x,y)$。

设符号 $\mathscr{F}^a$ 表示连续使用 a 次傅里叶变换，我们已经解释了 $a=1,2$ 和 4 时的 $\mathscr{F}^a$，可以很容易地推广到 a 是任何整数值的情况，如 0 和 3；$\mathscr{F}^{-1}$ 表示逆傅里叶变换，它的内核为 $\exp i2\pi sx$。对 a 为整数的 a 阶傅里叶变换有

$$\begin{aligned}
&\text{一致性} \quad \text{当 } a=1 \text{ 时有 } \mathscr{F}^a=\mathscr{F}, \\
&\text{叠加性} \quad \mathscr{F}^a\mathscr{F}^b=F^{a+b} \\
&\text{交换性} \quad \mathscr{F}^a\mathscr{F}^b=F^bF^a, \\
&\text{线性} \quad \mathscr{F}^a(f+g)=\mathscr{F}^af+\mathscr{F}^ag。
\end{aligned}$$

当 a 不仅限于整数时，是否有一种代数推广仍然保持这组理论性质？例如，一个半阶的傅里叶变换 $\mathscr{F}^{\frac{1}{2}}$ 是否有意义？要求它具有上述性质；特别地，连续使用两次半阶变换应该呈现出叠加性，这样就得到普通的傅里叶变换。

当用第 11 章的方法计算 FFT 时，N 个值的数据集合被置于一个连续的阶段中，直到达到一个最终的结果即所求的变换。中间阶段可以被看作部分的变换，中间的一个可能就是一个半阶变换的候选者。为了研究这个思想，我们必须处理如下事实，仅对 $N=8,32,\cdots$ 有一个中间阶段，而且除了 1/2 外的 a 值也有类似的约束。置换操作也必须分布在所有阶段，而不是集中在开始或结束阶段，每个阶段所得到的流图也必须是一样的。

然而，这个讨论提供了一个开发用于计算的快速算法的概念。二维衍射理论的一个例子提供了一个物理的方法，在二维衍射中一个平面上的场分布能够激励一个平行的平面，由 Fraunhofer 衍射，这个平面上的场分布就是 $f(x,y)$ 的二维变换。因此中间平面上的场分布就是一个 $0<a<1$ 的分数变换。第一个平面上的孔的衍射在空间中传播，最终逼近无穷远处平面上的傅里叶变换，通过在 (x,y) 平面后插入一个焦距为 f 的单透镜压缩这种结构，因此变换将出现在附近的透镜的焦平面（在 $z=f$ 处）上。在计算的情况下会有一个难点，我们记得置换操作通常集中在一个单一的阶段。在透镜的情况下就是聚焦集中在一个地方。

然而，聚焦实际上是可以分配的（图 13.14）。一种方法是用几个分布在函数平面和变换平面之间的薄透镜代替原透镜。另外某些现有光纤可以实现连续聚焦，这种光纤的任何切片就是一个相当于薄透镜的圆盘。透镜通过中轴处变厚实现聚焦，这样相对于外部光线延迟中轴光线从而满足所要求的所有的光线在到达焦点时具有相同的相位（即聚焦）；光纤的圆切片通过其轴上具有较大的折射率来延迟中轴光线。

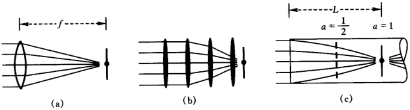


图 13.14　在标有 · 的平面上产生傅里叶变换的三种聚焦安排

(a) 焦距长为 f 的透镜；(b) 一组彼此隔开的薄透镜；(c) 具有径向梯级折射率的光纤

让折射率从轴的中心值 n_0 开始按照公式 $n=n_0(1-r^2/h^2)$ 呈二次下降。这样的一种介质

被称为梯级折射率媒体。入口平面 $z=0$ 上的场分布 $f(x,y,0)$ 产生了 $z=L$ 平面上的傅里叶变换(对应于 $a=1$),其中 $L=\pi h/2\sqrt{2n_0}$。半阶变换($a=\frac{1}{2}$) 出现在一半的距离上,其它的分数阶变换出现在与孔径之间的距离为 aL 的地方。这种梯级媒体中的波传播的详细理论是下面的分数阶傅里叶变换定义的背景。

回到一维独立变量,可以用时间 t 来说明,设 $f(t)$ 具有傅里叶变换 $F(f)$,我们定义它的 a(其中 a 为 0 到 1 之间的小数) 阶分数傅里叶变换为

$$\mathscr{F}^a f(t)=F_a(f)=\frac{e^{i(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\phi)}}{\sqrt{\sin\phi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\exp\left[-i2\pi\frac{ft-\frac{1}{2}(t^2+4\pi^2f^2)\cos\phi}{\sin\phi}\right]dt,$$

其中 $\phi=\frac{1}{2}\pi a$。这个定义来自于 Namias(1980),通过消去因子 $\sqrt{2\pi}$,它和第 2 章的方式 1 是一致的。为验证一致性,令 $a=1$,我们发现 $F_1(f)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\exp(-i2\pi ft)dt$,它和 $F(\ )$ 是一样的。当 $a\to 0$ 时,一个复杂的极限过程(McBride and Kerr,1987) 可以证明定义表达式趋于原始函数 $f(\ )$。使用频率 f(它的单位是每单位时间一个周期) 作为变换的独立变量可以使表达式比较熟悉。一个新奇的性质是分数傅里叶变换从时域到频域连续渐变,如果独立变量取为无量纲的量,这个特性就被掩盖了。分数傅里叶变换的一些定理和例子如下。

移位定理 如果 $f(t)$ 的分数傅里叶变换为 $F_a(f)$,那么

$$\mathscr{F}^a f(t-T)=e^{-iT\sin\phi(2\pi f-\frac{1}{2}T\cos\phi)}F_a(f-T\cos\phi)。$$

微分定理

$$\mathscr{F}^a f'(t)=(i2\pi f+\cos\phi\frac{d}{df})F_a(f),$$

$$\mathscr{F}^a f''(t)=(i2\pi f+\cos\phi\frac{d}{df})^2F_a(f),$$

$$\mathscr{F}^a tf(t)=-(2\pi f\cos\phi+i\sin\phi\frac{d}{2\pi df})F_a(f),$$

$$\mathscr{F}^a t^2f(t)=(2\pi f\cos\phi+i\sin\phi\frac{d}{2\pi df})^2F_a(f)。$$

分数卷积定理

$$f(t)*^a g(t)=e^{-ibt^2}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-ib\tau^2}g(t-\tau)e^{ib(t-\tau)^2}d\tau,$$

其中 $b=\frac{1}{2}\cot(\frac{1}{2}\pi a)$

变换的例子

$$\mathscr{F}^a\delta(t)=\frac{e^{i(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\phi)}}{\sqrt{\sin\phi}}e^{i4\pi^3}f^2\cot\phi。$$

$$\mathscr{F}^a\delta(t-T)=\frac{e^{i(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\phi)}}{\sqrt{\sin\phi}}e^{-i}\frac{2\pi fT-\pi(4\pi^2f^2+T^2)\cos\phi}{\sin\phi}。$$

$$\mathscr{F}^a[\delta(t+T)+\delta(t-T)] = \frac{e^{i(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\phi)}}{\sqrt{\sin\phi}} e^{i\pi(4\pi^2 f^2+T^2)\cot\phi} 2\cos(\frac{2\pi fT}{\sin\phi})。$$

$$\mathscr{F}^a H_n(\sqrt{2\pi}t)e^{-\pi t^2} = e^{ina} H_n(\sqrt{2\pi}s)e^{-\pi f^2},$$

其中 $H_n(x)$ 是 Hermite 多项式(见习题 8.25),且正交函数 $H_n(\sqrt{2\pi}x)e^{-\pi t^2}$ 是分数傅里叶变换的特征函数。

应用　Namias(1980) 阐述了在一维或多维中求解 Schrodinger 和其它二阶微分方程的应用。在光学中的应用,尤其是光纤(Mendelovic 和 Ozaktas, 1993; Ozaktas 和 Mendelovic, 1993a) 和光信息处理系统(Ozaktas 和 Mendelovic, 1993b) 也已经有报告并正在继续研究。Lohmann(1995) 建立了分数傅里叶变换和具有时频分析意义的 Wigner 分布的旋转(Mendlovic 等, 1996) 之间的关系。Sheppard(1998) 推导出了自由空间衍射和分数傅里叶变换的关系,而 Kutay 和 Ozaktas(1998) 证明了光学成像的重建。

注意到对复积分操作的各种缺点,Mendlovic 等(1995) 从 Bracewell 等(1985) 提到的技术入手,为二维光 Hartley 变换建立了一种实的分数光学变换。如果 $V(t)$ 有一维 Hartley 变换 $H(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\text{cas}2\pi ft\,dt$ 那么对 a 阶的分数 Hartley 变换我们有

$$H_a(f) = \frac{1}{\sqrt{\sin\phi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\text{cas}\left[\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\phi\right)+2\pi\frac{ft-\frac{1}{2}(t^2+4\pi^2 f^2)\cos\phi}{\sin\phi}\right]dt。$$

预期未来的应用会出现在透镜系统设计领域。其它的类似于光导出现场合的物理分支包括:需要使用磁聚焦的离子束(Pierce,1954) 和静磁物理,其中 5 ～ 15 kHz 的无线电波从闪电泄漏入管道,管道把辐射导向到相对的半球(Helliwell,1965)。量子机械谐波振荡器波动方程和梯级指数光纤以及激光腔的自然模式相同,而且同时还是分数傅里叶变换算子的特征函数,这是令人吃惊的。分数傅里叶变换为一些旧课题提供了新的天地。

对一个独立的基于 1 的分数根而不是传统的 N 次根 $\exp(-i2\pi/N)$ 的离散变换,参见 Bailey 和 Swartztrauber(1990)。

参考书目

Ahmed, a. , T. Natarajan and K. Rao: "Discrete Cosine Transform" *IEEE Trans. comp.*, vol. C-23, pp. 90-03, 1974.

Bailey, D. H. , and P. N. Swartztrauber: "The Fractional Fourier Transform and Applica-tions," *SIAM Review*, vol. 33, 389-404, 1990.

Bracewell, R. N. : "Sunspot Series Envelope and Phase," *Austral. J. Physics*, vol. 38, pp. 1009-1025, 1985.

Bracewell, R. N. : "Affine Theorem for the Hartley Transform of an Image," *Proc. IEEE*, vol. 82, pp. 381-387, 1994.

Bracewell, R. N. : "Two-dimensional Imaging," Prentice-Hall, Englewood cliffs, New Jersey, 1995.

Bracewell, R. N. , and A. C. Riddle: "Inversion of Fan Beam Scans in Radio Astronomy," *Astrophys*. J. , vol. 150, pp. 427-434, 1967.

Bracewell, R. N. , K. -Y. Jha, and Y. -H. Wang: *Electronics Letters*, vol. 29, p. 304, 1993.

Bracewell, R. N. , H. Bartelt, A. W. Lohmann, and N. Streibl: "Optical synhesis of the Hartley Transform," *Appl. Opt.*, vol. 24. pp. 1401-1402, 1985.

Deans, S. R. : "The Radon Transform and Some of Its Applications," Wiley, New York, 1983.

Erdélyi, A. ed. : "Tables of Integral Transform," McGraw-Hill, New York, 1954.

Helliwell, R. A. : "Whistlers and Related Ionosperic Phenomena," Stanford University Press, Stanford, Calif. , 1965.

Lohmann, A. W. : "Image Rotation, Wigner Rotation, and the Fractional Fourier Transform," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 10, pp. 2181-2186, 1993.

Lohmann, A. W. : "A Fake Zoom Lens for Fractional Fourier Experiment," *Opt. Comm.*, vol. 115, pp. 437-443, 1996.

Lohmann, A. W. , D. Mendlovic, and Z. Zalevsky: "Fractional Transformations in Optics," *prog. in Optics*, vol. 38, pp. 159-175, 1987.

McBride, A. C. , and F. H. Kerr: "On Namias's Fractional Transform," *IMA J. Appl. Math.*, vol. 39, pp. 159-175, 1987

Mendlovic, D. , and H. M. Ozaktas: "Fractional Fourier Transformations and Their Optical Implementation, I, *J. Opt. Soc. Am.* A , vol. 10, pp. 1875-1881, 1993.

Mendlovic, D. , Z. Zalesky, N. Konforti, R. G. Dorsch and A. W. Lohmann: "Incoherent Fractional Fourier Transform and Its Optical Implementation," *Appl. Opt.*, vol. 34, pp. 7615-7620, 1995.

Mendlovic, D. , H. D. Ozaktas, and A. W. Lohmann: "Graded-index Fibers, Wigner-distribution Functional Fourier Transform," *Appl. Opt.*, vol. 33, pp. 6188-6193, 1994

Mendlovic, D. , H. D. Ozaktas, and A. W. Lohmann: "Graded-index Fibers, Wigner-distribution Functional, and the Fractional Fourier," *Appl. Comm.*, vol. 33, pp. 6188-6193, 1996.

Namias, V. : "The Fractional Order Fourier Transform and Its Application to Quantum Mechanics," *J. Inst. Maths Apllics.*, vol. 25, pp. 241-265, 1980

Ozaktas , H. M. , and D. Mendlovic: "Fractional Fourier Transformations and Their Optical Implementation II," *J. Opt. Soc. Am. A.* vol. 10, pp. 2522-2531, 1993a.

Ozaktas , H. M. , and D. Mendlovic: "Fourier Transforms of Fractional Order abd Their Optical Interpretation," *Opt. Comm.*, vol. 101, pp. 163-169, 1993b.

Ozaktas , H. M. , B. Barshan, D. Mendlovic, and L. Onural: "Convolution, Filtering, and Multiplexing in Fractional Fourier Domains and Their Relation to Chip and Wavelet Transforms," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 11, pp. 547-549, 1994.

Pei, S-C, and S-B Jaw: "Discrete Hilbert Transform by FHT," *IEEE Trans. Circuits System*, vol. 36, pp. 1251-1252, 1989.

Pierce, J. R. : "Theory and Design of Electron Beams," Van Nostrand, New York, 1954.

Sheppard, C. J. : "Free-space Diffraction and the Fractional Fourier Transform," *J. Mod. Opt.*, vol. 45, pp. 2097-2103, 1998.

Wang, S. , and N. George: "Fresnel Zone Transforms in Spatially Incoherent Illuminations," *Appl. Opt.*, vol. 24, pp. 842-850, 1985.

习题

1. 证明下列与 $f(x)$ 及其希尔伯特变换 $F_{Hi}(x)$ 有关的定理：

(a) $f(ax) \supset F_{Hi}(ax)$　　（相似性）

(b) $f(x)+g(x) \supset F_{Hi}(x)+G_{Hi}(x)$　　（叠加性）

(c) $f(x-a) \supset F_{Hi}(x-a)$　　（移位）

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f^*(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\mathrm{Hi}}(x)F_{\mathrm{Hi}}^*(x)\mathrm{d}x$ （功率）

(e) $\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)f(x-u)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\mathrm{Hi}}^*(x)F_{\mathrm{Hi}}(x-u)\mathrm{d}x$ （自相关）

(f) $f * g \supset F_{\mathrm{Hi}} * G_{\mathrm{Hi}}$ （卷积）

2. 卷积的希尔伯特变换 令 $\mathscr{H}f$ 表示 $f(x)$ 的希尔伯特变换，证明卷积的希尔伯特变换能表示为

$$\mathscr{H}(f*g) = \mathscr{H}f*g = f*\mathscr{H}g。$$

3. 自相关 解释为什么一个函数和它的希尔伯特变换有同样的自相关函数。

4. 唯一性 由于 1 的希尔伯特变换为零所以一般认为希尔伯特变换不是惟一的。因为零的逆变换可以是任何常数，所以任何函数的希尔伯特变换都不确定地叠加了一个常数。仔细研究这个问题并且做一个有关惟一性问题的权威报告。

5. 与以下波形 $\operatorname{sinc}t$，$\exp[-(t-t_0)^2]\cos\omega t$，$(1+M\cos\Omega t)\cos\omega t$ 对应的解析信号是什么？作出三维草图显示解析信号和它的两个投影。

6. 建立希尔伯特变换对 通过分离开以下物理可实现冲激响应函数 $\exp(-t)H(t)$，$t\exp(-t)H(t)$，$\Lambda(t-1)$，$\exp(-t)\cos\omega t H(t)$ 的傅里叶变换的实部和虚部产生希尔伯特变换对。

7. 通过取下列物理可实现冲激响应函数的奇部和偶部的傅里叶变换生成希尔伯特变换对：

$$\Lambda(t)H(t),\ \Pi\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

8. t 的一个实函数当 $t<1$ 时为零，证明它的傅里叶变换的实部和虚部构成了一个希尔伯特变换对。

9. 提前的因果性 对 $t<-1$ 时为零的 t 的一个实函数的傅里叶变换，我们能说些什么？

10. 设一个滤波器的传输函数 $T(f)$ 表示为

$$T(f) = \mathrm{e}^{\Theta(f)},$$

其中 $\Theta(f)$ 是复的电长度，证明 $\Theta(f)$ 是 hermitian 的。

11. 上题中，设

$$\Theta(f) = \alpha(f) + \mathrm{i}\beta(f),$$

其中 $\alpha(f)$ 是滤波器的增益，而 $\beta(f)$ 是滤波器的相位变化。这样如果

$$T(f) = G(f) + \mathrm{i}B(f),$$

那么

$$\alpha(f) = \log(G^2+B^2)\frac{1}{2} = \log|T|$$

且

$$\beta(f) = \tan^{-1}\frac{B}{G} = \operatorname{pha}T。$$

这就证明了 $\Theta(f)$ 是 hermitian 的，即 $\Theta(-f) = \Theta^*(f)$，或者 $\alpha(f)$ 是偶函数而 $\beta(f)$ 是奇函数。为了证明这一点，只假设 $T(f)$ 是 hermitian 的[$I(t)$ 是实的]可以吗？另外，假如是这样的话，如果 $T(f)$ 是因果的，$\alpha(f)$ 和 $\beta(f)$ 还能呈现出其它什么样的性质？

12. 因果滤波器 如果 $G(f)+\mathrm{i}B(f)$ 是一个因果滤波器的传输函数，证明

$$B(f)=-\frac{2f}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{G(u)}{f^2-u^2}\mathrm{d}u$$

和

$$G(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{uB(u)}{f^2-u^2}\mathrm{d}u\ 。$$

13. 一个 hermitian 函数的希尔伯特变换是什么样子的？

14. 带限函数 证明一个带限函数的希尔伯特变换是带限的。

15. 函数 $f(t)$ 是带限的，也就是说仅根据 $f(t)H(-t)$ 的知识就可以推导出整个 $f(t)$。分析上述论断。

16. 证明汉克尔变换等价于一个 Abel 变换再加上一个一维傅里叶变换，或者

$$2\pi\int_0^{\infty}\mathrm{d}rJ_0(2\pi\xi r)r\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}s\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi rs}\int_s^{\infty}\mathrm{d}x2xf(x)(x^2-s^2)^{-\frac{1}{2}}=f(\xi)。$$

17. Z 变换 设冲激序列 $\sum_0^{\infty}f(n)\delta(t-n)$ 在区域 $\alpha<\mathrm{Re}p<\beta$ 内存在拉普拉斯变换。证明在 z 平面的圆环 $\mathrm{e}^{-\beta}<|z|<\mathrm{e}^{-\alpha}$ 内，序列 $f(n)$ 的 Z 变换存在。

18. 证明下面的 Hankel 变换对。

$J_0(2\pi ar)$	$(2\pi a)^{-1}\delta(q-a)$
$J_0^2(2\pi ar)$	$\pi^{-2}q^{-1}(\pi^{-2}-q^2)^{-\frac{1}{2}}\Pi(\pi q/2)$
$\mathrm{jinc}r\equiv(2r)^{-1}J_1(\pi r)$	$\Pi(q)$
jinc^2r	$\frac{1}{2}[\cos^{-1}q-q(1-q^2)^{\frac{1}{2}}]\Pi(q/2)$
$r^{-n}J_n(r)$	$2\pi(1-4\pi^2q^2)^{n-1}\Pi(\pi q)/2^{n-1}(n-1)!$
$\exp(\mathrm{i}r^2)$	$\mathrm{i}\pi\exp(-\mathrm{i}\pi^2q^2)$
sinc^2ar	$(\pi a^2)^{-1}\cosh^{-1}(a/q)$

19. 剪切定理 如果 $f(x,y)$ 的傅里叶变换是 $F(u,v)$，证明 $f(x,y-\alpha x)$ 的傅里叶变换为 $F(u+\alpha v,v)$。

20. 瞬时音调 在耳朵中产生 $0.01\cos[2\pi(500t+50t^2)]\mathrm{N/m^2}$ 气压变化的声波被称为带升调的中度高纯音调(超过 0.1 $\mathrm{N/m^2}$ 的参考标准 54 dB)。在 $t=0$ 时频率为 500Hz 并以每秒 100Hz 的速度上升，2 ～ 3 分钟后当它超过听力极限后消失。

(a) 需要多长时间音调可以达到 1 个 8 度音阶(1) 从 500Hz 开始；(2) 从 6 000Hz 开始。

(b) 计算每秒一个半音的频率变化率。

(c) 建立一个可以被耳朵感觉到的均匀升调的纯音调的波形。使这个音调以 100Hz 每秒的速度上升到 500Hz。

21. 二维衍射 一块 300 公顷的被耕过的地，它的长为宽的 3 倍，一米有三个犁沟。地的长轴方向为北偏东 20°。在 u 轴向东的(u,v) 平面上，画出地的表面高度 $h(x,y)$ 的二维傅里叶变换的草图并标出它的主要特征的尺寸。假设犁田可以产生傅里叶变换。

22. 二维变换 一个菱形孔径天线的长对角线为 N 个波长短对角线为 n 个波长。如果 N 和 n 相等，孔径是方的，我们知道角谱是 $\mathrm{sinc}u\mathrm{sinc}v$，在 $u=\pm1$，$v=\pm1$ 等方向上将是零谱线。

由此出现了下面的争论："零谱线与方形孔径的四个方向的对称有关，两个与边平行，两个与对角线平行。但是菱形孔径仅关于对角线对称。这使得在离散方向的格子上，角谱为 0，但无论顶角偏离 90° 多么小，零谱线都被毁坏了。"这正确吗？

23. X 射线衍射　在晶体某个平面上的原子位于间隔为 0.54 pm 的方格上，由于 $^2\text{III}(x, y)$ 的二维傅里叶变换是 $^2\text{III}(u, v)$，当用 X 射线照射它时，正如所期望的那样产生方形图案的衍射点。现在，用一个微声波穿过该晶体，使上面提到的平面受到周期剪切。同事们给出了下列论断。

(a) 衍射点将被移位，移位的方向取决于平面上波的方向。

(b) 衍射点将只在一个方向被加宽。

(c) 衍射点将被扩大。

(d) 点的结构可能会被破坏，因为为了防止波长极短 X 射线的干扰，晶体的应力会很大，而点的位置与晶体的应力有关。

(e) 和点的大小相比，任何影响都很小以致不可检测。

评论以上观点。

24. 三维衍射　射向晶体的 X 射线被轨道电子散射了。因此原则上就有可能通过观察所有方向的散射强度来得到晶体中的电子密度，从而有可能推论出各种原子核的位置，即使原子核本身是不可探测的。假设在球对称情况下电子密度是 $\rho(r)$。证明散射强度 $K(s)$ 仅是一个变量的函数，且 $\rho(r)$ 可以用下式计算

$$\rho(r) = 4\pi\int_0^{\infty} K(s)\,\text{sinc}\,2rs\,\mathrm{d}s$$

s 的物理意义是什么？一个水晶物质如何能在任何情况下都被看作球对称的？

25. 三维卷积　考虑一个球函数 $\Pi(\frac{r}{2})$，即 x, y, z 的一个函数，它在单位半径的球内等于 1 而在球外等于 0。证明它的三维自相关函数（或自卷积）是

$$\Pi(\frac{r}{2}) *** \Pi(\frac{r}{2}) = (\frac{2}{3}\pi)(2 - \frac{3r}{2} + \frac{r^2}{8})\Pi(\frac{r}{4})。$$

26. 二维冲激　通过给出(a) 冲激所在的轨迹；(b) 轨迹上每一点的线性密度，说明以下的二维冲激符号的本质：$\delta(x+y)$，　$\delta(xy)$，　$\delta(\sin\theta)$，　$\delta(x^2+y^2-1)$，　$\delta(x^2+y^2)$。

27. 汉克尔变换的微分定理　证明 $(rf)' \supset -(qF)'$ 和 $f' \supset -[q\mathscr{H}\{r^{-1}f\}]'$。

28. 汉克尔变换的微分定理　证明 $rf'(r) \supset -q^{-1}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}[q^2F(q)]$。

29. 汉克尔变换定理　证明 $f(r) = \mathscr{H}\{q^{-1}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\mathscr{H}\{r^{-1}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}f(r)\}\}$。

30. 汉克尔变换例子　证明 $r^2\exp(-\pi r^2)$ 的汉克尔变换是 $(\pi^{-1}-q^2)\exp(-\pi q^2)$。

31. 汉克尔变换　证明 $\int_0^{\infty} J_1(x)J_0(ax)\,\mathrm{d}x = H(1-a^2)$。

32. 汉克尔变换例子　证明 $(4\pi r^2)^{-1}J_2(\pi r)$ 的汉克尔变换是 $(\frac{1}{4}-q^2)\Pi(q)$。

33. 柯西主值　我们常常使用惯用语"曲线 $f(x)$ 下的面积"表示从 $-\infty$ 到 ∞ 的积分。从

我们对面积的经验中，我们可以直观感觉到 $f(x)$ 下的面积和 $f(x+1)$ 下的面积是一样的。你能证明$\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}x\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}(x+1)\,\mathrm{d}x$ 吗？

34. 圆对称下的径向采样 从间隔某个距离 q 的两个分开的点接收一个恒星发出的光，两个光学波形的复相关是确定的。可以证明这个复数是恒星盘上亮度分布 $b(r)$ 的汉克尔变换 $B(q)$ 的一个值(假设亮度分布是圆周对称的)。(如果 r 用弧度进行度量，那么 q 就用波长进行度量。) 由于恒星是有限范围的，在等间隔的距离上对变换进行采样就足够了。说明如何用 $q=0,\ a,\ 2a,\ \cdots$ 时的 $B(q)$ 的值确定 $b(r)$。

35. Abel 变换 设对 $f(\cdot)$ 连续进行两次 Abel 变换。证明所得到的函数 $f_{AA}(x)$ 等于 $f(\cdot)$ 在半径 x 外的体积，即 $f_{AA}(x)=2\pi\int_x^{\infty} rf(r)\mathrm{d}r$。(这道习题由 S. J. Wernecke 提供。)

36. 二维自相关 设 $f(r)$ 的 Abel 变换是 $f_A(x)$。如果我们取 $f(r)$ 的二维自相关，就得到另一个圆周对称的函数。证明二维自相关的 Abel 变换是 Abel 变换 $f_A(x)$ 的一维自相关，即 $f(r)**f(r)$ 的 Abel 变换是 $F_A(x)*f_A(x)$。

37. Abel-Fourier-Hankel 循环变换 我们可以通过一组四个函数在空间中的安排展现 Abel-Fourier-Hankel 循环变换(R. N. Bracewell, Austral. J., vol. 9, p. 198, 1956, 和习题 13.16)。因此下列关系式：

jinc$r$ 的 Abel 变换是 sinc$x$

sinc$x$ 的傅里叶变换是 $\Pi(q)$

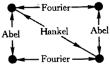
$\Pi(q)$ 的汉克尔变换是 jinc$r$

$\Pi(q)$ 的 Abel 变换是$(1-4u^2)^{\frac{1}{2}}\Pi(u)$

$(1-2u^2)^{\frac{1}{2}}\Pi(u)$ 的傅里叶变换是 jinc$r$，

其中 $\mathrm{jinc}\,r=(2r)^{-1}J_1(\pi r)$，可以通过把四个函数成组的放在方框中紧凑地表示。

jinc$r$	$(1-4u^2)^{\frac{1}{2}}\Pi(u)$
sinc$x$	$\Pi(q)$



右边的图是空间变换关系的关键。验证下列重要的变换组。

sinc$r$	$\Pi(u)$
$J_0(\pi x)$	$\pi^{-1}(\frac{1}{4}-q^2)^{-\frac{1}{2}}\Pi(q)$

$\delta(r-a)$	$2\cos 2\pi au$
$2a(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\Pi(\frac{x}{2a})$	$2\pi aJ_0(2\pi aq)$

$M(r)$	$(1-u^2)^{\frac{1}{2}} - u^2\cosh^{-1}u^{-1}$
$\mathrm{sinc}^2 x$	$\Lambda(q)$

$e^{-\pi r^2}$	$e^{-\pi u^2}$
$e^{-\pi x^2}$	$e^{-\pi q^2}$

38. 对 $a>0$，证明 Fourier-Abel-Hankel 的复合相似性定理，

如果

$f(r)$	$F(u)$
$g(x)$	$G(q)$

那么

$af(ar)$	$F(\frac{u}{a})$
$g(ax)$	$a^{-1}G(\frac{q}{a})$

39. 非圆周对称傅里叶变换　建立下列二维傅里叶变换对。

$f(x,y)$	$F(u,v)$
$\delta(r-a)e^{in\theta}$	$(-i)^n 2\pi a e^{in\phi} J_n(2\pi aq)$
$\delta(r-a)\cos n\theta$	$(-i)^n 2\pi a\cos n\phi J_n(2\pi aq)$
$\delta(r-a)\sin n\theta$	$(-i)^n 2\pi a\sin n\phi J_n(2\pi aq)$
$\delta(r-a)\cos\theta$	$-i2\pi a\cos\phi J_1(2\pi aq)$
$\delta(r-a)\sin\theta$	$-i2\pi a\sin\phi J_1(2\pi aq)$
$\Pi(\frac{r}{2a})\cos 4\theta$	$(2\pi q^2)^{-1}\cos 4\theta[4+8J_0(2\pi aq)+(2\pi aq-12/\pi aq)J_1(2\pi aq)]$

40. 三维傅里叶变换　建立下列三维傅里叶变换对。

$k(r)$	$K(s)$
$\exp(-ar)$	$8\pi a[a^2+(2\pi s)^2]^{-2}$
$r^{-1}\exp(-ar)$	$4\pi[a^2+(2\pi s)^2]^{-1}$
$r^{-2}\exp(-ar)$	$2s^{-1}\tan^{-1}(\frac{2\pi s}{a})$
$r^{-\frac{1}{2}}$	$(4\pi)^{-1}s^{-5/2}$
r^{-1}	$\pi^{-1}s^{-2}$
$r^{-\frac{3}{2}}$	$s^{-3/2}$
r^{-2}	πs^{-1}
$\exp(-\pi r^2)$	$\exp(-\pi s^2)$
$\mathrm{sinc}^2 r$	$(2\pi s)^{-1}\Pi(\frac{s}{4\pi})$
$\mathrm{jinc}\, r \equiv (2r)^{-1}J_1(\pi r)$	$2\pi^{-1}(1-4s^2)^{-1/2}\Pi(s)$

41. n 维傅里叶变换 n 维空间中的函数 $f(r)$ 仅是离原点的距离 r 的函数，它的 n 维傅里叶变换 $F(q)$ 仅是一个变量 q 的函数。对 $n=1,2$ 和 3 证明通用公式

$$F(q)=2\pi q^{(2-n)/2}\int_0^\infty r^{n/2}J_{(n-2)/2}(2\pi qr)f(r)\mathrm{d}r$$

能表示 n 维傅利叶变换。

42. 余弦变换 在 0 到 ∞ 区间定义的函数 $f(x)$

$$f(x)=\begin{cases}1-2x^2 & 0<x<\dfrac{1}{2}\\ 0 & x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

求它的余弦变换 $F_c(s)=2\int_0^\infty \cos 2\pi sx f(x)\mathrm{d}x$。

43. 一个商业变换 一个股票市场分析家习惯记录每日的股票价格 $f(\tau)$ 并计算一个变换

$$F_c(\nu)=\frac{1}{N}\sum_{\tau=-N+1}^{0}f(\tau)\cos(2\pi\nu\tau/N),\qquad 0\leqslant N-1$$

目的在于看清楚季度性的与其它信息结合着的股市走向以指导顾客。通常 N 取为 365，变换每月进行一次。一个新的思想需要对 $F_c(\nu)$ 进行改进，再加上一个反演变换，作为一个顾问，现在要求你提供一个求逆的公式。$F_c(\nu)$ 的处理本质和构成私有信息的意图没有透露给你。认真地对待这个作业；财政补偿将比你通常的要高很多。作一个完整的专业报告。

44. 一根由硅制成的透明纤维掺杂了少量的二氧化锗使得折射率 n 在纵轴 z 上的值为 n_0 但随半径按公式 $n=n_0(1-r^2/h^2)$ 逐渐减小，其中 h 与纤维的半径相比要大很多。n_0 的值仅比硅的值(1.55 左右) 大百分之一或二。一道光线在 $r=0$，$z=0$ 的位置进入光纤且和 z 轴夹角为 i。证明光线沿正弦曲线

$$r=\frac{2L\tan i}{\pi}\sin\frac{\pi z}{2L}$$

传播。其中 $L=\pi h/2\sqrt{2n_0}$ 是从 $z=0$ 到光线第一个转向处的距离。

45. 逆函数 证明在$(1/\pi x)*(-1/\pi x)=\delta(x)$ 的意义上，$1/\pi x$ 的卷积逆是 $-1/\pi x$。

第 14 章

拉普拉斯变换

迄今为止，我们讨论了 x 和 s 是实变量的情况。现在设 t 是实变量而 p 是复变量，考虑如下积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t。$$

该积分被称为函数 $f(t)$ 的（双边）拉普拉斯变换，可以看到拉普拉斯变换与傅里叶变换的区别仅在于符号不同。当 p 的实部为零时，拉普拉斯变换与傅里叶变换（用非复变量解释）完全一致。尽管如此，两种变换在应用上有着根本的不同。

拉普拉斯变换的其它定义包括

$$\int_{0+}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t。$$

该定义被称为单边拉普拉斯变换，以及

$$p\int f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t。$$

该定义被称为拉普拉斯变换的乘 p 形式。

单边拉普拉斯变换源于瞬态分析，其中 $f(t)$ 是随着 $t=0$ 时刻开关的闭合而产生的。然而，如果我们设 $t<0$ 时 $f(t)=0$，则这种情况就可以被看作包含在双边拉普拉斯变换定义之中。我们并不总强调定义单边拉普拉斯变换的积分下限是 $0+$；实际上在应用中通常写为 0。但必须记住

$$\int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \quad \text{通常意味着} \quad \lim_{h\to 0}\int_{|h|}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t。$$

为了与 Heaviside 运算符号保持连续性，很多作者采用拉普拉斯变换的乘 p 形式，Heaviside 运算符号在电路瞬态微分方程上的成功应用激励了变换理论的长期持续发展。导纳算子 $Y(p)$，其中 p 解释为时间微分算子，证明是单位电压阶跃响应的乘 p 拉普拉斯变换。

现在乘 p 拉普拉斯变换正在逐渐消失，它与大量电工以及应用数学文献之间的联系已经被搞混了。另一方面，通过省略 p，我们就能够与傅里叶变换有准确的对应关系；进一步地，通过对冲激响应而不是前述的阶跃响应进行处理，我们可以保持求解子程序的简洁性（可以省一到二行）。这样系统输入电压波形 $v(t)$ 与响应电流 $i(t)$ 之间的关系为

$$i(t) = Y(p)v(t)$$

其中 p 被解释为时间微分算子，$Y(p)$ 是系统单位电压冲激响应的非乘 p 形式双边拉普拉斯变换。对于单边拉普拉斯变换该运算公式通常也成立。

从拉普拉斯变换恢复 $f(t)$ 的逆变换公式也有逆傅里叶变换所具有的那种对称性。然而与（傅里叶变换中的）ω 不同，变量 p 通常是复的，因此必须在复平面上指定对 p 的积分围线。这样

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} F_L(p)\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p,$$

其中

$$F_L(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t,$$

c 是一个经过恰当选择的正常数。

本书将经常提到拉普拉斯变换在处理电路瞬变过程以及其它问题时与傅里叶变换相比所拥有的优势。傅里叶变换最重要的优点是它的物理可解释性，如可以解释为谱、衍射图案等等。然而拉普拉斯变换不具备这样的物理可解释性，一旦我们对一个等式取拉普拉斯变换，我们就只保留了对其数学意义上的而非物理意义上的理解。

拉普拉斯变换通常用于解决诸如动态系统中的瞬变过程之类的初值问题，而当今工作中包含的很多类型的问题根本用不到拉普拉斯变换。

基础性的教科书可以参见 Doetsch(1943) 以及 van der Pol 和 Bremmer(1955)，有关拉普拉斯变换更详细的列表可参见 Erdelyi 等(1954) 以及 Roberts 和 Kaufman(1966)。McCollum 和 Brown(1965) 详尽汇编了产生于电路应用方面的拉普拉斯变换。

拉普拉斯积分的收敛性

拉普拉斯变换的定义积分式告诉我们，我们需要对一给定函数 $f(t)$ 乘以 e^{-pt}，其中 p 是任意复数，再从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 进行积分。先考虑 p 是实数的情况，对一系列 p 的值，我们可以绘出乘积 $f(t)\mathrm{e}^{-pt}$（见图 14.1）。当 $p=0$ 时，乘积等于 $f(t)$ 本身；因此 $p=0$ 时的拉普拉斯变换等于 $f(t)$ 的无穷积分，即

$$F_L(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t。$$

标注 $p=-0.1$，$p=-0.2$ 的连续曲线下的面积给出了 $F_L(-0.1)$ 和 $F_L(-0.2)$ 的值。显而易见，当 t 为正值时，随着 p 值向负值方向减小，与 $f(t)$ 的值相乘的 e^{-pt} 是一个不断增大的因子。

如图 14.1 所示，为使积分有限，p 必须大于某个下限值。这里设 p 的下限值为 α。当 p 存在虚部时，可以证明如果 p 的实部小于这个下限 α，积分结果将是无穷大。类似地，考虑 p 为正实数的情况，原点左边乘积曲线下的面积同样有可能变为无穷大。当然，如果 $t<0$ 时 $f(t)=0$ 或者定义积分是单边积分，则这种情况就不会发生。但是，一般情况下 p 值不能超过某个实数值 β，和前面一样可以证明在复数情况下需要考虑的是 p 的实部。

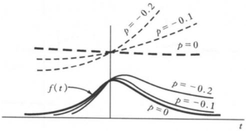


图 14.1　不同 p 值时的 e^{-pt} 曲线（虚线）和 $e^{-pt}f(t)$ 曲线（实线）

因此，拉普拉斯变换不可能对于 p 的所有值都存在，典型的情况是，它的取值范围由下式指定

$$\alpha < \mathrm{Re}p < \beta$$

在这个范围内，定义积分式收敛。这意味着积分在 p 复平面上的一个带状区域内收敛（见图 14.2）。但是定义积分式并不是必须如图中所示的那样在 p 的虚轴上收敛，也不是必须要存在收敛域。

例如，考虑 $f(t)=e^t$。这个基本函数广泛应用于电路分析以及其它利用拉普拉斯变换进行研究的学科，当 $\mathrm{Re}p>1$ 或 $\mathrm{Re}p<1$ 时，它的拉普拉斯变换均不收敛。在此情况下，带状收敛域收缩成一条直线：积分仅在 $\mathrm{Re}p=1$ 时收敛，尽管不是精确地收敛于 $p=1$。

对于函数 $\exp[tH(t)]$，积分左半部分的收敛要求 $\mathrm{Re}p<0$；而右半部分的收敛要求 $\mathrm{Re}p>0$；因此复平面内不存在能使其收敛的 p 值。另一方面，如果 $\mathrm{Re}p>-1$，函数 $\exp[-tH(t)]$ 的右半边收敛，因此它的带状收敛域为 $-1<\mathrm{Re}p<0$。

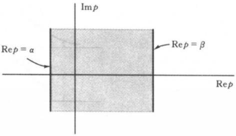


图 14.2　p 复平面上的收敛域

对收敛情况进行总结，我们注意到下限 α 取决于函数 $f(t)$ 右半边的特性。函数 $f(t)$ 随 t 的增加衰减得越快，下限 α 的值就会越小，如果 $f(t)$ 衰减到零并保持为零或者以 $\exp(-t^2)$ 的速度衰减，那么 α 可以达到 $-\infty$。

相似地，上限 β 取决于 $f(t)$ 的左半边的特性。例如，如果 $f(t)$ 在某一点的左侧为零，则 β 可达到 $+\infty$。图 14.3 的例子给出了说明各种可能性的例子。

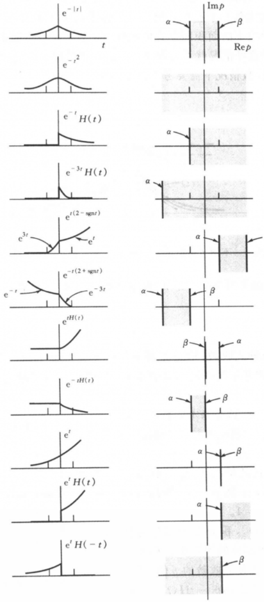


图 14.3　一些简单函数及其收敛域

拉普拉斯变换定理

在拉普拉斯变换的列表 14.1 中重述了傅里叶变换的大多数定理。这些定理在很大程度上是相似的，表中主要增加了有关带状收敛域的内容。

表 14.1 拉普拉斯变换相关定理

定理名称	$f(t)$	$F(p)$	收敛域
相似性	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{p}{a}\right)$	$\alpha < a^{-1}\mathrm{Re}p < \beta$
叠加定理	$f_1(t)+f_2(t)$	$F_1(p)+F_2(p)$	$\max(\alpha_1,\alpha_2) < \mathrm{Re}p < \min(\beta_1,\beta_2)$
时移	$f(t-\tau)$	$e^{-\tau p}F(p)$	$\alpha < \mathrm{Re}p < \beta$
调制	$f(t)\cos\omega t$	$\frac{1}{2}F(p-\mathrm{i}\omega)+\frac{1}{2}F(p+\mathrm{i}\omega)$	$\alpha < \mathrm{Re}p < \beta$
	$e^{-at}f(t)$	$F(p+a)$	$\alpha-\mathrm{Re}a < \mathrm{Re}p < \beta-\mathrm{Re}a$
卷积	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(p)F_2(p)$	$\max(\alpha_1,\alpha_2) < \mathrm{Re}p < \min(\beta_1,\beta_2)$
乘积	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}F_1(s)F_2(p-s)\mathrm{d}s$	$\alpha_1+\alpha_2 < \mathrm{Re}p < \beta_1+\beta_2$，$\alpha_1 < c < \beta_1$
自相关	$f(t)*f(-t)$	$F(p)F(-p)$	$\lvert\mathrm{Re}p\rvert < \min(\lvert\alpha\rvert,\lvert\beta\rvert)$
微分	$f'(t)$	$pF(p)$	$\alpha < \mathrm{Re}p < \beta$(通常)
有限差分	$f(t+\frac{1}{2}\tau)-f(t-\frac{1}{2}\tau)$	$2\sinh\frac{1}{2}\tau pF(p)$	$\alpha < \mathrm{Re}p < \beta$
积分	$\int_{-\infty}^{t}f(u)\mathrm{d}u$	$p^{-1}F(p)$	$\max(\alpha,0) < \mathrm{Re}p < \beta$
	$\int_{t}^{\infty}f(u)\mathrm{d}u$	$p^{-1}F(p)$	$\alpha < \mathrm{Re}p < \min(\beta,0)$
反转	$f(-t)$	$F(-p)$	$-\beta < \mathrm{Re}p < -\alpha$

瞬态响应问题

让一个时变激励 $V_1(t)$ 通过一个线性时不变系统得到响应 $V_2(t)$。例如，$V_1(t)$ 可以是加在线性时不变电网络的输入端上的电压，$V_2(t)$ 则是由 $V_1(t)$ 引起的输出电压。那么两者之间的关系通常可以方便地用常系数线性微分方程的形式表示：

$$a_0V_1(t)+a_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_1(t)+a_2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}V_1(t)+\cdots=b_0V_2(t)+b_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_2(t)+b_2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}V_2(t)+\cdots。$$

这种微分方程很适合用拉普拉斯变换进行求解。对每一项乘以 $\exp(-pt)$ 然后在 $-\infty$ 到 $+\infty$ 区间上对其进行积分。那么，

$$a_0\int_{-\infty}^{+\infty}V_1(t)e^{-pt}dt+a_1\int_{-\infty}^{+\infty}V'_1(t)e^{-pt}dt+\cdots=$$
$$b_0\int_{-\infty}^{+\infty}V_2(t)e^{-pt}dt+b_1\int_{-\infty}^{+\infty}V'_2(t)e^{-pt}dt+\cdots。$$

用横杠符号表示拉普拉斯变换，即

$$\overline{V}_1(p)=\int_{-\infty}^{+\infty}V_1(t)e^{-pt}dt,$$

注意到微分 $V'_1(t)$ 的拉普拉斯变换是 $p\overline{V}_1(p)$，我们有

$$a_0\overline{V}_1(p)+a_1p\overline{V}_1(p)+a_2p^2\overline{V}_1(p)+\cdots$$
$$=b_0\overline{V}_2(p)+b_1p\overline{V}_2(p)+b_2p^2\overline{V}_2(p)+\cdots$$

这个与 $V_1(t)$ 和 $V_2(t)$ 的拉普拉斯变换有关的方程被称为*辅助方程*。它不是一个微分方程，而仅仅是一个代数方程，并且可以方便地解出 $\overline{V}_2(p)$。这样，当分母不为零时，

$$\overline{V}_2(p)=\frac{a_0+a_1p+a_2p^2+\cdots}{b_0+b_1p+b_2p^2+\cdots}\overline{V}_1(p)\ 。$$

这一简单的步骤具有变换方法的实质特征。通过将问题转换到变换域，我们可以得到一个更加简单的问题。

可以发现有两个独立变量(如传输线上的 x 和 t)的偏微分方程，可以被化简为一般的微分方程。联立的微分方程可以被化简为联立的代数方程，等等。

在这种情况下，通过求解简单的代数方程，我们就求解了微分方程。剩下的工作只是将结果变回到原来的函数域。

若 $V_1(t)$ 是一个简单的常见激励，那么它的拉普拉斯变换 $\overline{V}_1(p)$ 可以从记忆或者一些变换对的参考表中得到，稍后我们会谈到 $V_1(t)$ 不是一个简单的常见激励的情况。通过拉普拉斯变换定理以及一到两个既定的步骤(例如把有理分式展开成部分分式)可以扩充拉普拉斯变换对参考表。在将 $\overline{V}_1(p)$ 和指定的有理分式相乘计算出 $\overline{V}_2(p)$ 以后，我们可以用相同的步骤通过反变换求得 $V_2(t)$。

拉普拉斯变换对

很少有必要通过积分计算拉普拉斯变换。拉普拉斯方法常常是用在自由度有限的系统中的，对这样的系统来说，一小部分的拉普拉斯变换对就足够了。最关键的变换对是

$$e^{-at}H(t)\supset\frac{1}{p+a}\qquad -\text{Re}a<\text{Re}p。$$

把 a 取为零，有

$$H(t)\supset\frac{1}{p}\qquad 0<\text{Re}p。$$

取 $a=\text{i}\omega$，有

$$e^{-\text{i}\omega t}H(t)\supset\frac{1}{p+\text{i}\omega}\qquad 0<\text{Re}p$$

和
$$e^{i\omega t}H(t) \supset \frac{1}{p - i\omega} \qquad 0 < \mathrm{Re}p。$$

将两个变换对相加，有

$$\cos\omega t H(t) \supset \frac{1}{2}\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{p+i\omega} = \frac{p}{p^2+\omega^2} \qquad 0 < \mathrm{Re}p ,$$

将两个变换对相减，有

$$\sin\omega t H(t) \supset \frac{1}{2i}\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{2i}\frac{1}{p+i\omega} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \qquad 0 < \mathrm{Re}p 。$$

对 $H(t) \supset p^{-1}$ 应用积分定理，有

$$tH(t) \supset \frac{1}{p^2} \qquad 0 < \mathrm{Re}p ,$$

应用微分定理，有

$$\delta(t) \supset 1 \qquad -\infty < \mathrm{Re}p < \infty 。$$

根据叠加定理，有

$$(1 - e^{-at})H(t) \supset \frac{a}{p(a+p)} \qquad \max(0, -\mathrm{Re}a) < \mathrm{Re}p。$$

将 $\exp(-at)H(t) \supset (p+a)^{-1}$ 对 a 进行微分，有

$$te^{-at}H(t) \supset \frac{1}{(p+a)^2} \qquad -\mathrm{Re}a < \mathrm{Re}p 。$$

将 a 分为实部和虚部，$a = \sigma + i\omega$，有

$$e^{-(\sigma \pm i\omega)t}H(t) \supset \frac{1}{p+\sigma \pm i\omega} \qquad -\sigma < \mathrm{Re}p$$

因此

$$e^{-\sigma t}\cos\omega t H(t) \supset \frac{p+a}{(p+\sigma)^2+\omega^2} \qquad -\sigma < \mathrm{Re}p$$

以及
$$e^{-\sigma t}\sin\omega t H(t) \supset \frac{\omega}{(p+\sigma)^2+\omega^2} \qquad -\sigma < \mathrm{Re}p$$

从我们熟悉的瞬态波形的典型变形的变换可以很容易地由

$$e^{-at}H(t) \supset \frac{1}{p+a}$$

中推出，可以清楚地看到，指数波形扮演着一个基本的角色。与其它地方所述的一样，由指数激励得到指数响应的意义和线性时不变的意义是一样的。表中所列的所有时间函数是线性时不变系统中固有的函数，并可以通过简单的激励得到。

为便于参考，表 14.2 中列出了很多例子，其中包括了几个具有简单激励特点的例子。这些例子都可以通过积分很容易地得到，或者通过用 p 代替已知傅里叶变换中的 $i2\pi f$ 的方法直接

转换得到。其收敛域必须单独进行考虑。

表 14.2 一些拉普拉斯变换

$f(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$	收敛域
$\left.\begin{array}{l} e^{-\alpha t}H(t) \\ -e^{-\alpha t}H(-t) \end{array}\right\}$	$\dfrac{1}{p+\alpha}$	$\begin{cases} -\mathrm{Re}\alpha < \mathrm{Re}p \\ \mathrm{Re}p < -\mathrm{Re}\alpha \end{cases}$
$H(t)$	$\dfrac{1}{p}$	$0 < \mathrm{Re}p$
$tH(t)$	$\dfrac{1}{p^2}$	$0 < \mathrm{Re}p$
$\delta(t)$	1	所有 p
$\delta'(t)$	p	所有 p
$(1-e^{-\alpha t})H(t)$	$\dfrac{\alpha}{p(p+\alpha)}$	$\max(0, -\mathrm{Re}\alpha) < \mathrm{Re}p$
$\cos\omega t H(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	$0 < \mathrm{Re}p$
$\sin\omega t H(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$0 < \mathrm{Re}p$
$te^{-\alpha t}H(t)$	$\dfrac{1}{(p+\alpha)^2}$	$-\mathrm{Re}\alpha < \mathrm{Re}p$
$e^{-\sigma t}\cos\omega t H(t)$	$\dfrac{p+\sigma}{(p+\sigma)^2+\omega^2}$	$-\sigma < \mathrm{Re}p$
$e^{-\sigma t}\sin\omega t H(t)$	$\dfrac{\omega}{(p+\sigma)^2+\omega^2}$	$-\sigma < \mathrm{Re}p$
$e^{-\alpha\|t\|}$	$\dfrac{2\alpha}{\alpha^2-p^2}$	$-\mathrm{Re}\alpha < \mathrm{Re}p < \mathrm{Re}\alpha$
$\Pi(t)$	$\dfrac{\sinh\frac{1}{2}p}{\frac{1}{2}p}$	所有 p
$\Pi\left(t-\frac{1}{2}\right)$	$\dfrac{1-e^{-p}}{p}$	所有 p
$\Lambda(t)$	$\left(\dfrac{\sinh\frac{1}{2}p}{\frac{1}{2}p}\right)^2$	所有 p
$\mathrm{III}(t)H(t+\frac{1}{2})$	$\dfrac{1}{1-e^{-p}}$	$0 < \mathrm{Re}p$
$\mathrm{I}_{\mathrm{I}}(t)$	$\sinh\frac{1}{2}p$	所有 p
$\mathrm{II}(t)$	$\cosh\frac{1}{2}p$	所有 p
$-H(-t)$	$\dfrac{1}{p}$	$\mathrm{Re}p < 0$
$\mathrm{sgn}t$	$\dfrac{2}{p}$	$\mathrm{Re}p = 0$
$\mathrm{III}(t)H(t)$	$\coth\frac{1}{2}p$	$0 < \mathrm{Re}p$

自然响应

在上述的瞬态响应问题中，$V_2(t)$ 是由激励 $V_1(t)$ 引起的响应。然而系统也可以有不需要激励来维持的自然响应。通常会有先前的激励作用于网络激发了系统的这种自然响应(但这并不是必需的，如系统组成中可能包含有储能元件)。

显然，与能量循环有关而不是由激励 $V_1(t)$ 引起的任何自然响应都必须和 $V_2(t)$ 相加，从而给出系统的总体响应。

求解系统自然响应的众所周知的方法是，当激励 $V_1(t)=0$ 时求解响应 $V_2(t)$。这样在辅助方程中，令 $\overline{V}_1(p)=0$，有

$$b_0+b_1p+b_2p^2+\cdots=0\ 。$$

该方程被称为特征方程，它的一组复数根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ 确定了系统的自然(固有)模式。

当 $V_1(t)=0$ 时，把 $V_2(t)=\exp(\lambda_k t)$ 代入微分方程可以看到它是微分方程的一个解。假设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ 互不相同，把具有任意强度的所有模式结合在一起，用通用表达式 $\sum_k a_k\exp(\lambda_k t)$ 来表示自然响应。

当有重根存在时，比如说 $\lambda_3=\lambda_4$，那么将出现非指数形式的响应模式 $t\exp(\lambda_3 t)$。在某种意义上，这种情况可以想象为如下的指数模式的组合。先考虑一个 λ_3 和 λ_4 几乎相等的系统，然后考虑一系列 λ_3 与 λ_4 趋于相等的系统，并将注意力从一个系统转移到另一个系统。表达式

$$a_3e^{\lambda_3 t}+a_4e^{\lambda_4 t}$$

代表了可能的响应模式，其中 a_3 和 a_4 的强度是任意的。设 a_3 和 a_4 大小相等但符号相反。令 $\lambda_4=\lambda_3+\delta\lambda$，那么上面的表达式变为

$$a_3\left[e^{\lambda_3 t}-e^{(\lambda_3+\delta\lambda)t}\right],$$

该表达式是一个驼峰状的波形，从零点开始上升，继而回落；但是当 $\delta\lambda$ 趋于零时表达式也将趋于零。然而，由于系数 a_k 是任意的，而且响应模式可以是任何强度的，因此随 $\delta\lambda$ 的减小，我们完全可以放大微弱的响应。假设当我们从一个系统转到另一个系统时，使系数 a_3 和 a_4 与 $\delta\lambda$ 成反比的增加。那么一系列可能的响应为

$$\frac{e^{(\lambda_3+\delta\lambda)t}-e^{\lambda_3 t}}{\delta\lambda},$$

在极限情况下，该表达式是 $\exp\lambda_3 t$ 对 λ_3 的微分。因此，在 λ_3 等于 λ_4 的极限系统中，

$$te^{\lambda_3 t}$$

就是可能的时间变化量的任意倍乘积。看起来为了得到这种结果，要合并的模式所必须满足的条件是很难达到的，但实际上只需要有限的一点能量。因此如果存在重根，$e^{\lambda_k t}$ 对 λ_k 的微分必须包含在最一般的自然响应的表达式当中。

冲激响应和传递函数

与 t 的原点选择无关，设当 $V_1(t)=\delta(t)$ 时，$V_2(t)=I(t)$。那么 $I(t)$ 称为系统的冲激响应，

而且由叠加性质，

$$V_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}I(u)V_1(t-u)\mathrm{d}u\ 。$$

现在，如果 $V_1(t)$ 是一个指数函数

$$V_1(t)=\mathrm{e}^{pt}$$

其中 p 是复常数，那么有

$$V_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}I(u)\mathrm{e}^{p(t-u)}\mathrm{d}u=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}I(u)\mathrm{e}^{-pu}\mathrm{d}u\right]\mathrm{e}^{pt}\ 。$$

结果说明对指数激励的响应仍然是指数的，而且有相同的复常数 p，但幅度值由中括号内的分量给定。我们把这个分量称为传递函数，可以看出传递函数就是冲激响应的拉普拉斯变换。从前面给出的辅助方程，我们可以看出传递函数是

$$\frac{a_0+a_1p+a_2p^2\cdots}{b_0+b_1p+b_2p^2\cdots}\ 。$$

在集总参数电网络中，根据计算交流阻抗的经验我们可以很容易地写出系统传递函数。因此，通过拉普拉斯变换可以很容易地得到系统的冲激响应。这样，在图 14.4 所示的电路中，通过观察，当$V_1(t)$随 $\exp pt$ 变化时输出 $V_2(t)$ 与输入 $V_1(t)$ 的比为

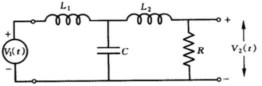


图 14.4 给定 $V_1(t)$ 求解 $V_2(t)$

$$R\frac{\dfrac{\dfrac{1}{R+L_2p}}{\dfrac{1}{R+L_2p}+Cp}}{L_1p+\dfrac{(R+L_2p)\dfrac{1}{Cp}}{R+L_2p+\dfrac{1}{Cp}}}=R\frac{1}{R+(L_1+L_2)p+L_1RCp^2+L_1L_2Cp^3}\ 。$$

利用部分分式方法，这个有理分式可以表示为以下形式

$$\frac{A}{p+a}+\frac{B}{p+b}+\frac{C}{p+c},$$

这样，冲激响应就是

$$(A\mathrm{e}^{-at}+B\mathrm{e}^{-bt}+C\mathrm{e}^{-ct})H(t)\ 。$$

在给定 $V_1(t)$ 而要求出 $V_2(t)$ 的问题当中，总是会想到两种不同的过程：一种方法是在变换域中与传递函数相乘进行求解；另一种方法是利用系统冲激响应，直接通过叠加积分进行求解。

细心的人可能会注意到这两种过程之间存在着奇怪的不同。叠加积分

$$V_2(t_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}I(u)V_1(t_1-u)\mathrm{d}u$$

在计算 $V_2(t_1)$ 的过程中并不使用 $t > t_1$ 时 $V_1(t)$ 的值。(显而易见这是因为当 u 取负值时被积函数消失了。)换句话说,要计算现在当前的输出,我们只需要知道当前时刻及以前的激励情况。

但是在变换域中求解的过程通常使用了将来的激励信息。的确,为了计算激励 $V_1(t)$ 的拉普拉斯变换,我们必须知道 $V_1(t)$ 将来的不确定行为。

通常,我们在 $t = t_1$ 时刻求得的响应应该具有相同的结果,而与 t_1 时刻后 $V_1(t)$ 如何变化无关。但是在某些情况下将会出现问题,例如,我们可以相当合理地问系统对激励 $V_1(t) = \exp t^2[H(t)]$ 的响应是什么。虽然通过叠加积分可以很容易地求解,但是因为牵涉到无穷远将来的问题,拉普拉斯变换积分发散。解决这个问题的一种方法是假设激励在某个时间点后为零;换句话说,就是假设激励为 $\exp t^2[H(t) - H(t-t_1)]$。

初始值问题

有几种著名的初值问题。一种类型是微分方程加边界条件的典型问题。在这种情况下给出了 $t > 0$[①] 时的激励函数,但是未给出系统以前的激励信息。所以,对前面激励的持续响应可能仍然存在,因此必须提供另外的附加条件。附加条件的个数等于系统自然响应模式的个数,或者与它紧密相关,这是因为系统的持续响应可以看作是由在 $t = 0$ 时刻停止的激励所引起的自然模式的叠加。这样必须提供充足的条件以便确定每一种自然模式的强度。这些数据通常由"初始"响应以及充足数量的"初始"微分组成。"初始"的含义是指 $t = 0+$;尽管 $t = 0$ 时刻的值似乎更有理由是初始值,但通常这是有区别的。为解决这一问题,要计算由激励 $V_1(t)$ 引起的响应,激励 $V_1(t)$ 当 $-\infty < t < 0$[②] 时为零,而对 $t > 0$[③],$V_1(t)$ 等于给定的激励函数。在微分方程的许多可能的特解当中,这个解对应的条件是在 $t = 0$ 时刻之前系统没有储能。在 $t = 0+$ 时刻,该响应函数及其导数的值可以与初始数据进行比较。如果它们相同,那么说明 $t = 0$ 时刻之前系统没有储能,且解是完全的。但是如果有差异,那么必须使用这些差异求解一组如下形式的联立方程来确定自然模式的强度 a_k,

$$V_2(0+) = \sum_k a_k e^{-\lambda_k t}$$

$$V'_2(0+) = \sum_k a_k \lambda_k e^{\lambda_k t}$$

$$\vdots$$

一个更好的预先引入边界条件的方法是假定 $t < 0$ 时响应为零而不是激励为零。假设现在需要通过解微分方程

$$b_0 \hat{V}_2(t) + b_1 \hat{V}'_2(t) + b_2 \hat{V}''_2(t) + \cdots = \hat{V}_1(t)$$

来求 $\hat{V}_2(t)$,式中已给定 $t > 0$ 时的 $\hat{V}_1(t)$ 以及初值 $\hat{V}_2(0+)$,$\hat{V}'_2(0+)$……。字母上的着重号表

---

① 激励函数 $V_1(t)$ 有时在 $t \geq 0$ 给定,有时在 $t > 0$ 给定,但是就像在接下来的例子中一样,问题的叙述通常不区分这一点。

② 此处 $-\infty$ 指的是一个物理系统产生之时的时间起点,从那时起系统就一直保持着同样的线性时不变条件。

③ 在 $t = 0$ 时,取值 $\frac{1}{2}V(0+)$;或取任意其它的有限值。因为正如前面看到的那样,对一个零函数没有响应

示 $t>0$ 以外的函数值未被定义。我们用 $V_2(t)$ 的一个新方程代替上面的微分方程，其中

$$V_2(t)=\begin{cases}\hat{V}_2(t) & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}。$$

这样，函数 $V_2(t)$ 对所有的 t 都有定义，且与已定义的 $\hat{V}_2(t)$ 一致。由于

$$V'_2(t)=\hat{V}_2(0+)\delta(t)+\begin{cases}\hat{V}'_2(t) & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

以及

$$V''_2(t)=\hat{V}'_2(0+)\delta(t)+\hat{V}_2(0+)\delta'(t)+\begin{cases}\hat{V}''_2(t) & t>0\\ 0 & t<0\end{cases},$$

则得到如下新的微分方程

$$b_0V_2(t)+b_1V'_2(t)+b_2V''_2(t)+\cdots=V_1(t),$$

其中

$$V_1(t)=[b_1\hat{V}_2(0+)\delta(t)]+[b_2\hat{V}'_2(0+)\delta(t)+b_2\hat{V}_2(0+)\delta'(t)]+\cdots+\begin{cases}\hat{V}_1(t) & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}。$$

该微分方程与原微分方程的区别在于在激励函数中引入必要的冲激以产生 $V_2(t)$ 的初始不连续点及其导数。对方程进行拉普拉斯变换可得到如下辅助方程

$$b_0\overline{V}_2(p)+b_1p\overline{V}_2(p)+b_2p^2\overline{V}_2(p)+\cdots=\overline{V}_1(p)\ 。$$

因此

$$\overline{V}_2(p)=\frac{\overline{V}_1(p)}{b_0+b_1p+b_2p^2+\cdots}$$

$$=\frac{[b_1\hat{V}_2(0+)]+[b_2\hat{V}'_2(0+)+b_2\hat{V}_2(0+)p]+\cdots+\int_{0+}^{\infty}\hat{V}_1(t)e^{-pt}\,dt}{b_0+b_1p+b_2p^2+\cdots}\ 。$$

对该结果进行逆拉普拉斯变换即可得到 $V_2(t)$；其中 $t>0$ 的部分即为所求的 $\hat{V}_2(t)$，其具有满足初始条件的固有特性。

考虑如下的例子：给定一个微分方程

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{3dy}{dt}+2y=2,$$

满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=0$，要求 $y(t)(t>0)$。（虽然这是常用符号，但正如我们提到的，$y(0)$ 真正意义上表示 $y(0+)$。）可以看到，激励函数 $V_1(t)=2$，它与时间无关。然而，没有明确指出是 $t>0$ 时还是 $t\geqslant 0$ 时激励函数 $V_1(t)=2$。令

$$Y(t)=\begin{cases}y(t) & t>0\\ 0 & t<0\end{cases},$$

如图 14.5 所示。那么

$$Y'(t)=y(0+)\delta(t)+\begin{cases}y'(t) & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

和
$$Y''(t)=y'(0+)\delta(t)+y(0+)\delta'(t)+\begin{cases}y''(t) & t>0\\ 0 & t<0\end{cases},$$

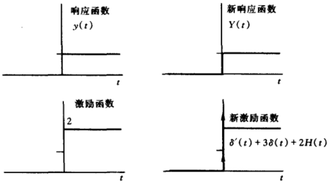


图 14.5　初始值问题(左)及其等效(右)

这样 $Y(t)$ 满足的新微分方程是

$$Y''(t)+3Y'(t)+2Y=\delta'(t)+3\delta(t)+2H(t)\ 。$$

对应的辅助方程是

$$p^2\,\overline{Y}(p)+3p\,\overline{Y}(p)+2\,\overline{Y}(p)=p+3+(2/p),$$

由此可得

$$\overline{Y}(p)=\frac{p+3+(2/p)}{p^2+3p+2}=\frac{1}{p}$$

因此对所有的 t，　　$Y(t)=H(t)$。

这样，在有限的 $t>0$ 范围内，所求的解是

$$y(t)=1\ 。$$

从探讨先前激励状况的角度研究这个例子对于我们是非常有指导意义的，因为许多情况下在问题叙述中并不指明先前的激励，而只给出了初始条件。为了使问题更加具体化，将上例看作

$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\frac{Q}{C}=V(t)$$

它是用电压 $V(t)$ 激励的 LRC 串联电路中电容 C 上的电量所满足的微分方程。如果 $L=1$，$R=3$，$C^{-1}=2$，我们从以前的研究可以推断，对 $t>0$ 时恒定的 1 C 电量 Q，与 2 V($t>0$) 的作用电压是一致的，初始条件是 $Q(0+)=1$ 以及 $Q'(0+)=0$。

除非系统是由已存有能量的元件构成，电容中的电量一定取自于电压源。通过一些简单的

假设我们可以求出是什么样的电压源对电路施加了作用。例如，假设电荷是在 $t=0$ 的一瞬间被注入电容的；即，取

$$Q(t)=H(t),$$

那么，由微分方程

$$V(t)=\delta'(t)+3\delta(t)+2H(t)$$

可以得知，冲激部分通过电感和电阻产生了一个电流冲激对电容充电，于是在电容上就产生了电压阶跃。

我们已经解决了一个只给出所有历史时刻的激励而没有任何附加初始条件的问题。现在彻底抛弃在 $t=0$ 时刻 $V(t)$ 的冲激，而引入如下事实作为替代，即：在 $t=0+$ 时刻电容已被充电，且电量变化率为零。现在我们再来看最初的问题。

应该认识到还存在很多其它方式使电容达到其初始电量。特别地，在本问题中充电过程可以用同样的方式在更早的时间内进行，可以表示如下

$$Q(t)=H(t+1)$$
$$V(t)=\delta'(t+1)+3\delta(t+1)+2H(t+1)。$$

这些值在 $t>0$ 部分也满足初始条件的问题，但是 $Q(0)$ 与 $V(0)$ 和前面的不同。

这种结合初始条件的系统化方法的特点在于，把冲激项加在激励函数中使得在 $t=0$ 时刻瞬时注入系统所需的全部初始能量。

求解初始值问题

在理解了使用拉普拉斯变换解题的原理后，求解中只需要很少的步骤。通过观察微分方程和其初始条件，可以直接写出辅助方程。因此，给定

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{3dy}{dt}+2y=\phi(t)\ ,$$

我们就可以写出

$$p^2\,{}_0\bar{y}(p)+3p\,{}_0\bar{y}(p)+2\,{}_0\bar{y}(p)=[y'(0+)+y(0+)p]+[3y(0+)]+{}_0\bar{\phi}(p),$$

其中 $${}_0\bar{y}(p)\subset\begin{cases}y(t) & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

以及 $${}_0\bar{\phi}(p)\subset\begin{cases}\phi(t) & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}。$$

既然这些变换所涉及的函数在 $t<0$ 时等于0，那么它们分别等于函数 $y(t)$ 和 $\phi(t)$ 的单边拉普拉斯变换。在早期，对这一类问题的重视正是单边拉普拉斯变换流行的原因。

开关问题

前边叙述了两种适合用拉普拉斯变换处理的问题：

1. 线性时不变系统对给定激励函数（对所有 t）的瞬态响应（包括激励函数为 0 时系统的自然响应问题）。

2. 初始值问题，其中已知 $t>0$ 时的激励函数以及与响应相关的初始值。

第三类问题就是通过开关切换这种简单的方式破坏了系统时不变性的问题。在应用线性时不变理论时，应该充分认识到扳动一个开关将把该电路改变为一个不同的电路。例如，当通过开关将电池的电压加到电阻上时，一个新的电路就产生了。这个简单的开关问题和一个与电阻串联的电压源产生电压 $H(t)$ 的瞬态响应问题是完全不同的类型。尽管两种情况下都将有阶跃电流从电阻中流过，但只有第二种情况才是时不变的电路，它的电阻在 $t=0$ 时刻的前后是一样的。虽然两种问题之间存在着某种等效关系，但是只有第二种情况才适合用线性时不变系统理论处理。

当然，在开关闭合以后两个系统完全一致。这样，如果给定系统响应的初始值("初始"意思是开关闭合以后)以及后继的激励，如果有的话，此问题可以作为初始值问题进行处理；因为在初始值问题中不需要研究 $t<0$ 时的情况。

然而，更一般的情况是给定预初始条件($t=0-$时)，或者给定以前所有的激励情况。处理这种情况的方法是将问题转化成有关时不变电路的等效问题，就像电池和电阻的简单例子一样。

如定义一个在所有 t 上有意义的电压 $V_1(t)$；在 $t=0$ 时刻将电路某处原来打开的开关闭合。要求解电路某点的响应 $V_2(t)$，我们可以用前面的方法对开关闭合之前的时刻进行求解。同样我们可以容易地计算出如果开关一直保持闭合时对 $V_1(t)$ 的响应应该是什么。实际上我们期望在开关闭合足够长时间，电路"忘记"前面开关激励的影响以后，出现这个响应结果。现在的问题是求解 $t=0$ 时刻之后系统的过渡响应。

注意到开关断开时两端存在某个电压，该电压可通过求解给定激励 $V_1(t)$ 的瞬态响应的方法获得。令该电压为 $V_s(t)$。如果将一个零内阻的电压源连接于开关两端，且它的电压变化与 $V_s(t)$ 严格一致，则开关上就没有电流流过。由于没有电流流过断开的开关，该电压源的连接不会影响电路的响应。然而此时已经有了一个重要的变化，那就是在开关两端之间引入了零阻抗连接，使得 $t<0$ 时的电路与 $t=0$ 时刻开关闭合后的电路完全相同。开关的闭合完全能够通过引入电压源 $V_s(t)H(-t)$ 的方法来模拟。该激励可以被分成两项 $V_s(t)-V_s(t)H(t)$。其中与第一项有关的响应是已知的：对所有的 t，它就是开关断开时系统对激励 $V_1(t)$ 的响应。(开关闭合时，系统对 $V_1(t)$ 和 $V_s(t)$ 响应的叠加给出相同的结果。)与第二项 $-V_s(t)H(t)$ 有关的响应，给出了所求的过渡响应，该响应与开关断开时的系统响应相叠加就给出了问题的答案。

在开关断开并使任何流过它的电流中断的问题当中，我们应用对偶性原理并且引入合适的电流源来解决问题。

参考文献

Doetsch, G. : "Theory and Application of the Laplace Transformation", Dover Publications, New York, 1943.

Erdelyi, A. , ed. : "Tables of Integral Transforms", McGraw-Hill, New York, 1954.

McCollum, P. A. , and B. F. Brown: "Laplace Transforms, Tables and Theorems," Holt, Rinehart and Wilson, New York, 1965. Provides an well-organized list of ratios of polynomials with denominators up to degree 5 and their transforms.

Roberts, G. E. , and H. Kaufman: "Table of Laplace Transforms", W. B. Saunders, Philadelphia, 1966.

Van der Pol, B., and H. Bremmer: "Operational Calculus Based on the Two-sided Laplace Integral," Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1955

习题

1. 指出下列函数的收敛域：

$H(t)$，	$\prod(t)$，	$\exp(-t^{\frac{1}{2}})H(t)$，	$(1+t^2)^{-1}$
$(1+t^3)^{-1}H(t)$，	$(\log t)H(t)$，	$\operatorname{sgn} t$，	$t^{-1}\prod(t)$
t^{-1}，	$\delta(t)$，	$(1+e^t)^{-1}$，	$(1+t^3)^{-1}$

2. 求解下列函数的拉普拉斯变换并指出其收敛域：

$$(e^{-t}-e^{t})H(t) \quad e^{-|t|} \quad (e^{t}-e^{-t})H(-t)$$

3. 求解函数$\prod(t)$，$\prod\left(t-\frac{1}{2}\right)$和$\Lambda(t)$的拉普拉斯变换，并指出收敛域。

4. 求解 LR 串联回路对电压激励 $\exp(-|t|)$ 的电流响应。

5. 由一个电感、一个电容和一个电阻，可以组成 17 种不同的双端网络。求出所有这些网络的阶跃响应和冲激响应并列表。

6. 求解 LR 串联回路对电压激励 $\exp(t)\sin tH(t)$ 的电流响应。

7. 一个电流冲激作用于 LR 串联回路，求电路的电压响应。

8. 一短路电缆的输入阻抗是 $75\tan(10^{-8}f)$。用内阻为零的电压源施加一个冲激，试求其电流响应。

9. 电压 $\sin\omega tH(t)$ 作用于 LR 串联电路，证明电流系统响应是

$$\frac{L\omega e^{-Rt/L}-L\omega\cos\omega t+R\sin\omega t}{R^2+L^2\omega^2}H(t)。$$

10. 电压 $\cos\omega tH(t)$ 作用于 RC 串联电路，证明系统电流响应是

$$\frac{R\omega^2C^2\cos(\omega t)-\omega C\sin\omega t+R^{-1}e^{-t/RC}}{1+\omega^2C^2R^2}H(t)。$$

11. 电压 $\exp(-at)H(t)$ 作用于 LR 串联电路，证明系统电流响应是

$$\frac{e^{-at}-e^{-Rt/L}}{R-aL}H(t)。$$

12. 一个串联 LR 电路和一个电容 C 并联，一个斜坡电压 $tH(t)$ 作用于这个电路。证明系统电流响应是

$$\left[C+\frac{t}{R}-\frac{L}{R^2}+\frac{L}{R^2}e^{-Rt/L}\right]H(t)。$$

13. **交变电压驱动直流电流**　一个交流电压 $\sin\omega tH(t)$ 作用于某一电路，得到直流的电流响应。这是个什么样的电路？

14. **电池产生交流电**　一个稳定的电压作用于某个电路，得到的电流响应为 $\sin\omega tH(t)$。这是个什么样的电路？

15. 一个电容 C 带有初始电量 Q。在 $t=-1$ 时刻闭合开关允许其通过一个电阻 R 放电；在 $t=0$ 时刻断开开关，请作图表示 $-2<t<1$ 间隔内的电流。

16. 一个电阻和一个未充电的电容，并联构成双端口网络。在 $t=-1$ 时刻闭合开关使一个电池作用于网络，$t=0$ 时刻断开开关。对所有 t，求电容和电阻上的电流。

17. 如图 14.6 所示电路，电压源输出电压为 $\exp(t)H(t)$。$t=1$ 时刻开关闭合，假定电容初始电量为零，试求解 $-\infty<t<\infty$ 内通过电压源的电流。

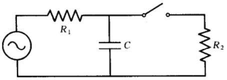


图 14.6

18. 如图 14.7 所示，$t=-1$ 时刻电容 C_1 和 C_2 通过含有电阻 R 的电路放电。在 $t=0$ 时刻开关闭合，对所有 t 求通过电容 C_1 的电流。

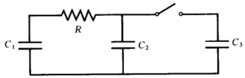


图 14.7

19. 解下列微分方程求出 $y(t)(t>0)$，初始条件为 $y(0+)$，$y'(0+)$，…

(a) $y'(t)+y(t)=1$

答案：$y=1+[y(0+)-1]e^{-t}$

(b) $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=6$

答案：$y=1+[3y(0+)+y'(0+)-3]e^{-2t}+[2-y'(0+)-2y(0+)]e^{-3t}$

(c) $y''(t)+2y'(t)+y(t)=2\sin t$

答案：$y=[1+y(0+)+y'(0+)]te^{-t}+[1+y'(0+)]e^{-t}-\cos t$。

20. 分别为上述问题寻求满足微分方程的具体电路，推出可以产生上述 $t>0$ 时的响应的激励函数。

21. 收敛域问题　试找出 4 个不同的时域函数，它们都具有拉普拉斯变换 $[(p-2)(p-1)(p+1)]^{-1}$，对每个函数指明它们的收敛域。

22. 证明阶梯函数 $H(t)+H(t-T)+H(t-2T)+\cdots$ 的拉普拉斯变换为

$$\frac{1}{p(1-e^{-Tp})}\quad 0<\mathrm{Re}p。$$

23. 电压 $v(t)H(t)$ 作用于一个在 $t=0$ 时刻之前已含有能量的电路。由于我们已经知道了所有的激励情况，因此不需要补充起始时刻前的初始数据。然而为了计算总体响应 $f(t)$，我们需要知道系统的自然响应。也许我们无法得知起始时刻前所有的能量注入状况，但只要知道

$t=0$ 时刻施加电压前瞬间的系统状况就足够了。例如，可能会给出 $t=0-$ 时刻电感以及电容的储能状况；但这里假设给定足够数量的响应的初始状态值：$f(0-)$，$f'(0-)$，$f''(0-)$，…。试证明可以通过如下特殊形式的拉普拉斯变换方便地计算系统的总体响应

$$F_-(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}\,dt。$$

试推导出用于该变换的定理，例如，它的微分定理为 $f'(t)\supset pF_-(p)-f(0-)$。

24. 拉普拉斯积分的收敛性 求 $t^{-1}H(t-1)$ 的拉普拉斯变换的收敛域。

25. 将双边拉普拉斯变换用于初始值问题 说明如何用双边拉普拉斯变换求解满足初始条件 $y=y(0+)$ 的微分方程 $\dot{y}+y=0$。

26. 单边拉普拉斯变换 一个串联 LR 电路满足微分方程

$$LI'(t)+RI(t)=V(t),$$

试求出在 $t=1$ 时刻加入电压时的电流，假设电路此前没有磁能存储。

27. 衰减回波序列 某个系统的冲激响应是一个强度按指数规律衰减的规则冲激序列，试求系统的传递函数。

28. 短路传输线 一个双端口网络的输入阻抗为 $iR\tan 2\pi Tf$。证明系统对一个电压冲激的电流响应为

$$I(t)=R^{-1}\Big[\delta(t)+2\sum_1^{\infty}\delta(t-2nT)\Big],$$

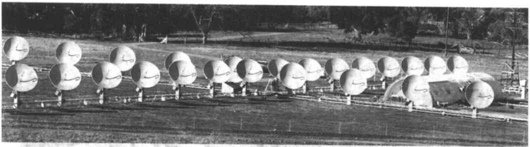
阶跃响应为

$$A(t)=R^{-1}\Big[H(t)+2\sum_1^{\infty}H(t-2nT)\Big]。$$

29. 触发时钟脉冲发生器 给上题的网络并联一个电阻 R，证明电压冲激的电流响应为

$$I(t)=2R^{-1}\sum_0^{\infty}\delta(t-2nT)$$

30. 一个可疑的变换 拉普拉斯变换对的列表说明函数 $\text{III}(t)H(t)$ 的拉普拉斯变换是 $\coth\frac{1}{2}p$，$(0<\text{Re}p)$。相应的傅里叶变换 $\coth\frac{1}{2}i\omega$ 或 $-i\cot\pi f$ 是 f 的奇函数。然而 $\text{III}(t)H(t)$ 并非奇函数，它既有偶部也有奇部。因此这意味着傅里叶变换对不正确。证明当包括傅里叶变换丢失的偶部时，正确的傅里叶变换对是 $\text{III}(t)H(t)\supset\frac{1}{2}\text{III}(f)-i\cot\pi f$。



照片 A　微波太阳单色光照相仪

照片中的天线阵拥有 3.1 弧分(arcminutes)的波束宽度(见 Bracewell, R. N. and G. Swarup, "The Stanford Microwave Spectroheliograph Antenna, a Microsteradian Pencil Beam Interferometer," IEEE *Trans. Ant. Propag.*, vol. AP-9, pp. 22-30, 1961),它在 9.1cm的波长上观测每天的太阳温度分布图已经长达 11 年。东西向的天线臂由安装在赤道上的 16 个间距为 $d=7.5$ m 的易操纵的 3 m 抛物面组成,可以描述为单个抛物面的孔径分布和方位函数 $\text{III}(x/d)\Pi(x/16d)\delta(y)$的卷积,该方位函数的二维傅里叶变换为 $16d^2\text{III}(dl)*\text{sinc}16dl$。将两个天线臂接收的太阳信号乘在一起,根据卷积定理,接收方向图正比于$[\text{III}(dl)*\text{sinc}16dl][\text{III}(dm)*\text{sinc}16dm]$。根据这个清楚的基于傅里叶的推理,我们知道总体方向图由指向天顶的形如 $\text{sinc}16dl\,\text{sinc}16dm$ 的尖锐波束组成,每个这样的波束在间隔为 λ/d(或 42 弧分)的正方形区域内被复制。从波束中心到第一个零点的距离是 $\lambda/16d$,或是 2.6 弧分。

另一种用傅里叶变换来分析天线方向图的方法是,将每个天线臂的结构分成对,每对形如 $\sum\left[\delta\left(x+\frac{1}{2}nd\right)+\delta\left(x-\frac{1}{2}nd\right)\right]$, $n=1,3,5,7$。所以方向图可以看作四个余弦的和,它可以直接表示一个天线臂的总方向图,包括复制。在一个后续的发展计划中,东西臂上又连接了一个向西延伸了 51 m 的干涉仪以将波束宽度减小到 50 弧度秒,正如在研究天鹅座 A 射电星中所展示的那样,使得天线系统的角度分辨率超过了人眼的视觉敏锐度。

为了进行正确的调整,从每个天线到中心节点的总长 51 m 的波导传输线的误差应该为 ±1 mm,或者说有十万分之二的误差(测地学的精度特征)。为了在温度和湿度都随时变化的环境中做到这一点,在每个天线的喇叭口处放置了一个荧光管,该荧光管以 400 Hz 的频率进行通断切换产生电离效应以将被调制的微弱回波信号反射到中央信号发生器。在有分支波导系统作为一个整体产生的强未调制反射的情况下,任何一个单独天线上相位路径的漂移都可以被检测出来。这个技术(G. Swarup and K. S. Yang, "Phase Adjustment of Large Antennas," *IEEE Trans. Ant. Propag.*, vol. AP-9, pp. 75-81, 1961)就是后来各种所谓自动相位校准和调整方法的鼻祖,这和自适应光学望远镜的发展相类似。

电传打字机将用电话线分发的实时太阳温度图在穿孔纸带上显示出来。由一个光电设施提供该天中用于控制时变偏差的球坐标三角数据和太阳温度图中连续行所需的起始时间。这套系统是第一个可以将其观测结果以适于拍摄成印刷版形式提供的射电望远镜。

5 个安装在赤道上的直径为 18.3 m、基本间距为 $D=22.9$ m 的抛物面,联合起来以在 2.8 cm的波长上形成 east-width 波束宽度为 18.8 弧秒的扇形波束(见 Bracewell, R. N., R. S. Colvin, L. R. D Addario, C. J. Grebenkemper, K. M. Price, and A. R. Thompson,



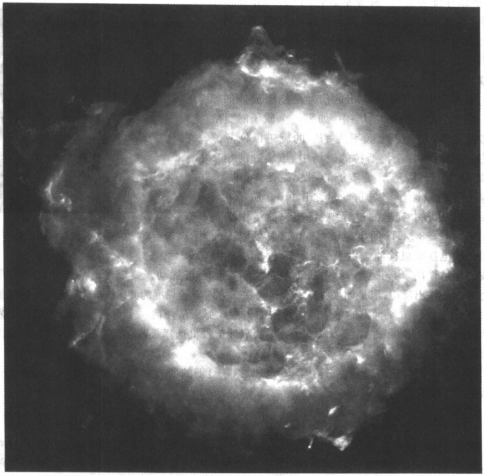
照片 B 五元射电望远镜

"The Stanford Five-Element Radio Telescope," Proc. IEEE, vol. 61, pp. 1249-1257, 1793)。扇形波束的间隔为 4.2 弧分。地球的自转致使无线电源(译注:此处为所观测的星体)处于要由扇形波束扫描的 7 弧分的范围内。扇形波束即使在天线跟踪无线电源的时候也能保持固定在一个和子午线(天顶)平行的平面中,因为方位函数 $\delta(x-D)+\delta(x-2D)+\delta(x-3D)+\delta(x-7D)+\delta(x-10D)$ 是固定的。扫描角度随时间变化使得我们可以绘制信号源的亮度分布图,就像断层摄影重建一样。

当一个无线电源远离天顶,到达不同天线的波的路径差不相等时,会因为系统中用于提高灵敏度的 60 MHz 真实带宽而造成扇形波束的模糊。为了进行补偿,把有效长度可达 100 m 的可变延迟线和传输线配合一起使用,使接收到的信号输入到有 10 个乘法器的中央系统中,在其中产生各天线对之间 10 个可能的间隔上接收到的场的复相关。该相关的傅里叶变换将数据变换到空域中用于图谱的重建。

5 个天线之间不规则的间距提供了从 $D\sim9D$ 的所有 9 个可能间距,而不用耗资来建立一个 10 单元等距阵。配置函数的自相关将说明如何选择天线的安排方式来最小化由同样总长度的均匀阵列所造成的冗余。

做为傅里叶合成的一个成功例子,Cassiopeia A(仙后座 A)的图像,是 20 世纪 40 年代发现的最早的无线电"点"信号源之一,显示出其角直径只有 6 弧分。该发现是由位于新墨西哥州 Socorro 的国家射电天文学超大观测阵列(Very Large Array of the National Radio Astron-



照片 C　射电天文图像

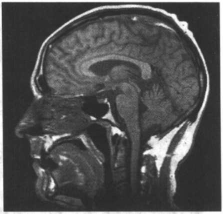
omy Observatory)所完成的。27 个可移动的 25m 天线按照不同的配置分布在长达 21 公里的 Y 轴上来测量二维复自相关函数，这些自相关函数正是所求的亮度分布的傅里叶变换。由于拥有 0.2 弧秒的分辨率和非常高的动态范围，使得该射电“图像”的质量是光学望远镜在胶片上产生的图像(胶片上的光学复制品)所无法比拟的。

该星体是发生在公元前 1680 年一次超新星大爆炸的残留物。它的角直径一直在增长(可测量到的)，但是由于外壳的扩展因受星际气体和灰尘的作用而放慢，所以它本身的扩展也放慢了。从而，不在爆炸最前沿的内部物质可以追上并穿过外壳，在表面上留下弹坑一样的凹陷。

这张令人惊奇的在(x,y)平面上的人脑径向切片图，是由斯坦福大学电气工程系的医学共振成像小组(MRI)用非外科手术的方法得到的，由 John Pauly 博士友情提供。

灰度等级对应于不同组织中氢原子的密度。空心处显示出黑色，因为它不含水；骨头和牙齿由于同样的原因而显示黑色。另一方面，脂肪由于由富含氢的分子组成，所以显示出亮白

色，所以环绕着头骨（头骨是黑色的）的部分显示出白色，肌肉和脑组织则因为含水量和组织分子的不同而显示出不同的灰度。皮下脂肪上的薄皮肤层则模糊可见。脂肪中显著的皱纹是因为与枕头接触的缘故。



照片 D　头部 X 光断层摄影照片

氢原子中的质子发射出的信号是能够成像的原因。在一个稳定的磁场 B_0 中，如果一个质子的自旋轴被扰动了，它将产生频率为 γB_0 的旋进以恢复原状态。比如说，在 1 特斯拉的磁场中，该旋进的频率为42.58 MHz。因子 γ 是质子的回旋磁性比（电子、核粒子等的磁性能率与角动量之比值）。质子在 1 特斯拉的磁场中旋进的过程中，将损失能量用来发射频率为42.58 MHz 的电磁波，该电磁波可以方便地用无线电接收机检测。由于受到频率为 γB_0 的电磁波的辐射作用，均匀磁场 B_0 中质子的自旋状态也会被扰动。要成像的物体中的所有质子都会对磁场作出反应，但是如果所施加的磁场在 z 方向上的梯度为 G_z（单位为 Tm^{-1}），则我们的注意力只限于 $z=0$ 平面上的单个薄切片中的内容。那么从任何一个垂直于 z 轴的切片所发射出的信号都可以用调谐在频率 $\gamma(B_0+G_z)$上的窄带接收机选择接收。激励脉冲必须足够短以覆盖所需的频率范围。

用 $s(t)$表示与感兴趣的部分在频率 $\gamma(B_0+G_x x)$上的所有辐射的时变脉冲。如果(x,y)平面中质子的密度为 $M(x,y)$，那么

$$s(t)=\iint M(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\gamma G_x t x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

就是 $M(x,y)$在频率 $\gamma G_x t$ 上的傅里叶变换的值。如果我们让 G_x 随时间变化，并且在 y 轴上加上另外一个线性变化的磁场 G_y，那么这个变换就可以被描绘出来。这个例子使用光栅扫描依次获得变换的 256 条独立扫描线，同时也使用了变换空间中的其它轨线，比如用恰当变化的梯度所定义的螺旋线、轮辐线，特别是在测体积的成像中用来依次一个平面一个平面进行显示中使用。

第 15 章

天线与光学

天线理论与波形和谱的理论非常相似，所以一旦我们掌握了其中的关键，那么我们在一个领域中所熟悉的方法就可以应用于另一个领域。第一步是要在所研究的对象中建立一个傅里叶变换关系，然后再看哪些物理量能成为其一部分。因为我们的目的是增加傅里叶变换作为一个工具的通用性，所以只是略微谈到天线理论的一个方面，但是它在考虑天线问题时是基本的和重要的。

我们通过考虑一维孔径问题来研究这一主题，这样做似乎有些不太合适，因为天线理论的本质是它要求的维度比研究波形所需的维度更高，波形只是一个独立变量的函数。然而，对于所讨论的大多数天线来说，如果其方向性（系数）可以分解为一维孔径方向性（系数）之积，那么一维处理就足够了，而且一维孔径就足以建立类比关系了。后面将会介绍二维理论的特点。

通过改变术语，本章中的大量内容都可以直接用于光学和无线电波；这样，入射到孔径的平行光向空间的辐射方式，与从一个具有相同形状的孔径（但尺寸更大一些，正比于它的波长）所发出的无线电波向空间的辐射方式一样。在给定一个光的或无线电的辐射场但没有明确描述照度分布的这样一类问题中，通常可以假设入射波在银幕中的孔径上产生的照度与银幕不在那里时产生的照度是一样的，但是在此，我们不研究衍射理论的更深入的问题，我们的出发点是孔径分布本身。在无线电中，孔径的幅度和相位激励可以通过分离的传输线直接加到一个间隔很近的偶极子阵列上；对光波长来说不存在这种可能性。由于这个原因，对给定孔径分布的辐射来说，使用天线进行讨论比较合适。

一维孔径

一个向半无限空间中辐射能量电磁式喇叭，如图 15.1 所示，是能够方便地用平面孔径模型代替的一类天线的一个例子。就流入右半平面的能量而言，我们可以说这个源等价于孔径平面 AA' 上的一个确定的电场分布。虽然在被导体占用的部分平面上场强是零，但是由电磁能量源张开的喇叭口上维持着某些确定的分布。

假设所有的条件与垂直于纸面的坐标轴 y 无关，那么天线被称为一维孔径。在下文的大多数情况下，我们还假设口径至少横跨几个波长，这等价于假设天线是高方向性的。

由于就远场效应而言任何天线都可以用平面场分布来代替，所以把它限定在平面孔径上原则上没有破坏普遍性。但是，对一些非平面的天线（尤其像八木天线这样的端射天线阵），常常通过其它方法来研究。

二维孔径很容易作为一维情况的推广来处理。

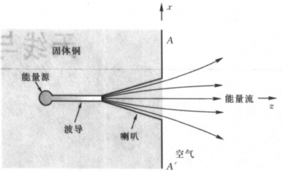


图 15.1　可以看作平面孔径的天线

设在时刻 t，点 x 处的电场分布为 $F(x)\cos[\omega t-\phi(x)]$，其中 ω 是（单频）振荡的角频率，$F(x)$ 和 $\phi(x)$ 分别是幅度和相位。在后面讨论电场时，我们应该明白相位复矢量 $E(x)$，即由

$$E(x)=F(x)e^{-i\phi(x)},$$

确定的复数量。我们注意到，瞬时场是 $E(x)=F(x)\exp i\omega t$ 的实部；即，

$$F(x)\cos[\omega t-\phi(x)]=\mathrm{Re}[E(x)e^{i\omega t}].$$

由惠更斯(Huyghens)原理可知，在一个远点产生的电场是孔径各阵元作用的叠加。每个阵元所产生的作用在幅度上正比于阵元上场的振幅，而在相位上延迟了到远点的路径所包含的周期数。因此，在距离 r 的地方，由 x 和 $x+dx$ 间的阵元产生的场正比于

$$E(x)dx e^{-i2\pi r/\lambda},$$

其中 λ 是波长。

考虑在与 z 轴夹角为 θ 的方向上的一个远点 P 处的场（图 15.2）。设点 P 与原点 $x=0, z=0$ 的距离为 R。那么近似有

$$r=R+x\sin\theta=R+xs$$

其中　　$s=\sin\theta$。

那么　　$E(x)e^{-i2\pi r/\lambda}dx$

变为　　$E(x)e^{-i2\pi R/\lambda}e^{-i2\pi xs/\lambda}dx$。

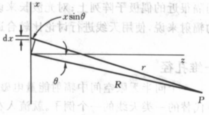


图 15.2　应用惠更斯原理的结构图

因子 $\exp(-i2\pi R/\lambda)$ 表示的是在距离 R 处孔径阵元

所产生作用的平均相位延迟，我们把它和复比例常数归在一起。然后对所有的作用积分，我们可得在 s 方向上的远场是

$$\int_{-\infty}^{\infty} E(x) e^{-i2\pi xs/\lambda} dx。$$

这样，作为方向的函数的远场就通过傅里叶变换与孔径场分布建立起了联系。为了把这个基本的关系整理成标准形式，我们今后用波长作为孔径平面上距离的度量，即我们用 x/λ 代替 x。然后我们定义 $E(x/\lambda)$ 等于原来的 $E(x)$，并引入下面的 $P(s)$

$$P(s) = \int_{-\infty}^{\infty} E\left(\frac{x}{\lambda}\right) e^{-i2\pi(x/\lambda)s} d\left(\frac{x}{\lambda}\right)。$$

量 $P(s)$ 正比于在方向 s 上产生的远场，称为场辐射方向图或角度谱。它通常以某种方式归一化，但是正如我们已经介绍的，它不仅与孔径激励 $E(x)$ 的特征有关而且与激励的电平有关。在归一化以后，它只表示天线的特征，而与能量源的强度无关。

由傅里叶变换的互易性质，立即可得

$$E\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} P(s) e^{i2\pi(x/\lambda)s} ds。$$

由于 s 是一个角度的正弦，所以对 s 的无穷区间取积分的意思比较难以理解。然而，对高方向性的限制确保了当 s 仍然在 $-1 \sim +1$ 的范围时被积函数下降到零。只要积分范围足够大，那么准确的积分限就无关紧要了。

作为一个例子，考虑一个孔径，其

$$E(x_\lambda) = \Pi\left(\frac{x_\lambda}{\omega_\lambda}\right),$$

其中 $x_\lambda \triangleq x/\lambda$；即在 ω_λ 个波长的距离上有一个均匀的场，在此之外场强为零。那么

$$P(s) = \omega_\lambda \operatorname{sinc} \omega_\lambda s,$$

如图 15.3 所示。

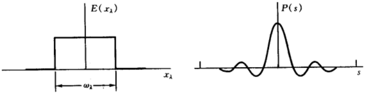


图 15.3　孔径分布及其角度谱

在下面的一维理论中，我们把讨论严格限制于高方向性天线。在更一般的情况下，讨论中考虑如下的情况。首先，必须要考虑场的极化；不论孔径场是在 x 方向上还是在 y 方向上，在孔径法线周围的方向上，辐射能量都近似相等，但是在宽的角度上，余弦因子涉及了一种情况而不是另一种情况。另一种因子考虑到了弧度与 s 的单位之间的不同。另外，还必须考虑到孔径分布中的陡峭的边缘；它们引起了随 z 的增加而逐渐减弱的损耗场，而且对辐射的能量没有贡

献。在高方向性天线中，与辐射相比损耗场的能量是可以忽略的。

与波形和谱对照

在对天线理论方面的一对物理量建立了傅里叶变换关系以后，我们就能够把对天线的叙述翻译成对波形和谱的叙述，反之亦然。剩下的惟一要做的是建立如下的术语对应表：

波形和谱	天线
时间 t	用波长度量的孔径距离 x_λ
频率 f	方向正弦 s
波形 $V(t)$	孔径场分布 $E(x_\lambda)$
谱 $S(f)$	场辐射方向图或角度谱 $P(s)$

考虑到傅里叶变换的互易性，我们可以用两种不同的方法建立对应关系。这里给出的是常用的一种，就像"角度谱"这种术语所证实的那样。然而，对任意波形-频谱对都有两种独立而且不同的天线对应方法，我们根据需要使用。

需要注意的是 $P(s)$ 是 $E(x_\lambda)$ 的 $-\mathrm{i}$ 变换，就像 $S(f)$ 是 $V(t)$ 的 $-\mathrm{i}$ 变换一样。显然，这在现在的上下文中比较方便，但是另一种(相反的)选择也能做得一样好。目前，只是应当记住 x 和 θ 是在相反的方向上测量的。

如果我们知道矩形脉冲的谱是频率的 sinc 函数，立即就可以知道一个均匀激励的有限孔径所产生的辐射角度谱是方向的 sinc 函数。

已知一个冲激具有平坦的频谱告诉我们一个很小的孔径产生各向同性的辐射，一个冲激对具有余弦谱的事实意味着两个极小的天线在一个远处的平面上产生一个余弦变化的场。这些例子图示在图 15.4 中，我们所遇到的任意傅里叶变换对都可以如此解释。

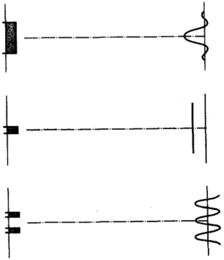


图 15.4 一些孔径分布和它们在远平面上产生的场

除了重新解释特殊的傅里叶变换对这种可能性以外，还可以从我们有关波形和谱的知识中获得其它类型的信息。例如，前面给出的所有定理在新的物理领域都可以被赋予新的含义。更进一步，前面研究的所有相应的性质都可以转换成孔径分布及它们的角度谱的相应性质。作为一个例子，首先考虑相似性定理。

波束宽度和孔径宽度

相似性定理告诉我们如果保持孔径分布的形式不变而放大孔径的尺寸，那么辐射场方向图的形状保持不变但被压缩了一个尺度因子，因为如果

$$E(x_\lambda) \quad \text{引起} \quad P(s),$$

$$\text{那么} \quad E(as_\lambda) \quad \text{引起} \quad |a|^{-1}P\left(\frac{s}{a}\right)。$$

因此，孔径越宽，所形成的波束越窄。

量 $|P(s)|^2$ 称为角度功率谱。它的傅里叶变换是孔径分布的自相关函数。从一个函数的等效宽度和它的傅里叶变换的等效宽度之间是互为倒数的关系可以知道，给定一个孔径分布，我们通过取孔径分布自相关函数等效宽度的倒数就可以计算它的辐射的有限波束宽度。例如，如果我们有一个 10 个波长宽的均匀孔径，那么（三角形）自相关函数的等效宽度将是 10 个波长；因此角度功率谱的等效宽度将是 $\frac{1}{10}$ 弧度或 5.7 度。这个例子见图 15.5。

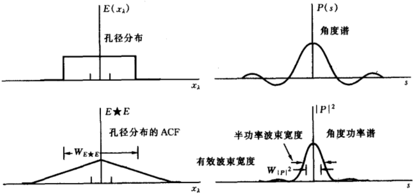


图 15.5　一些天线量之间的关系

波束变向

根据移位定理，如果一个波形相对于 $t=0$ 移位，结果是一个随频率 f 增加而递增的相位延时。因此，通过沿孔径轴 x 引入一个线性相位差，我们一定可以移动天线的波束（相对于 $s=0$）。实际上，移位定理表明

$$E(x_\lambda)e^{-i2\pi Sx_\lambda} \supset P(s+S)。$$

因此，为了使波束移动一个量 S，必须沿孔径的方向每波长引入一个相位差 S。

使用中的各种波束变向方法都依赖于这个原理。一个直接的方法是插入移相器或引入额外长度的传输线。就像通过移动焦点上的馈入点而使抛物面天线的波束变向一样，额外的空中路径也可以引起波束的变向。一个小的频率移动也可以被用于引入适当的相位差。如果在孔径上放置一个薄的绝缘棱镜，它将引入一个与 x 线性相关的递增的相位延迟，从而移动波束。移位的大小是精确的，我们在棱镜反射的基础上计算它。

Arrays of arrays

傅里叶变换应用于天线领域时，卷积定理称为 array-of-arrays 规则。根据这个著名的规则，一组一致天线的方向图是单个天线的方向图和一个"天线阵排列系数"的乘积。这个因子是用一组点源代替一组天线所得到的方向图。

设一个特定天线的孔径分布为 $E(x/\lambda)$。那么分布

$$\sum_{n=1}^{N} E\left(\frac{x-x_n}{\lambda}\right)$$

是一组 N 个这样的天线，它们的中心位于点 $x=x_1, x_2, \cdots, x_N$。这样的一个分布可以用卷积表示为

$$E\left(\frac{x}{\lambda}\right) * q\left(\frac{x}{\lambda}\right),$$

其中 $q\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ 是一组冲激，

$$q\left(\frac{x}{\lambda}\right)=\sum \delta\left(\frac{x-x_n}{\lambda}\right)。$$

令 $Q(s)$ 表示 $q(s/\lambda)$ 的傅里叶变换。由卷积定理可得，如果一个单天线的方向图为 $P(s)$，那么一组天线的方向图为

$$P(s)Q(s)。$$

这里，$Q(s)$ 是天线阵排列系数（= 阵列因子）。

我们也可以反过来应用卷积定理。如果我们有一个孔径分布 $E(x/\lambda)$，对它乘以一个与 x 相关的因子，那么可以通过原有的波束和这个因子的变换进行卷积得到它对波束的影响。例如，许多孔径分布都是近似均匀的，仅在靠近边缘激励减小的地方不均匀。这种宽的锥形的因子具有窄的变换，该变换与均匀分布的方向图的卷积构成了必要的修正。乘性因子不需要是实的；假设它是 $\exp ikx$，即模为 1 而相位正比于 x 的一个因子。它的变换是一个移位的冲激。与一个移位冲激的卷积只是简单地移动了波束的位置。

干涉仪

调制定理是卷积定理的特例，它对天线有特别重要的意义。考虑一对在空间上彻底分开的相同的天线。这种排列被称为两元干涉仪。因为总的分布可以表示为一个单阵元和一对恰当间隔的脉冲的卷积，所以方向图可以通过一个单天线的方向图简单地乘以一个适当的 s 的余弦函数来得到。

图 15.6 显示了下面的孔径分布

$$E(x_\lambda) = \Pi\left(\frac{x_\lambda + W_\lambda}{\omega_\lambda}\right) + \Pi\left(\frac{x_\lambda - W_\lambda}{\omega_\lambda}\right)$$

它是用两个间隔 $2W_\lambda$ 的天线建立的，两个天线用等长度的电缆连接到中间的一对终端设备。由此可得

$$P(s) = 2\omega_\lambda \operatorname{sinc} \omega_\lambda s \cos 2\pi W_\lambda s,$$

而功率辐射方向图近似为 $P(s)$ 的平方，如图 15.6 所示。

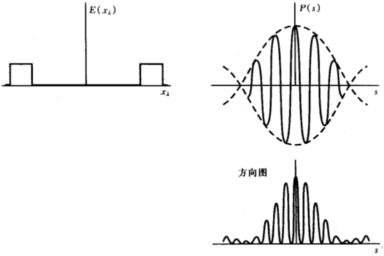


图 15.6　两元干涉仪的孔径分布，角度谱 $P(s)$ 及其方向图

频谱灵敏度函数

当第一次绘制无线电发射的方向图时，由于从天线波束内不同方向接收到的功率的平均效应，显然所观察到的作为方向的函数的射频强度分布与真实的分布并不完全相同。但是，由于天空的球形弯曲和实际天线波束限制为 10° 或更宽的原因，它与二维卷积的联系不是十分明显。那种认为天空亮度分布能够分解成空间正弦分量，以及扫描天线的响应是正弦的概念不是显而易见的，实际上它只是一个近似。然而，当用一个窄波束扫过一小片天空时的情况类似于信号理论。亮度的真实分布是输入信号；天线的功率辐射方向图是线性系统的冲激响应；输出记录是真实分布和天线方向图的卷积。因此，通过卷积理论，存在一个描述系统对不同谱分量的响应灵敏度的传输函数。空间均匀分布的天空亮度现在可以称为空间直流。对亮度的正弦分量的响应随着空间频率 u（用每弧度的周期数来度量）的增加而减弱；波束所跨过的空间极小点部分是由邻近极小点但仍在波束内的更亮区域的贡献填充的；而空间的极大值会被包含在波束区域内的更暗一些的地方所侵蚀。因此，当用天线扫描时，正弦分量的幅度被减小了。作为空间频率 u 的函数，相对于空间直流的缩小因子就是谱灵敏度函数。由卷积定理可以得到天线孔径分布的自相关函数（参见图 15.5），它表达了灵敏度与空间频率的相关性。例如，对如图

15.3 所示的孔径分布 $E(x/\lambda)=\Pi(x/w)$，谱密度函数 $T(u)$ 等于 $\Lambda(wu/\lambda)$，按 $T(0)=1$ 进行归一化。我们由此可以知道宽度为 w 的简单天线以一种可计算的方法对不同的空间频率进行响应，且存在一个临界频率 $s_c=\lambda/w$，超过这个频率天线根本不作任何响应，对所有用宽度为 w 的孔径分布表示的天线来说这个截止频率都是一样的。

与信号滤波器的这种类比有一个奇怪的不相容之处；一个具有有限持续期冲激响应的滤波器具有无限连续的频率响应，而相似的天线的频率响应是截止的。在 Bracewell 和 Roberts(1954) 以及 Bracewell(1958,1962,1995) 中讨论了把天线映射术语转化成滤波器理论的术语的能力。

调制传输函数

由照相机镜头产生的与场景有关的图像在某种程度上与天线映射有如下的关系。首先三维场景投影到一个与照相机胶卷平面平行的目标平面上。然后从物体的每一点发出的光将在胶卷上形成像点，这可以用透镜对点源的响应来描述。无论怎样去设计透镜，点响应函数在图像平面上是变化的，但是对实际的目的来说是取它在有限区域上的不变性，称之为等晕区。在这个小区域内物体和图像之间具有简单的卷积关系。如果物体的亮度是一个空间正弦，那么图像也是正弦的，但是由可见度函数(对空间直流或均匀亮度归一化到 1) 决定的幅度减小了。一般情况下都存在空间相移，虽然对中间的等晕区来说，透镜的圆对称使得相移变得并不重要。

可见度函数在恒星直径的测量中扮演着基本的角色，在麦可逊 A. A. Michelson(1902) 所做的观察中，当除两个平行的缝隙外把孔径完全遮住时，在望远镜中能看见正弦衍射纹的幅度。通过注意到衍射纹的可见度如何随缝隙间隔的增加而下降，麦可逊得到了猎户座上的亮度分布的部分傅里叶变换，并推导出了角度参数。大气层变化导致了衍射纹在目镜中的运动；因此空间相位被忽略了。在光学中的叙述性术语纹理可见度可以用调制传输函数(MTF) 来代替；它对应于谱灵敏度函数的绝对值。当把傅里叶方法引入到透镜设计中时，对表示透镜的性能来说，调制传输函数是一个重要的工具，它能比通常使用的用每厘米的线数表达分辨率提供更多的细节，通常使用的分辨率是一个可以通过对规则的网格拍照很容易得到的简单参数。

当需要考虑空间相位时，可以使用通过对点响应函数的复的傅里叶变换而得到的光传输函数(OTF)；它的绝对值是原来的调制传输函数。从无线电干涉的观点，(边缘 = 纹理) 可见度可以推广到复的纹理可见度，它不仅考虑了观察到的纹理幅度，而且考虑了任何用纹理间隔表示的空间移位(Bracewell,1958)。在电子学中，建立了输入正弦和输出正弦关系的复因子 $T(f)$(第 9 章)，以及 $|T(f)|$ 都可以被称为传输函数。

角度谱的物理特性

孔径分布 $E(x/\lambda)$ 的傅里叶分析使用的分量形式是

$$P(s)e^{i2\pi x_\lambda s}。$$

这种分量在孔径的所有点 x 上具有同样的幅度，但是它们的相位沿孔径方向逐渐递增。由一个平面波引起的场从后面的一个引起相位差的合适的角度入射到孔径上。(入射角度的正弦是 s。) 自然地，有一个确定的入射平面波引起的孔径场就是在与入射方向相同的方向上发射一个平面波的孔径场。这样，孔径分布的每一个分量在一个确定的方向上发射平面波，而且在所有

方向上从孔径发出的所有的辐射，都可以表示为所有方向上无穷多个平面波的叠加，每一个都具有适当的幅度和相位。

当 $|s|>1$ 时，相位 $2\pi s_\lambda s$ 在点 x 的变换率在距离 λ 内超过了一个整周期。显然，没有入射行波能够引起这种场，因为沿着任意倾斜的部分所测得的波的峰-峰距离可以大于或等于波长 λ，但是不能小于波长。如果强加这样一种孔径场，那么将不会发出行波；场将只是在 z 方向上衰减。

代替把场分解成指数，我们可以把孔径分布分解成形如

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2\pi s_\lambda s)$$

的正弦和余弦分布。这种分量的空间周期是 λ/s（用 x 的单位测量），或者"空间频率"是每 x 单位 s/λ 周期。由于每一个这样的分量由一对指数组成，它在与 x 方向夹角相等的两个方向上发射一对相等的平面波。空间频率越低，这两个波越接近于 z 方向。而相反地，随空间频率趋于每自由空间波长 λ 一个周期，我们在孔径平面上会有由相反方向的两个行波引起的驻波。

这种对孔径辐射的角度分布来说通常很有用的方法是可替代使用惠更斯原理处理的一种方法，在惠更斯原理中，孔径被分解为阵元。

二维理论

因为孔径分布的辐射本质上要涉及二维变换理论，所以一维表示应该看作是对这个主题的导引。下面的讨论在二维的情况下建立傅里叶变换关系，并且不需要上面讨论的高方向性的近似。

设孔径平面(x,y)上的电场分布在 y 方向上的分量为 $E_y(x_\lambda,y_\lambda)$，并设 x 方向的分量是零。如果不是这样的，可以用类似的方法像 y 分量一样分开处理。还有一个垂直于孔径平面的 z 分量，但是因为它可以通过使用电场向量的散度应该为零这个条件从 y 分量推出，所有孔径分布的描述中不需要它。

由孔径引起的场可以表示为平面波的和的形式

$$\mathscr{P}(l,m)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi/\lambda)(lx+my+nz)}\,\mathrm{d}l\mathrm{d}m,$$

其中 l,m,n 是方向余弦，$\mathscr{P}(l,m)\mathrm{d}l\mathrm{d}m$ 是在 l 到 $l+\mathrm{d}l$，m 到 $m+\mathrm{d}m$ 这个环体内波的复振幅。

在方向(l,m,n)上的行波在 $z=0$ 的平面上产生场

$$\mathscr{P}(l,m)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi/\lambda)(lx+my)},$$

它的空间周期 λ' 是

$$\lambda'=\frac{\lambda}{(l^2+m^2)^{\frac{1}{2}}}。$$

如果 l^2+m^2 超过 1，空间周期 λ' 小于 λ 并因而精确表示孔径分布的细节。在这种情况下 n 是虚的，由于方向余弦的性质

$$l^2+m^2+n^2=1,$$

且分量平面波取如下形式

$$e^{-(2\pi/\lambda)|n|z}\mathscr{R}(l,m)e^{i(2\pi/\lambda)(lx+my)}dldm,$$

它表示(x,y)平面中的行波，但随z指数衰减。这种场对离孔径任意距离上的辐射场没有贡献。

如果l^2+m^2小于1，λ'的范围从无穷(垂直于孔径平面的传播)到λ(平行于平面的传播)。在方向(l,m)上的每单位立体角的功率辐射正比于中心在(l,m)方向上的小锥体内每单位立体角波的复振幅的模的平方。因为由阵元$dldm$所对的立体角是$n^{-1}dldm$，所以方向图是

$$\left|\frac{\mathscr{R}(l,m)dldm}{n^{-1}dldm}\right|^2=n^2|\mathscr{R}(l,m)|^2。$$

为了求得与给定的$\mathscr{R}(l,m)$有关的孔径分布$E_y(x_\lambda,y_\lambda)$，我们把$z=0$平面上的分量平面波对所有的l和m求和。射线(l,m)的场和y轴之间的角度β的余弦是$n(1-l^2)^{-\frac{1}{2}}$。因此，把每条射线的场分解到y方向，我们有

$$E_y(x_\lambda,y_\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n}{(1-l^2)^{\frac{1}{2}}}\mathscr{R}(l,m)e^{i(2\pi/\lambda)(lx+my)}dldm。$$

这不是十分典型的傅里叶变换。设$E_y(x_\lambda,y_\lambda)$的傅里叶变换是$P(l,m)$；它被称为由孔径分布产生的角度谱。这样

$$P(l,m)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}E_y(x_\lambda,y_\lambda)e^{-i(2\pi/\lambda)(lx+my)}dx_\lambda dy_\lambda,$$

并且，反过来有

$$E_y(x_\lambda,y_\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}P(l,m)e^{i(2\pi/\lambda)(lx+my)}dldm。$$

由此可得，$P(l,m)$和复振幅$\mathscr{R}(l,m)$之间的关系为

$$\frac{n\mathscr{R}(l,m)}{(1-l^2)^{\frac{1}{2}}}=P(l,m)。$$

这里，辐射方向图是

$$n^2|\mathscr{R}(l,m)|^2=(1-l^2)|P(l,m)|^2=\cos^2\phi|P(l,m)|^2,$$

其中ϕ是方向(l,m)和yz平面之间的角度。在高方向性天线的情况下，天线在靠近z方向($\cos\phi$近似等于1)的方向上的辐射和$|P|^2$在本质上与辐射方向图是一样的。

光衍射

由于光辐射与天线同样遵循电磁理论，所以在光学和天线理论之间有基本的类似关系。的确，正如微波光学领域所证实的一样，无线电波和光之间没有明显的界线。然而，大多数光学器件要比天线小很多，这就导致了加工和使用上的显著的差别，即使存在一定范围的重叠。随着时间的推移，光学激励通过光纤，或者通过公认起源于微波电路的微电子电路，这些实际上已经模糊了天线和光学之间的区别，并且出于教学的目的已经把两者的基本原理合并在一起了。

除了在很高的频率和很低的温度情况下，对天线来说量子效应不是很显著。望远镜和接收

天线之间的一个更显著的不同是望远镜在它的焦平面上捕获图像，而天线通常不是这样的。的确，在抛物面反射器的焦平面上存在一个图像，但是通常只捕获一个像素，例如通过一个中心在焦点上的电磁喇叭，如同是望远镜焦平面上的胶片或 CCD 阵列用一个简单的光探测器代替一般。所以当提到点响应函数时，在光学中指的是通过在照相底版或胶片上曝光作为一个整体记录的实体，然而对天线来说必须进行一个二维栅扫描。在天线和望远镜之间的一个更相像的类比是恒星的精确光度测定法，在这里使用的望远镜是在焦平面上装有一个简单的光探测器。

菲涅耳衍射

在天线的讨论中，目标是建立场的平面孔径分布和远场中作为方向函数的辐射方向图之间的关系。对本书来说，基于孔径分布的傅里叶变换，或者角度谱的研究是恰当的。由于在一个函数和它的傅里叶变换之间的关系是惟一的，所以角度谱包含了孔径分布的描述中所包括的所有信息，从而形成了一个严格的基本原理。然而，对天线来说，远场辐射方向图对通信链路有重要意义并得到了重视。

远处应该在哪儿开始呢？如果孔径跨过 N 个波长，那么远场，或 Fraunhofer 区域从 N 个孔径宽度的距离上开始。通信一般情况下都远大于这个距离。在频率很低的地方就会有例外的情况，例如用雷达研究电离层，近场超过了几十千米；还有，很多天线阵列的阵元十分接近使得彼此处在近场中，这在天线设计中变为了一个因素。另一方面，在光学中，近场或菲涅耳场是比较重要的。通过研究孔径分布的傅里叶分量可以方便地讨论菲涅耳场。

与前面一样，设孔径平面（或函数域）为 (x,y) 平面，而 z 轴垂直于孔径平面。孔径分布的傅里叶分量是一个诸如 $\cos k_x x$ 的空间静止正弦，其中 k_x 是空间角频率，其单位是每单位 x 上的弧度数（如弧度每米）。这个特殊波的脊线与 y 轴平行，而 z 轴穿过脊线。一般的分量形式是

$$a\cos(k_x x + k_y y) + b\sin(k_x x + k_y y),$$

它考虑到了 (x,y) 平面的任意方向和 z 轴相对于脊线的任意位置。但是，通过旋转和移动 (x, y) 轴，我们能以要求的任何幅度回到 $\cos k_x x$，且这个表达式足以满足下面的讨论。

正如我们已经看到的一样，通过对 (x,y) 平面的照射可以建立这种驻波，用与 z 轴倾斜相同角度 i 且与 z 轴共面的两条射线可以描述两个波长为 λ 的相等的平面波。由此可得，无论是用什么方法引起的驻波将辐射一对同样倾斜的射线。入射角度与 k_x 的关系为 $\sin i = k_x\lambda/2\pi$。另一个可选的参数 λ_x（x 方向的波长）与 k_x 的关系为 $k_x = 2\pi/\lambda_x$。当两个行波在 $z = 0$ 处相加，结果是驻波 $\cos k_x x$，或者 $\cos(2\pi x/\lambda_x)$。但是离开 $z = 0$，当 $z > 0$，带有相位延迟的行波将叠加产生一个幅度被压缩的驻波 $\cos k_x x \cos k_z z$，其中 $k_x^2 + k_z^2 = (2\pi/\lambda)^2$。在距离孔径平面 $z = 2\pi/k_z = \lambda_z$ 的地方，场将恢复到 $\cos k_x x$。因而，在 z 方向上场的传播在一个周期内通过的距离是 λ_z。因为 λ_z 一定大于 λ（假设 $i \neq 0$），所以 z 方向上的速度是入射波速度的 λ_z/λ 倍。这正是在 z 方向扩展，且在 $x = \pm\lambda_x/4$ 处装有导电墙的波导中的实际情况。

为了更好地理解这种结构，考虑两种极端的情况。当 $i = 0$ 时，两个入射波一致，λ_x 是无穷，$\cos k_x x$ 变为与 x 无关的 1，在孔径平面上有均匀的照射。自然地，这个孔径分布在 z 方向上发射一个单个的射线。如果 i 比 $\pi/2$ 小一点且在增加，那么入射波几乎以完全相反的方向互相通过，并产生 $\lambda_x \approx \lambda$ 的合成波，而 $\lambda_z \to \infty$。似乎对所有可能的这类情况，孔径内的波会彻底抵消耗尽，但是它完全可以在 $\lambda_x < \lambda$ 的地方产生孔径分布。通过在波导中插入一个可变光圈或者通过

类似在玻璃产生全反射一样倾斜照射可以做到这一点。随着 z 的增加，与 $\cos k_x x \exp(-|k_z|z)$ 一样，场也指数衰减或逐渐消失。

从这种物理描述，我们能按照下述方法由一个给定的孔径分布在 z 的任意距离上构造菲涅耳场。傅里叶把孔径分布分解成各种空间频率 k_x 的正弦，对每一个乘以相应的传播因子 $\cos k_z z$，其中 $k_z = \sqrt{(2\pi/\lambda)^2 - k_x^2}$ 而且通过叠加重新合并综合成菲涅耳场。如果 k_z 是虚数，则对应一个损耗波（这种情况不是对每个应用都存在的）；因为这种分量对应的衰减因子是 $\exp(-|k_z|)$。

这个过程是严格的，类似于通过把输入波形分解成傅里叶分量，对每个分量改变一个传输因子，最后再合并这种方法来计算滤波器的响应。在菲涅耳区域中可以很好的使用场的数值分析方法。

傅里叶分析的其它应用

天线和光学器件是测量仪器、通信链路、记录设备、机械和弹性结构等常见的组成部分，并在多种领域扮演着重要角色。环境的微波探测和摄影就是这样的例子，其中在那里是什么和记录了什么之间存在着卷积关系。因而，傅里叶分析的背景不仅对理解和设计射频和光学传感器很有用，而且对发挥它们的信息采集功能也很有用。就信息状况而言，传感器可以看作是一个外诸如波束这样的用特性刻画的黑盒子。傅里叶分析不仅是箱式电磁设计的工具，而且对那些不关心这种细节但是从事信息采集和处理的用户来说也是重要的工具。在空间中用波束扫描或映射的概念类似于时域中的电滤波器，一旦解释了一个新的没有系统阐述的概念，就例证了傅里叶方法的非凡的通用性。

要进一步研究天线这个领域需要电磁理论方面的完整的背景，再加上一些教材的学习，如 Kraus(1988)，作者是我们的一个著名的老师。在下面列出的其它教材以及 IEEE Transactions on Antennas and Propagation 期刊文章中的参考文献列表中可以找到更详细的参考书目。要继续对光学应用进行研究可以参考 Goodman(1996)，美国光学协会和 SPIE(The International Society for Optical Engineering，国际光学工程社团）的各种出版物，以及参考书目中提到的其它教材。

参考书目

Annual Reports of the Lehrstuhl für Optik, Physikalisches Institut, Universität Erlangen-Nürnberg, Germany.

Born, M., and E. Wolf: "Principles of Optics," 6th ed., Pergamon, New York, 1986.

Bracewell, R. N.: "Radio Interferometry of Discrete Sources," *Proc. Inst. Radio Engrs.*, vol. 46, pp. 97-105, 1958.

Bracewell, R. N.: "Radio Astronomy Techniques," *Encyc. of Physics*, vol. 54. S. Flügge, ed., Springer-Verlag, Berlin, 1962.

Bracewell, R. N.: "Two-Dimensional Imaging," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.

Bracewell, R. N., and J. A. Roberts: "Aerial Smoothing in Radio Astronomy," *Aust. J. Phys.*, vol. 7, pp. 615-640, 1954.

Clarke, R. H., and J. Brown: "Diffraction Theory and Antennas," Ellis Horwood,

Chichester; Wiley, New York, 1980.
Collin, R. E.: "Antennas and Radiowave Propagation," McGraw-Hill, New York, 1985.
Gaskill, J. D.: "Linear Systems, Transforms, and Optics," Wiley, New York, 1978.
Goodman, J. W.: "Introduction to Fourier Optics," 2d ed., McGraw-Hill, New York, 1996.
Griffiths, J.: "Radio Wave Propagation and Antennas: An Introduction," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
Haus, H. A.: "Waves and Fields in Optoelectronics," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.
Kraus, J. D.: "Antennas," 2d ed., McGraw-Hill, New York, 1988.
Marathay, A. S.: "Elements of Optical Coherence Theory," Wiley, New York, 1982.
Michelson, A. A.: "Light Waves and Their Uses," University of Chicago Press, 1902.
O'Neill, O.: "Introduction to Statistical Optics," Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1963.
Papoulis, A.: "Systems and Transforms with Applications in Optics," McGraw-Hill, New York, 1968.
Ramo, S., J. R. Whinnery, and T. Van Duzer: "Fields and Waves in Communication Electronics," 3d ed., Wiley, New York, 1994.
Schelkunoff, S. A., and H. Friis: "Antennas, Theory and Practice," Wiley, New York, 1952.
Silver, S.: "Microwave Antenna Theory and Design," McGraw-Hill, New York, 1949.
Stutzman, W. L., and G. A. Thiele: "Antenna Theory and Design," Wiley, New York, 1981.
Thompson, A. R., J. M. Moran, and G. W. Swenson, Jr.: "Interferometry and Synthesis in Radio Astronomy," 2d ed., Wiley, New York, 1999.
Yariv, A.: "Optical Electronics," Holt, Rinehart and Winston, New York, 1985.

习题

1. 解释为什么角度谱 $P(s)$ 的等效宽度不能用作通用的波束宽度参数。

2. 在 $E(x)$ 的复平面上作图以解释积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} E\left(\frac{x}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi s x/\lambda} \mathrm{d}\left(\frac{x}{\lambda}\right)。$$

在一定的范围上取 $E(x/\lambda)$ 等于 1，在范围外取它等于 0。取 s 的值使得最外端射线之间的路径差为 0，$\lambda/2$，λ，$3\lambda/2$。

3. 在相位复矢量图的帮助下，解释为什么一个均匀激励的孔径的方向图在其端阵元产生的具有相同相位的远场方向上产生零点。

4. 单脉冲天线 一个孔径在幅度上被均匀激励，但是其中一半的相位和另一半的相位是相反的。画出相位复矢量图以证明角度谱在垂直于孔径的方向上有零点，且在直到下一个零点的中间的最大值是 $2/\pi$，且在不存在相位反转的情况下也是这样的。

5. 通过相位复矢量图研究其中的一半和另一半正交的均匀孔径的方向图中的第一个零点的位置，以及主最大值的强度和位置。

6. 容许衰减 一个能量源通过传输线馈给天线，它用同样的幅度和相位激励每一个阵元。由于介电部分的老化，传输线变得有损耗，这导致了激励的幅度随着离源距离的增加而减

小。研究其对天线的波束指向方向和零点的影响。

7. 研究孔径分布

$$\cos^n \pi x \Pi(x)。$$

它在所有情况下的有效波束宽度是多少?

8. 通过取一个边缘幅度比中间幅度大的孔径分布 $f(x)\Pi(x)$,有效波束宽度能比均匀情况(即 $f(x)=1$)下更窄吗?

9. 就天线而言,给出下面的定理和关系的物理解释:瑞利定理,定积分关系,不确定关系。

10. 焦平面成像 一个发射无线电波的天体的射电图像形成在包含抛物面反射器焦点的表面上;证明在一定的离散间隔上对图像进行采样就足够了。通常位于抛物面焦点上的收集器的尺寸是有限的;采样间隔与这个尺寸有关吗?

11. 我们希望对一个被怀疑发射X射线的天体形成一个X射线图像,但是由于X射线被折射和反射的不多使得光线聚焦比较困难。你如何解决这个问题?

12. 给出一个高方向性天线的例子,其方向图的旁瓣功率电平以 $|\theta|^{-3}$ 下降,其中 θ 从波束的中心开始测量。解释为什么这个法则不能持续到 $\theta=\pi/2$,作出你的例子的实际性态。

13. 旁瓣电平 一个半径为 a 的圆形孔径的激励幅度正比于 a^2-r^2。证明第一个旁瓣比主波束低 26dB。提出一些实际上达不到这个值的原因;研究由一个遮挡孔径 5% 的馈电支撑三角架所产生的干扰的数量级。

14. 视觉敏锐度 计算眼睛的波束宽度,用毫弧度表示,取瞳孔的直径为 4 毫米。

15. 从缝隙发出的辐射 在缝隙天线的孔径中,切向电场的 y 分量为

$$E_y = E_0 \Pi\left(\frac{y}{w}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right);$$

其中宽度 w 比长度 l 小。主方向上波束的等效宽度是多少?在哪个方向上辐射是零?

16. 缝隙天线阵 在飞机的金属下表面切出 8 个平行的缝隙阵列。缝隙的宽度和长度是通过结构研究确定的,分析间隔的选择要使增益最大。结构专家主张缝隙能够紧靠在一起,因为由惠更斯原理,垂直于飞机下面的地面上的场强与间隔无关。天线专家说,场强或许是一样的,但在不必要的方向上将会有额外的功率辐射;他建议缝隙的安装应该间隔 $\frac{4}{5}$ 波长。他的助手用瑞利定理争辩说所辐射的功率是通过每个缝隙的功率的和,并得出结论如果波束宽度不重要,那么紧靠在一起是正确的。辨别并纠正错误的叙述。

17. 月蚀 一个遥远的米波辐射点源从月亮边缘的后面发出。证明由一个天线接收的功率和

$$\left|\int_{-x}^{\infty} e^{i(-\pi y^2/D\lambda)} dy\right|^2$$

成比例的变化,其中 D 是到月亮的距离,x 是从相切的射线到观测者的距离。设 $q(x)$ 是这个表达式对 x 的导数。证明 $q(x)$ 的傅里叶变换是

$$Q(s) = \lambda D e^{i\pi\lambda D s^2 \operatorname{sgn} s}。$$

设从一个扩展的源接收到的功率的导数是 $g(x)$;证明它与真正的源分布有相同的自相关函

数。因为一个函数与 $q(x)$ 卷积只是通过使它们的相位差正比于它们的频率的平方打乱了它的傅里叶分量，所有与 $q(-x)$ 的卷积可以恢复它们。分析把

$$q(-x) * g(x)$$

用于真正源分布恢复的优点。

18. 野外阵列　一个著名的天线由 96 个可控的 42 英尺（1 英尺 = 0.304 8 米）的抛物面组成，它们等间隔地排在半径 1.5 千米的圆上，工作波长是 3.5 米。证明作为方向余弦 l 和 m 函数的角度谱是

$$\left\{\sum_{p=1}^{96}\cos\left[2\pi\times 430\left(l\cos\frac{2\pi p}{96}-m\sin\frac{2\pi p}{96}\right)\right]\right\}P(r),$$

其中 $r=(l^2+m^2)^{\frac{1}{2}}$，$P(r)$ 是单个阵元的角度谱。注意到在排列方向上 96 个余弦波纹等间隔地叠加在原点和那些由波纹的波峰和波谷趋于会聚的点构成的同心圆环上形成峰值。直接证明中心峰值可以近似为 $J_0(2\pi\times 430r)P(r)$。证明精确的结果是

$$[J_0(2\pi\times 430r)+2J_{96}(2\pi\times 430r)\cos 96\theta+2J_{192}(2\pi\times 430r)\cos 192\theta+\cdots]P(r)$$

其中 $\theta=\arctan(m/l)$。

19. 海浪方向探测器　说明如何能在海底建立一个压力计阵列用于海浪能量的定向接收，如何通过合理地处理每个仪器记录的压力来测定各种不同的方向。反过来，为什么天线阵的波束每次只指向一个方向；为什么没有出现类似于对天线阵元正确定相的任何问题?加州海岸外的海浪的频率范围是每 1 000 秒 50 ~ 100 个周期（波长大约等于 1 千米）这主要来自于南海洋中的暴风雨。这能用一个沿海的阵列来确认吗?

20. 计算等边三角形孔径的衍射方向图。

21. 高分辨率干涉仪　18 个一致的天线分别位于 $x=1,2,3,\cdots,15,16,16.5,32.5$ 处，其中 x 的单位比波长大。从所有天线接收的信号通过一致的传输线引入到同一点，然后把前 16 个天线的电压相加，而把剩下的两个天线（$x=16.5, 32.5$）的电压相加，再把所得的两个电压相乘。一个辐射点源通过这个系统的波束。证明响应的宽度近似等于一个从 $x=1$ 延伸到 $x=48$ 的单个长天线的半功率波束宽度。

22. 天空光栅扫描　在通常都满足的条件下，射线探测仪对一个天空辐射源的响应可以用二维卷积 $A**T$ 来表示，其中 T 是辐射源的温度，是方向的函数，A 是对点源的响应。我们用相邻扫描线之间间隔 X 毫弧度的光栅扫描一个源。假设 $X<500\lambda/w$，其中 λ 是波长，w 定义如下 —— 在与点源方向垂直的平面上做一个天线孔径的正交投影，那么 w 是垂直于光栅线方向上的投影孔径的宽度。证明如此得到的数据足以弥补缺少的扫描。

23. 轮辐衍射方向图　考虑由一个线冲激 $\delta(y)$ 加上 $N-1$ 个分别旋转 $180°i/N$ 的拷贝组成的函数 $f(x,y)$，其中 $i=1,2,\cdots,N-1$。这样共有 N 个线冲激（或 $2N$ 个“辐条”）。设 $f(x,y)=\hat{f}(r,\theta)$。写出 $\hat{f}(r,\theta)$ 的表达式。求 $f(x,y)$ 的二维傅里叶变换 $\hat{F}(q,\theta)$。

24. 三角形孔径　一个宽度有许多波长的等边三角形孔径位于一个平面上，且有均匀的单位激励。三角形以外激励是零。角度谱是 $P(l,m)$。研究围线 $P(l,m)=0.707P(0,0)$（即半功率围线）。(a) 它能使你想起一个圆，一个三角形，或者一些其它的形状吗?(b) 你能简单地解释（而不是通过计算）它为何能够拥有你已经发现的特征吗?(c) 你能给出一个认为主波束周

围存在或者不存在 $P(l,m)$ 的一个零围线的理由吗？

25. 旁瓣缩减 直径为 $2a$ 的望远镜上的孔径场分布为 $E_0(r)=\prod(r/2a)$，且在 $r=a$ 处不连续地减到零，会有一个强的衍射环或光旁瓣不能很快地衰减。事实上，因为

$$\prod(r/2a)\text{ 的汉克尔变换是}(2a)^2\mathrm{jinc}2aq,$$

其中 $\mathrm{jinc}q=(2q)^{-1}J_1(\pi q)$，而且如果 $q\gg 1$，$J_1(q)\approx(2\pi q)^{-\frac{1}{2}}\cos(q-3\pi/4)$，旁瓣幅度随 $q^{-3/2}$ 衰减，功率以 q^{-3} 衰减。如果我们希望使旁瓣降到一个更低的电平，我们可以去除间断点，更进一步，去除斜率的间断点等等。用这种方法处理过的孔径被称为已旁瓣缩减的。例如一个孔径场分布 $(1-r^2/a^2)\prod(r/2a)$ 是连续的，但它的斜率在 $r=a$ 不连续；$(1-r^2/a^2)^2\prod(r/2a)$ 具有连续的斜率，但它的二阶导数是不连续的，等等。一般地，我们说 $(1-r^2/a^2)^k\prod(r/2a)$ 的 k 阶微分是不连续的。随着 k 的增加，孔径函数 $(1-r^2/a^2)^k\prod(r/2a)$ 产生的方向图的旁瓣连续地减小。它们被称为 Sonine 函数。证明 $(1-r^2/a^2)^k\prod(r/2a)$ 的哈特利变换是 $\pi a^2 2^{k+1}k!(2\pi aq)^{-k-1}J_{k+1}(2\pi aq)$。

26. 零干涉仪 使用一个两元干涉仪观察一个角度直径为 0.001″ 的近处的恒星从而确定在角度距离 0.5″ 的地方存在行星的可能性。恒星的辐射比行星的辐射大 5 000 倍。两个干涉仪阵元反相连接在一起从而使在指向恒星的方向上的响应为零。为了使设想的行星位于干涉仪的最大接收方向上，干涉仪阵元应该分开多少波长？

27. 抛物面孔径分布 一个孔径分布表示为 $E(\xi)=(1-4\xi^2/a^2)\prod(\xi/a)$，其中 $\xi=x/\lambda$，$a=10$。(a) 孔径的总宽度是多少波长？(b) 求角度谱 $P(s)$，归一化使 $P(0)=1$。(c) 证明第一个旁瓣出现在离波束轴 $s=0.018\ 35$ 或 $1.05°$，并且相对主波束下降 21dB。

第 16 章

在统计学中的应用

傅里叶变换理论以几种方式出现在统计学和涉及随机现象的物理学中，这些方式大都可以追溯到某一基本的卷积关系上。于是，对这个基本关系应用卷积定理就引入了傅里叶变换，这就使我们能够运用本书中的理论。

傅里叶变换所涉及的主题范围相当广泛，包括需要考虑随机现象的物理学和工程的所有分支。然而，为了说明问题我们所举的例子仅是诸多可能应用的很小的一部分。合适的相关读物包括以下作者的著作：Gardner(1986)，Gray(1987)，Leon-Garcia(1989)，帕普里斯 Papoulis(1965) 以及 Parzen(1962)。

我们首先对所使用的术语做一简单说明。频率分布的例子有正态分布（误差的），瑞利分布，泊松分布，以及其它熟知的用一些具有各种可能值的量描述相对频率的函数。一般情况下，我们用符号 $P(x)$ 表示频率分布；x 和 $x+\mathrm{d}x$ 之间的相对频率或者概率用 $P(x)\mathrm{d}x$ 表示，它是一个无量纲的量。（在 $\mathrm{d}x$ 有量纲时，$P(x)$ 也是有量纲的，是 $\mathrm{d}x$ 的量纲的倒数）。

由于统计理论应用的多样性，我们会碰到许多或多或少与频率分布同义的术语，诸如，概率分布、概率律、概率密度函数，以及分布函数[①]。

下一节中，将用两个问题来说明上面提到的卷积关系。

和的分布

如果我们购买了大量标为 10% 容差的 100 Ω 的电阻，我们将发现其阻值范围为 90 ～ 110 Ω。而且在任意一个 1 Ω 间隔内的电阻数量都大致相同。这种情形和从在 90 ～ 110 Ω 之间的任一个 1 Ω 间隔有相等数量电阻的无数电阻（这些电阻中不包括 90 ～ 110 Ω 外的电阻）中抽取的结果是一致的。这种结果是由电阻生产过程中的制造和分类方法所决定的。（一种潜在的可能是，其中没有 99 ～ 101 Ω 之间的电阻。那些电阻已经被挑出以更高精度的电阻出售了）。因此，

① 术语“分布函数”也用于表示累量频率分布，即 $P(x)$ 从 $-\infty$ 的积分。

我们假设，现有的电阻是从阻值在 R 和 $R+\mathrm{d}R$ 之间出现的频度为 $P_1(R)\mathrm{d}R$ 的大量电阻中抽取的。这里

$$P_1(R)=\frac{1}{20}\Pi\left(\frac{R-100}{20}\right)。$$

上式中，$\Pi(R)$ 是单位矩形函数，因数 $\frac{1}{20}$ 是为了满足以下要求，

$$\int_0^{\infty} P_1(R)\mathrm{d}R=1。$$

频率分布 $P_1(R)$ 见图 16.1。

如果我们有一批 50 Ω 电阻，也具有 10% 的容许偏差，它的频率分布 $P_2(R)$ 由下式给出：

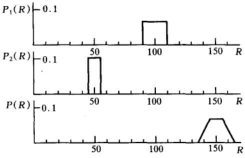


图 16.1　由两批具有 10% 容差的电阻串联得到的电阻 R 的频率分布

$$P_2(R)=\frac{1}{10}\Pi\left(\frac{R-50}{10}\right)。$$

我们计划建立一个电路，根据设计需要一个 150 Ω 的电阻，这可通过现有两种电阻的串联得到，并且我们需要知道组合电阻的容差是多少。换句话说，我们希望知道在最小可能阻值 135 Ω 和最大可能阻值 165 Ω 之间的电阻阻值分布情况。我们把这个频率分布记为 $P(R)$。

显然 $P(R)$ 与 $P_1(R)$ 和 $P_2(R)$ 均有关。问题可以用下述的方法来解决。设从现有的 100 Ω 电阻中取出的电阻，其阻值为 R'；如果串联电阻总的阻值为 R，那么从现有的 50 Ω 电阻中取出的电阻其阻值必为 $R-R'$。总的阻值 R 出现的频率是第一个元件中 R' 出现的频率和第二个元件中 $R-R'$ 出现的频率的乘积在 R' 的所有可能的取值范围内进行积分；即：

$$P(R)=\int_{-\infty}^{\infty} P_1(R')P_2(R-R')\mathrm{d}R'。$$

在此积分中，积分限可设为 $90\sim110$。因为它是我们所考虑的特殊情况下 R' 的所有可能取值范围。然而，由于 $P_1(R)$ 在 $90\sim110$ Ω 区间外被定义为 0，所以使用无穷积分限对积分值没有影响，而且有利于增加公式的通用性。

观察结果可知，$P_1(R)$ 和 $P_2(R)$ 通过标准的卷积积分组成了 $P(R)$；事实上，可以用星号标记表示为：

$$P=P_1*P_2。$$

这是两个量和的频率分布和给定量的频率分布之间的基本卷积关系的一个例子。在这个特殊情况下，可以很容易地求出这个卷积。我们可以得到复合电阻的均值为 150 Ω，而且它的分布是如图 16.1 所示的梯形分布。

当然，这个梯形响应是用一个 10 个单位宽的缝隙扫描一音轨上宽为 20 个单位的均匀带的结果；当缝隙移到带上时，响应线性变化；当缝隙完全包含在带内时，是一个响应不变的间隔；最后线性地回到初始状态。三个阶段中每一段的持续期均为 10 个单位。在其他涉及卷积的场合也存在类似的情况。例如：如果一个持续 20 个时间单位的矩形脉冲通过一个冲激响应为

持续 10 个时间单位的矩形脉冲的滤波器也将产生图示的梯形输出。

卷积的性质之一是质心横坐标的加性特性。显然，组合电阻的均值的确是元件均值的和。此外，卷积下的面积是参与卷积的函数下的面积的乘积；因为 $P_1(R)$ 和 $P_2(R)$ 都是单位面积的，所以 $P(R)$ 也是单位面积的，对结果的观察也证实了这一点。卷积时的方差也是加性的；由此可知组合电阻的标准离差相对于它的均值的百分比，比各组成元件的标准离差相对于本身均值的百分比要小一些。在此意义下，组合电阻的容差得到了改善，但最大误差仍是 10%。然而，如果原始的分布更为圆滑，或者使用更多的元件来串联，那么根据中心极限定理，得到的结果将是高斯的，而且用标准离差代替最大范围作为分散度的衡量要更合适一些。

作为第二个例子，考虑一个装满钱的桶，其中的一半是一美元，其余的是 5 美元、10 美元或 20 美元。更准确地，令 n 美元所出现的频率与序列

$$\{10\ 0\ 0\ 0\ 0\ 6\ 0\ 0\ 0\ 0\ 3\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\}$$

中的第 n 项对应。因为序列中各项的和是 20，用一个和为 1 的归一化的序列

$$\left\{\frac{10}{20}\ 0\ 0\ 0\ \frac{6}{20}\ 0\ 0\ 0\ 0\ \frac{3}{20}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \frac{1}{20}\right\}$$

进行处理要更方便一些。我们把序列中的第 n 项记为 $p_1(n)$；它是桶中 n 美元出现的频率。

如果从桶中抽一张钞票，这个序列表示的是抽到不同面值钞票的相对频率。现在，如果抽取两张钞票，并把它们相加，我们的问题是可以用什么样的序列来表示所抽取的两张钞票和的分布。我们用 $p(n)$ 表示待求序列的第 n 项。如果第一次抽取的是 m 美元，抽取的总和是 n 美元，那么第二次抽取的一定是 $n-m$ 美元。由两个独立事件联合发生的乘积规则，$p_1(m)p_1(n-m)$ 是我们在第一次抽取中恰好抽得 m 美元，第二次抽取中恰好抽得 $n-m$ 美元的频率。把第一次抽取中所有可能的 m 值加起来，我们有

$$p(n)=\sum_m p_1(m)p_1(n-m)$$

这样，待求序列就是给定序列与自身的序列积，或者，我们用星号标记表示为

$$\{p\}=\{p_1\}*\{p_1\}。$$

n	$p_1(n)$	3 0 0	$p(n)$
	÷20	0	÷400
1	10	0	0
2	0	6	100
3	0	0	0
4	0	0	0
5	6	0	0
6	0	10 →	120
7	0		0
8	0		0
9	0		0
10	3		(36)
11	0		(60)
12	0		0
13	0		0
14	0		0
15	0		(36)
16	0		0
17	0		0
18	0		0
19	0		0
20	1		(9)
21			(20)
22			0
23			0
24			0
25			(12)
26			0
27			0
28			0
29			0
30			(6)
31			0
32			0
33			0
34			0
35			0
36			0
37			0
38			0
39			0
40			(1)

图 16.2　计算 $p_1(n)$ 和它本身的序列积

图 16.2 演示了通过把给定序列写在可移动的纸带上进行数值计算的过程。纸带所处的位置计算出箭头所指向的 $\frac{120}{400}$ 这个值。这是我们两次抽得美钞和为 6 美元的概率。括号中的其它值也是用这种方法计算的。完整的结果是

$$\left\{0\ \frac{100}{400}\ 0\ 0\ 0\ \frac{120}{400}\ 0\ 0\ 0\ \frac{36}{400}\ \frac{60}{400}\ 0\ 0\ 0\ \frac{36}{400}\ 0\ 0\ 0\ 0\ \frac{9}{400}\ \frac{20}{400}\ 0\ 0\ 0\ \frac{12}{400}\ 0\ 0\ 0\ 0\ \frac{6}{400}\ \cdots\ \frac{1}{400}\right\}。$$

可以用各项之和为 1 对这个结果进行数值验证。

很明显，本例和前面处理电阻的例子十分相似。在第一个例子中，通过两个给定分布的卷积得到待求频率分布，而本例是通过序列积得到待求分布。不过，在电阻例子中，如果数值计算不是通过解析方法进行积分，而是凭借由数据组成的给定分布时，我们就需要基于足够小间隔的数据来计算序列积。这样，两个问题的数值方法就是相同的。

相反地，通过对两个问题在代数处理方法上进行区别，我们并得不到什么；既然这样，我们就用卷积来处理这两个问题。这样，桶中的美钞可以通过下式用连续变量 x 的频率分布进行描述，

$$P_1(x) = \frac{10}{20}\delta(x-1) + \frac{6}{20}\delta(x-5) + \frac{3}{20}\delta(x-10) + \frac{1}{20}\delta(x-20)。$$

图 16.3 用常用的冲激符号对此进行了图示，箭头的高度等于冲激的强度。图中还画出了两次抽取和的分布，即 $P(x)$，它可以写作

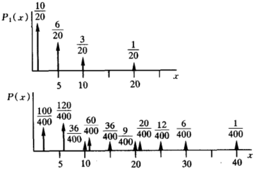


图 16.3 用冲激符号表示频率分布

$$\begin{aligned} P(x) &= P_1(x) * P_1(x) \\ &= \frac{1}{400}[100\delta(x-2) + 120\delta(x-6) + 36\delta(x-10) + 60\delta(x-11) \\ &\quad + 36\delta(x-15) + 9\delta(x-20) + 20\delta(x-21) \\ &\quad + 12\delta(x-25) + 6\delta(x-30) + \delta(x-40)], \end{aligned}$$

这可以通过 $P_1(x)$ 和 $P(x)$ 的积分均为 1 得以验证。

至此，我们已经看到了基本的卷积关系，现重新简述如下。如果两个量的频率分布分别为 $P_1(x)$ 和 $P_2(x)$，那么它们的和的频率分布 $P(x)$ 由下式确定：

$$P(x) = P_1(x) * P_2(x)。$$

我们已经假定两个量的选择不会互相影响。但是，如果桶中的钱是一大卷，每一种面值的钞票没有被完全打乱，那么结果就会有所不同；再有，桶中仅有一张面值 20 美元的钞票，那么抽走它将根本性地影响第二次抽取。在应用卷积关系前，总是需要考虑两次抽取是否独立，或者乘积准则是否适用。

卷积关系的结果

设 $P(x)$ 是 $P_1(x)$ 和 $P_2(x)$ 的卷积；即

$$P(x)=\int_{-\infty}^{\infty}P_1(x-u)P_2(u)\mathrm{d}u,$$

并且设 m,m_1 和 m_2 是三个分布 P,P_1 和 P_2 的质心的横坐标；即

$$m=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}xP(x)\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{\infty}P(x)\mathrm{d}x},\ \cdots 。$$

由于已经证明卷积情况下的质心横坐标具有加性性质，由此可得

$$m=m_1+m_2。$$

如果 P,P_1 和 P_2 是频率分布，那么 m,m_1 和 m_2 是三个分布的均值。因此，在统计学中，引用上面的定理，相应的结果是两个随机变量和的均值是它们各自均值的和。

根据另一个定理，卷积情况下的方差也具有加性性质。令

$$\sigma^2=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2P(x)\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{\infty}P(x)\mathrm{d}x},\ \cdots$$

那么

$$\sigma^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2。$$

根据统计学，这个结果的含义是熟知的。

如果把三个随机变量相加在一起，他们各自的频率分布为 $P_1(x),P_2(x)$ 和 $P_3(x)$，那么前两个的和的频率分布是 P_1*P_2，所有三个和的频率分布一定是 $(P_1*P_2)*P_3$。但由卷积的有关性质，没有必要保留括弧。因此，三个量的和的分布 $P(x)$ 由下式给定

$$P=P_1*P_2*P_3。$$

同时也可得到

$$m=m_1+m_2+m_3$$

和

$$\sigma^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2。$$

这个结果显然可以推广到任意多个随机量的和。

由中心极限定理，我们知道如果对几个函数进行卷积，倘若满足一定的条件，结果近似为一个高斯函数。由此可得，如果几个随机量相加，那么和的频率分布近似为一个高斯分布。分布的均值为各随机量均值的和，并且其方差也是各随机量方差的和。如果有足够多的随机量使得卷积结果在满足某些应用的精度上逼进高斯结果，那么使用均值和方差的加性性质就可以确定高斯分布的参数。

卷积关系的重要意义是，通过卷积定理可以把傅里叶变换的已知属性运用到统计学中。现在我们将考虑这一点。

特征函数

频率分布 $P(x)$ 的特征函数 $\phi(t)$ 由如下关系定义：

$$\phi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}P(x)\mathrm{d}x$$

这是频率分布的 +i 傅里叶变换。

由变换关系

$$P = P_1 * P_2$$

我们有

$$\phi(t) = \phi_1(t)\phi_2(t)。$$

换句话说，由卷积定理，特征函数的简单相乘给出了和的频率分布的特征函数。

特征函数具有以下性质：

a. $\phi(0) = 1$ [因为 $\int_{-\infty}^{\infty} P(x)\mathrm{d}x = 1$]；

b. $\phi(t)$ 是 hermitian [因为 $P(x)$ 是实的]；即 $\phi(t)$ 的实部是偶的，虚部是奇的；

c. $|\phi(t)| \leqslant 1$。

此外，特征函数的实部和虚部也可能不是独立的。例如：如果 $x < 0$ 时 $P(x)$ 是零，那么 $\phi(t)$ 的实部和虚部构成了一个希尔伯特变换对。如果 $P(x)$ 是在其它半无限区间上为零，那么适当地使用移位定理将得到相似的关系。

截断指数分布

作为卷积关系的一个实例，也为了对以后噪声波形的研究打一个基础，我们考察下面的频率分布

$$P(x) = X^{-1}\mathrm{e}^{-x/X}H(x),$$

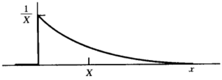


图 16.4 均值为 X 的截断指数分布

式中 $H(x)$ 是 Heaviside 单位阶跃函数(见图 16.4)，这被称为截断指数分布。均值 m 和方差 σ^2 分别如下：

$$m = X$$

$$\sigma^2 = X^2。$$

这种频率分布来源于一种基本的情形。考虑一个完全的随机事件，最好的例子就是原子核的自然放射性衰变。在一定的条件下，电话呼叫的发生，或者阴极电子的发射都是这样的例子。图16.5 给出了这样的个别事件的一些记录。通过观察已经证明一个不稳定的原子可能在任意时刻或任何其它时刻蜕变。这样，平均而言，放射性物质每秒钟发生蜕变的次数正比于不稳定原子的数目。我们假定这个数目非常大，所以它不会由于蜕变的发生而被明显地耗尽。

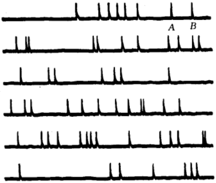


图 16.5 以恒定平均速率随机发生事件的记录。平均间隔是 AB。

图 16.5 的实验表明对应于事件发生的平均速率，一次事件与其下一次事件发生的间隔有一个确定的平均值，还说明了比平均值短的间隔比

那些比平均值长的间隔发生得更频繁。事实上,间隔越短发生频次越高,直到零间隔,这个事实正应了一句成语,祸不单行。

现在我们证明在 x 与 $x+\mathrm{d}x$ 的间隔内发生的频率是 $P(x)\mathrm{d}x$。其中

$$P(x)=X^{-1}\mathrm{e}^{-x/X}H(x),$$

而 X 是事件发生的平均间隔。

因为事件间的平均间隔是 X,每 x 单位事件发生的平均速率为 X^{-1}。因此,在一个短间隔 Δx 中事件发生的频率为 $X^{-1}\Delta x$;不发生的频率为 $1-X^{-1}\Delta x$。假设在一个事件发生后,下一个事件发生前过去了间隔 x。设 x 为 N 倍的 Δx。在 N 个连续的 Δx 间隔内没有事件发生,而在随后的一个 Δx 间隔内有一事件发生,随机事件发生的频率近似定义为 $P(x)\Delta x$,它由下式给定

$$P(x)\Delta x=(1-X^{-1}\Delta x)^{N}X^{-1}\Delta x \qquad x>0。$$

当 $\Delta x\to 0$ 时其极限为

$$P(x)=\lim_{\Delta x\to 0}(1-X^{-1}\Delta x)^{x/\Delta x}X^{-1}=X^{-1}\mathrm{e}^{-x/X} \qquad x>0$$

相对于它的前一事件,事件发生的频率随时延(不可能为负)指数衰减。因此

$$P(x)=X^{-1}\mathrm{e}^{-x/X}H(x),$$

当事件在时间上或一维空间上绝对随机发生时就引起截断指数分布,它描述了一个事件及其下一个事件之间间隔的频率分布。

其它的一些方面通常也会引起截断指数分布。图 16.5 所示的事件是相同的事件。但是经常也会遇到这种情况,不仅事件是随机发生而且所发生的事件大小也不同。例如,地球物理学现象中的小地震、小阵雨,以及那些频繁发生而大事件很少的情形。经常发生这样的大小分布是因为这种现象是被随机触发的,而且要释放自上次事件发生后稳定累积的一定量的东西(如弹性能量或水)。如果事件的大小正比于已过去的时间,并且事件可在任意时刻发生,那么事件大小的频率分布完全服从截断指数法则。

还有一些其它的十分明显情形会引起同样的分布。后面将要讨论一个与噪声波形检测有关的重要例子。

泊松分布

下面的讨论以截断指数分布作为出发点,我们用 $E(x)$ 表示截断指数分布,其中

$$E(x)=\mathrm{e}^{-x}H(x)。$$

通过应用卷积关系来描述从分布 $E(x)$ 中连续抽取的量之和的频率分布,我们可以理解泊松分布。这本身是很重要的,此外它还提供了用频率分布建立标准处理过程的极好的例子。特别地,我们可以详细地观察过渡到高斯分布(由中心极限定理所预计的)的情况。

为了借助实际进行研究,我们使用物理情况来表达它。因此,我们假设某个地区在 x 和 $x+\mathrm{d}x$ 之间的降雨量频率是 $P(x)\mathrm{d}x$,一天的降雨量由下式给出

$$P(x)=E(x)。$$

这样,平均日降雨量是一个单位。

两天的降雨量是多少呢？由于这是从已知频率分布中抽取的两个量的和，因此需要使用卷积关系。首先，我们要证明任一天的降雨量与其前一天的降雨量无关。在很多地区都不是这样的，每一天都倾向于与前一天相似；但我们要处理的是一个不可预测的气候。那么，两天降雨总量的频率分布是

$$P * P。$$

展开卷积，我们有

$$\begin{aligned}P * P &= E(x) * E(x)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x'} H(x') e^{-(x-x')} H(x-x') dx'\\ &= \int_0^x e^{-x'} e^{-(x-x')} dx'\\ &= xE(x)。\end{aligned}$$

两天降雨量总和的频率分布 $E * E$ 像一个临界阻尼设备的冲激响应（参见图 16.6 中的 E 和 $E * E$）。这与截断指数的不同之处在于最常见的两天降雨量的总和不再是零；实际上在正态或高斯分布方向上特性有明显的变化。两天降雨总量的均值是两个单位；出现频率最大的地方位于 $x = 1$。

n 天降雨总量的分布是 $E(x)$ 的 n 重自卷积。

$$[E(x)]^{*n}。$$

利用 $n = 2$ 的结果，我们可以很容易地计算出 $n = 3$ 的分布

$$[E(x)]^{*3} = \frac{x^2}{2!} e^{-x} H(x)。$$

这提醒我们，n 天降雨总量的分布如下

$$\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} E(x)；$$

如果这是正确的，那么 $n+1$ 天的降雨总量分布为

$$[E(x)] * \left[\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} E(x)\right] = \int_0^x \left[\frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-u}\right] e^{-(x-u)} du = \frac{x^n}{n!} E(x)。$$

这样，如果对 n 天降雨总量的推测是正确的，那么 $n+1$ 天的总量也是正确的，等等。但现在已知 $n = 3$ 是正确的；因此 $n = 4$ 也是正确的，等等以至无穷。

图 16.6 的分布

$$\frac{x^n}{n!} E(x) = [E(x)]^{*n+1}$$

又称为 Pearson Ⅲ 分布。它表示 $n+1$ 个具有单位均值的指数分布量之和的频率有一个值 x。

由中心极限定理，我们知道，对大的 n 值我们将近似得到高斯分布。

x 的均值等于 $n+1$，方差等于 $n+1$，这是在卷积情况下方差和重心的横坐标具有加性特性这一定理的结果。（通过微分可以证明出现频率最大的地方位于 $x = n$。）

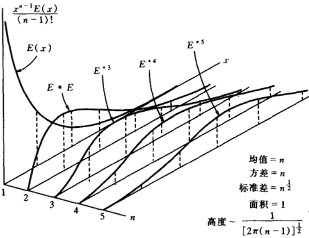


图 16.6　Pearson Ⅲ 分布表现为截断指数 $E(x)$ 的连续自卷积

对于大的 n，均值的标准差是 $n^{-\frac{1}{2}}$ 倍的均值。这样，如果我们用 $\xi = x/n$ 表示分布，以使所有的分布都有同样的均值，我们有

$$\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}E(x) = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\xi^{n-1}\mathrm{e}^{-n\xi}H(\xi)。$$

我们期望这个公式收敛到一个越来越窄的高斯形式，如图 16.7 所示；即我们期望

$$\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\xi^{n-1}\mathrm{e}^{-n\xi}H(\xi) \to \frac{1}{(2\pi n)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}n(\xi-1)^2}。$$

令 $\varepsilon = \xi - 1$，且使用大数阶乘的 Stirling 公式，

$$n! = (2\pi n)^{\frac{1}{2}} n^n \mathrm{e}^{-n},$$

左边化简为

$$\frac{n^n}{n!}(1+\varepsilon)^{n-1}\mathrm{e}^{-n(1+\varepsilon)} = \frac{1}{(2\pi n)^{\frac{1}{2}}}(1+\varepsilon)^{n-1}\mathrm{e}^{-n\varepsilon},$$

对小的 ε，展开为

$$\frac{1}{(2\pi n)^{\frac{1}{2}}}\left[1-\varepsilon-\frac{1}{2}(n-2)\varepsilon^2+\cdots\right]$$

这样，就这些首项来说，与中心位于 $\xi = 1 - 1/n$ 的高斯分布相匹配。

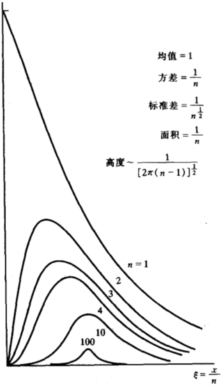


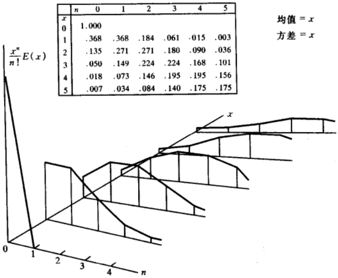
图 16.7　E^{*n} 归一化到 $\langle x\rangle = 1$ 说明它趋于高斯形式

如果事件像图 16.5 一样随机发生，平均发生间隔为 1，在间隔 x 内恰好发生 n 次的概率首

先与$[E(x')]^{*n}\mathrm{d}x'$(从现在开始的第n次事件发生在间隔$x'\pm\frac{1}{2}\mathrm{d}x'$内的概率,其中$x'<x$)有关,然后与紧随其后的在更远间隔$x-x'$后发生的概率有关。第二个概率是$E(x)$从$x-x'$到无穷的积分,它等于$E(x-x')$。把这两个概率相乘并在$x'$所有可能的取值范围上积分,我们有

$$\int_0^x E(x-x')[E(x')]^{*n}\mathrm{d}x' = [E(x)]^{*(n+1)} = \frac{x^n}{n!}E(x)$$

这就是我们研究的每单位x的概率密度的函数;然而,作为一个与n有关的离散概率,我们称之为泊松分布(图 16.8)。



x \ n	0	1	2	3	4	5
0	1.000					
1	.368	.368	.184	.061	.015	.003
2	.135	.271	.271	.180	.090	.036
3	.050	.149	.224	.224	.168	.101
4	.018	.073	.146	.195	.195	.156
5	.007	.034	.084	.140	.175	.175

图 16.8 泊松分布可以看作一组连续的柱状图

参考书目

Gardner, W. A.: "Statistical Spectral Analysis,"Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.

Gray, R. M.: "Probability, Random Processes, and Ergodic Properties,"Springer, New York, 1987.

Leon-Garcia, A.: "Probability and Random Processes for Electrical Engineering,"Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1989.

Papoulis, A.: "Systems and Transforms with Applications in Optics,"McGraw-Hill, New York, 1968.

Parzen, E.: "Modern Probability Theory and Its Applications,"Wiley, New York, 1960.

习题

1. 倒数的和 有一批标称相同的电阻,其阻值分布是$P(x)$。计算从中抽取两个电阻并联后的阻值分布。

2. 证明由一个电阻 R 和一个电感 L 串联得到的复阻抗 $Z = X + \mathrm{i}Y$ 的频率分布是

$$P(X,Y) = \left[50\Pi\left(\frac{X-R}{0.02R}\right)\delta(Y)/R\right] ** \left[50\Pi\left(\frac{Y-\omega L}{0.02\omega L}\right)\delta(X)/\omega L\right]。$$

其中，电阻和电感的值在标称值的 1% 范围内均匀分布；两个星号表示二维卷积。在 Z 的复平面上画出分布的草图。

3. 打破可能性 为了对绝缘体进行精密测量，现在需要建立一个非普通精度的绝对基准的 1 MΩ 的电阻，我们取 10 000 个普通的 1% 误差的 100 Ω 的电阻，并通过可以忽略电阻的汞杯把它们串联起来。讨论如下：如果把 n 个平均阻值为 R、方差为 σ^2 的电阻串联起来，在多次实验进行平均可得，组合电阻的阻值是 nR，方差是 $n\sigma^2$。均值的标准差是 $n^{\frac{1}{2}}\sigma$。从而，如果 σ/R 最初是 10^{-2} 数量级，那么 10 000 个电阻串联的数量级将是

$$\frac{n^{\frac{1}{2}}\sigma}{nR} = \frac{n^{-\frac{1}{2}}\sigma}{R} = (10\ 000)^{-\frac{1}{2}}\frac{\sigma}{R} = 10^{-2} \times 10^{-2} = 10^{-4}。$$

指出以上认为可以通过这种方法产生一个万分之一精度的 1 MΩ 电阻的谬误所在。

4. Bernoulli 分布 一个面积很小的阴极在 1 微秒发射 n 个电子的概率是

$$0.9\delta(n) + 0.1\delta(n-1)。$$

计算一个面积为 M 倍的阴极在 1 秒种发射 n 个电子的概率。

5. 泊松分布 如果一个随机事件平均每微秒发生 0.1 次，那么 1 微秒恰好发生两次的概率是多少？

6. 和的分布 计算投掷(a) 两个骰子，(b) 三个骰子的和的频率分布。

7. 和的分布 一个双稳态电路有两个稳定状态，A 和 B。无论何时对它输入一个脉冲，它将从一个状态变到另一个状态。如果脉冲以每秒 10 个的平均速率到达(脉冲的到达是完全随机的，如图 16.5)，计算连续两次从状态变 A 到状态 B 的时间间隔的频率分布。最常见的值是什么？

8. 特征函数 证明如果 $\varphi(t)$ 是一个特征函数，那么它一定可以表示为其它函数的自相关函数。证明 $2t\operatorname{cosech}\pi t$ 是一个特征函数，并确定至少两个函数使得它是它们的自相关函数。

9. 空间概率 用一个武器瞄准一个目标进行射击，武器的方位角比它的射程更精确，而目标位置的纬度比精度更准确。计算误差距离的二维概率分布。对一次射击来说，从北边还是从东边射击要更好一些？

10. 矩 我们知道和的分布服从卷积关系时，在卷积情况下均值和方差具有加性特性。对三阶矩，这个特性还成立吗？

11. 流星轨迹通信 一个点对点的通信系统利用了由流星留下的短暂轨迹的镜面反射所产生的信号脉冲。如果打开发射机，接收机的信号幅度由在任意时刻 t_i 发生的形如 $A = A_0 e^{-(t-t_i)/\tau}H(t-t_i)$ 的脉冲组成。在某个时期内幅度大于 A_1 的脉冲数由 $N = cA_1^{-a}$ 确定，其中 c 和 a 是常量。如果当信号超过门限 A_1 时通信是可能的，证明信道在时间 T 内是打开的且持续期超过 t_1 的可以使用的脉冲比例是 $e^{-at_1/\tau}$。其中

$$T = \frac{\tau}{a}cA_1^{-a}$$

12. Bernoulli 实验是指结果可以用概率分布 $q\delta(x)+p\delta(x-1)$（其中 $q=1-p$）来描述的实验。根据离散概率，这可以写作 $\{q\ p\}$。n 次独立实验结果的和的分布是 $\{q\ p\}^{*n}$，称之为二项分布（因为它的各项 $\binom{n}{x}q^{n-x}p^{x}$ 与二项表达式 $q+p$ 的 n 次幂的展开项是一致的）。证明二项分布的特征函数是 $[q+p\exp\mathrm{i}t]^{n}$，并推导出，两个互相独立且服从二项分布的量，如果它们的 p 是相同的，那么它们的和也服从二项分布。

13. 证明泊松分布 $(x^{n}/n!)\mathrm{e}^{-x}$ 的特征函数是 $\exp\{x[\exp\mathrm{i}t-1]\}$，并推导出如果两个独立变量服从均值为 x_1 和 x_2 的泊松分布，那么它们的和也是泊松分布且均值为 x_1+x_2。

14. 验证泊松分布 $(x^{n}/n!)\exp(-x)$，对 $n=0,1,2,\cdots$ 求和的结果是 1。证明，当 x 是正整数时，总有两项是相等的。

15. **和的概率分布**　在星期天晚上，从校园搭便车到高速公路的机会服从概率 $P_1(t)\mathrm{d}t$，从招手停车开始记时，搭便车花费的时间在 t 和 $t+\mathrm{d}t$ 之间。报告表明 $P_1(t)$ 近似为 $P_1(t)=0.025\exp(-t/40)$，其中 t 的单位是 min。到高速公路的时间平均是 10min，但它会在一个窄的范围内变化，其标准离差是 2min。在高速路上的等待时间 $P_3(t)=0.1\exp(-t/10)$，并且到机场的旅行时间是 25min ± 5min（标准离差）。通过这种方式从校园到机场的平均旅行时间是多少？标准差是多少？

16. **倒数的分布**　在 R 和 $R+\mathrm{d}R$ 之间阻值出现的频率是 $0.05\Pi(0.05R-5)$，但是用一个测量电导的仪器测量它们却发现电导值的分布不是平顶的。可能的解释是什么？

17. **Bernoulli 定理，中心极限定理**　冲激对 $p\delta(x)+q\delta(x-X)$（其中 p 和 q 均是正的且 $p+q=1$），与本身卷积几次可以得到一串冲激 $[p\delta(x)+q\delta(x-X)]^{*n}$，所得到的冲激的强度随 $n\to\infty$ 趋于一个确定的高斯函数。证明具有 n 个因子的多重自卷积将逼近

$$(2\pi npq)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-(x-nqX)^2/2npqX^2}\,\mathrm{III}(x/X)。$$

18. **中心极限定理，Bernoulli 定理**　Bernoulli 定理中的量 p 和 q 必需是正的，因为它们表示的是概率。但是如果 p 和 q 具有相反的符号，你能对 $p\delta(x)+q\delta(x-X)$ 的 n 重自卷积说些什么？

第 17 章

随机波形和噪声

自然发生的随机现象遍及整个物理学中，我们可以从一些对简单物理观测的叙述中抽取一些例子。图 17.1 记录的是河外射电源 Cygnus A（天鹅座）通过射电望远镜波束的情况。显然，这个射电源至少由两部分组成，但重要的是要知道是否有伴随这两个明显的分量的光晕。然而，由于记录中存在不必要的波动，通过研究这个记录并不能揭示是否存在比这两个信号更宽更弱的第三个源。

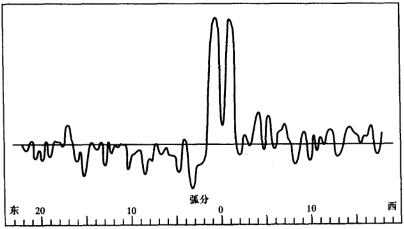


图 17.1　通过射电望远镜的波束接收到的来自河外射电源 Cygnus A 的功率记录，所用的望远镜是第一台能产生和人眼一样好的射频波束（52 弧秒，一维的）的仪器（Swarup, Thompson and Bracewell, 1963）。

这是在噪声背景下进行信号检测的一个典型例子。本例中的波动源很好理解；从地球和天

线馈线的隔层发出的微波热辐射会进入接收机，接收机本身也会产生辐射；银河系的背景辐射也是小量的干扰，但即使被研究的源处在天线的主波束以外，其本身也占主要成分。所有这些干扰辐射加起来的和不是恒定的。正如图中所示，虽然总的有害的干扰能量确实很大，但波动比要研究的信号小。这些波动经常呈现出与它们的准确物理原因无关的特征行为，本章将关注这些普遍的现象。然而，这里需要说明的是实际观测结果经常会呈现出先前的理论难以解释的行为，而只能在观测实验以后解释；随着更多的可理解的波动通过合适的测量逐渐递减，这些奇怪的现象就会变为主要成分，由于这些现象种类繁多，所以本著作不做研究。

在我们的例子中，待求的辐射本身也呈现出随机性的特点；事实上，我们从噪声背景中提取的信号本身也是随机噪声。它几乎是随机极化的，这意味着波前的电场可能指向任何方向。而且，信号电场的幅度也随时间的推移以一定的特征波动。电场的水平和垂直分量的波动规律是相同的，但在细节方面几乎完全不同。

本章的相关读物包括 Gardner(1988)，Goodman(1996)，Papoulis(1968) 和 Ripley(1981) 的著作。

随机数的离散表示

为了研究上面讨论的各种形式噪声的特征，我们首先通过一个单纯的数值方法构造一个特殊的噪声波形，并且熟悉它的性质。在本例中，我们的研究对象可以被认为是表示带限波形连续采样的数字序列；因此，任何时候我们都可以毫不犹豫地对序列作图并且通过点画一条光滑的曲线。为了画这样一条曲线，我们可以按照第 10 章给出的与采样定理有关的规则进行内插。

假设从 0 ～ 9 的数字可以任意抽取，每个数字被抽取的几率相同。例如，我们可以通过对由计算机产生的在 0 ～ 1 之间均匀分布的数乘以 10 然后向下取整得到所需的随机数。但是作为一个具体的例子，这里我们使用 π 的十进制表达的连续数位。我们知道：

$$\pi = 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751 0\cdots$$

图 17.2 画出了前 32 位数字。已经证明，几乎所有的十进制数字是均匀出现的；即每一个数字出现概率为十分之一；在相当长的位数上，对于 π 的这个性质已经做了研究。无疑，在有限的长

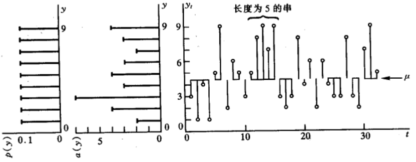


图 17.2　π 的十进制表示的有限长数字序列 y_t，它们的出现次数柱状图 $a(y)$，以及我们选定的在无限长序列情况下的概率 $P(y)$。

度内，每一个数字出现的次数不相同（左边的柱状图给出了总和），但是没有办法证明这个有限长序列与从一个符合 0 ～ 9 均匀分布的数据源中所抽取的结果不一致。

令 y_t 表示第 t 位的值；即 $y_1 = 3$，　$y_2 = 1$，　$y_3 = 4$，…。我们可以将其表示为序列 $\{y_t\}$

$$\{y_t\} = \{3\ 2\ 4\ 1\ 5\ 9\ \cdots\}。$$

t 可以看作时间，可以设想为以单位时间为基准等间隔抽取的数字。前 N 位的均值 m 由下式给出

$$m = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} y_t;$$

例如：$N = 32$ 时，均值为 4.84。如果我们认为的这些数字是从一个均匀分布的源中抽取的观点是正确的，那么可以换种方法表示这个性质，我们希望随着位数 N 无限增长均值 m 趋于一个极限 μ（等于 4.5），即

$$\mu = \lim_{N\to\infty} m = 4.5。$$

这个期望可以作为（部分）均匀性假设检验的基础。

计算均值 m 的另一种方法是数出 9 的个数乘以 9，8 的个数乘以 8，等等，相加后再除以 N。令 $a(y)$ 表示值 y 出现的次数；图 17.2 中数字序列左边的柱状图表示的是 $a(y)$，它的列表在下面。所以

$$m = \frac{a(1) + 2a(2) + \cdots + 8a(8) + 9a(9)}{N} = \frac{1}{N}\sum_{y=0}^{9} ya(y)。$$

考虑项数 N 无限增长的情况，我们有 m 趋于 μ。

$$\begin{aligned}\mu &= \lim_{N\to\infty} m \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{y=0}^{9} ya(y) \\ &= \sum_{y=0}^{9} y \lim \frac{a(y)}{N}。\end{aligned}$$

我们没有理由不用单个极限的和代替和的极限。现在对我们这个特殊例子列表如下

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a(y)$	0	2	4	7	3	4	3	2	3	4
$a(y)/N$	0	.06	.12	.22	.09	.12	.09	.06	.09	.12

其中，项 $\frac{a(y)}{N}$ 是值 y 发生的分数频率，我们相信，在极限情况下，对 y 从 0 ～ 9 的所有值，这个频率都是相同的，即 0.1。称此为值 y 发生的概率 $p(y)$，我们记为

$$p(y) \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{a(y)}{N}。$$

图 17.2 中最左边的柱状图就是 $p(y)$。因为 $\sum a(y) = N$，显然 $p(y)$ 具有概率分布所要求的

$\sum p(y)=1$ 的性质。

最终，我们有

$$\mu=\sum_{y=0}^{9} y p(y);$$

或者换句话说，值 y_t 的无限长序列在极限情况下的均值，也即量 μ 不仅可以用 N 项的均值(m 的极限)来表示，而且也可以用稍复杂些的方法，如用决定每个 y 出现的概率 $p(y)$ 的一阶矩来表示。

相似的，序列 $\{y_t\}$ 的方差趋于一个极限，它是 $p(y)$ 关于 $y=\mu$ 的二阶矩；即

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(y_t-m)^2=\sum_{y=0}^{9}(y-\mu)^2 p(y)。$$

在这里重述这些在其它方面熟知的结果是为了把它们与所使用的术语联系起来。

在下文中，随机数字序列将被称为波形，或许是由起平滑作用的中值内插得到，或许也可以把它看作是强度由随机数字给定的规则冲激序列。第一种情况，频谱将会在一个频率处截止，这个频率由采样所用的时间间隔确定；而第二种情况，频谱将会有无穷高的频率；但在每一种情况下，序列的均值与函数的均值都是相同的。

随机输入通过滤波器:对幅度分布的影响

无论用上面提到的哪种方法，由随机数字序列产生的随机波形都可以通过一个滤波器，通过研究输出可以知道滤波器对波形有哪些影响。我们可以把滤波器看作一个有差别地传输不同频率的器件，所以，一些影响将会导致输入波形的谱发生变化。但我们首先考虑幅度的概率分布，并得到一个值得注意的结论。因为这个结论也是对随机数求和的基本结论，所以下面的讨论与滤波器没有直接关系，但我们要做的是让随机波形通过一个滤波器，这个滤波器对输入 {1 0 0 0 …} 的响应是一个 10 位序列{1 1 1 1 1 1 1 1 1 1}。

我们依照下面的规则把序列 $\{y_t\}$ 变成一个新的序列 $\{\eta_t\}$：η_1 是 $\{y_t\}$ 前 10 项的和，η_2 是第 2 项到第 11 项的和，等等；即

$$\eta_t=y_t+y_{t+1}+y_{t+2}+\cdots+y_{t+9}。$$

在前面图示的有限长数据范围内所得序列如图 17.3。很明显，所得数字集中在 30 多，40 多，50

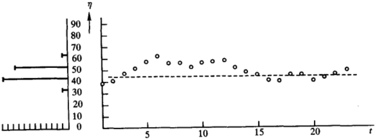


图 17.3　在连续值之间引入相关的一个数字序列及相应的频谱变化

多以及 60 多的范围内，没有值在此范围之外。左边的柱状图给出了每个范围内的总数。就像原始的 32 个数据位总的出现情况一样，我们相信随着序列长度的增加，每个 y 值出现的分数频率将到达一定的极限，其中 y 的范围是从 0 ～ 90。对每个 y 我们把这个极限称为概率 $p_{10}(y)$，y 由 10 位数的和得到。

由于在 16 章中已经证明了两个已知分布的独立变量的和的分布是已知分布的卷积，假设 π 的十进制表达中的相邻数位是独立的，我们立即可得到 $p_{10}(y)$。这提出了一个新的重要的问题。

关于独立的题外话 我们可以通过假定序列 $\{y_t\}$ 具有所期望的特性，不必涉及实际数值来绕过这个问题。然而，由于我们已经选择了通过实际的例子来阐明这个主题，所以关于独立性的题外话就是必需的；并且，由于把简单理论用于实际数据的适用性是一个重要的问题，因此讨论这个问题也是恰当的。

但很有可能，在一长串数中，数字出现的相对频率是相等的，而同时并不需要每个数字与它前面的数字是相互独立的。例如，无限长的十进制小数 3.0123456789012345678 9…，它按期望的方式重复，每一数字的出现频率都是一致的，但相邻的数字不是独立的。

仅靠看图 17.2 并不能揭示一个数字与它后面的数字间有任何明显的联系，的确，现在认为几乎所有的十进制数字都没有联系，但是这里显然有必要使用如下的一些定量测试。如果 y_{t+1} 真的和 y_t 独立，那么它和 y_t 都大于或都小于 4.5 的次数与一个大于而另一个小于 4.5 的次数应基本相等。通过计数显示，y_{t+1} 与 y_t 位于 4.5 两侧(一个大于 4.5 而另一个小于 4.5)的是 15 次，而二者位于同一侧的次数是 16 次。这个结果是令人满意的，更严格的测试是检验大于 4.5 的串的长度和小于 4.5 的串的长度。这样，前四位 3，1，4，1 是小于 4.5 的，接下来的 2 位是大于 4.5 的，再接下来我们有 1 个小于 4.5 的，2 个大于 4.5 的，等等。稍远一些的如图 17.2 中标出的长度为 5 的一串。16 个连续大于 4.5 或连续小于 4.5 的串的长度是 4，2，1，2，1，5，3，1，1，1，1，1，3，1，2，3。显然，一串长为 1 的概率是连续跨越均值 4.5 的概率，即 $\frac{1}{2}$。一串长为 2 的概率是 $\frac{1}{4}$，并且一般情况下一串长为 k 的概率 p_k 是 2^{-k}。

图 17.4 所示的是 $p_k = 2^{-k}$ 的曲线，小圆圈表示的是本例中不同长度串的实际总数。我们不能不被理论与实际的一致性所吸引。但是如果我们希望暂时停止测试并研究一致的重要性，首先必须建立 16 次中串长 k 恰好发生 n 次的概率。作为一个练习，学生可以对偶数位数的串长度和奇数位数的串长度作类似的分析。

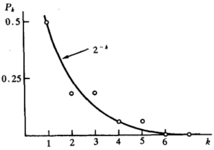


图 17.4 长度为 k 的串的概率

作为一个更详细的检验，我们可以画出如图 17.5 所示的 y_{t+1} 对 y_t 的关系，构造一个相互关系图。如果关系图展现的是一条沿一三象限对角线的延长线，这表示的是大值后面紧跟大值，小值后面紧跟小值的趋势。这个趋势可通过计算协方差或关于质心的积矩 $\sum(y_{t+1} - \langle y_{t+1}\rangle)(y_t -$

$\langle y_t \rangle$）来计算。如果想得到积矩相关系数可通过除以可能出现的最大值得到，但这种方法需要更多的数值计算量。通常，另外的一些相关性测量可以满足速度的要求；例如，我们可以在中心点周围把图划分成四个象限，并且数出每个象限的点数，一、三象限点数和超过二、四象限点数和的点数，除以总的点数，就可以得到一个很好的相关系数，在本例中是 0.03。这里，我们没有必要停下来进一步研究这个结果的意义，而是继续关注由独立性强加的额外要求。

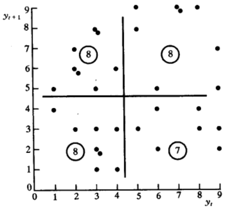


图 17.5　每一个数位 y_{t+1} 和它前面的数位 y_t 的相关图

有可能上面所提到的任一种相关系数都很小，而同时 y_{t+1} 和 y_t 又有一定程度的相关性。图 17.6 给出了一个人造的例子。因此，应当注意的是只用相关系数不足以保证独立性。为了论证独立性，必须证明相关图以所期望的均匀度占用方格，而且用来绘图的序列应该是和顺序无关的。

本实验中，我们把注意力集中在一个数字与它紧前面数据的可能的相关性。但是，因为我们打算把 10 个连续的数字相加，所以我们也应当考查 8 个其他的相关图，即 y_{t+2}，y_{t+3} 等等直

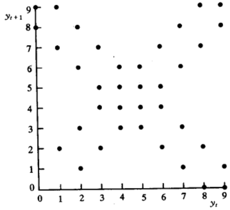


图 17.6　表示 y_{t+1} 和 y_t 相关的相关图，而相关系数不能揭示这一点

到 y_{t+9} 对 y_t 相关图，来揭示这种相关性。

至此，作者可以负责任地说，连续的数字的确是无关的。

这是对实际数据进行讨论的重要的一步。因为我们从来不能完全确保没有潜在的相关性，为了避免以后的争执，实验者或观察者必须记住要做这一步。事实上，我们已经假设了一个确定的随机模型，并且我们发现，从目前所做的部分测试来看，没有理由怀疑手头的数据是作为我们讨论基础的合适的选择。细心的读者会发现，我们已经指明了这种测试理论所指引的方向。试验的可信性依赖于那些能观察到某些现象消失的实验者，因为经验表明，这些现象最有可能使情况变复杂。

卷积关系 如果连续的数字是独立的，那么卷积关系成立，并且 $\{p_{10}(y)\}$ 是 $\{p(y)\}$ 与自身的十重序列积；即

$$\{p_{10}(y)\} = \left\{\frac{1}{10}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{10}\right\}^{*10}$$
$$= 10^{-10}\{1\ 10\ 54\ 212\ 679\ \cdots\ (91\ 项)\ \cdots\ 54\ 10\ 1\}。$$

数值可以通过计算连续卷积直接得到。由中心极限定理，我们知道，这些值也可以由均值和方差分别为无限长序列 $\{y_t\}$ 的均值 4.5 和方差 8.25 的 10 倍的正态分布精确给定。因此，在无限长序列 $\{\eta_t\}$ 中，值 y 出现的概率可以由下式近似给定：

$$p_{10}(y) \approx \frac{1}{(2\pi\times 82.5)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{e}^{-(y-45)^2/(2\times 82.5)}。$$

当然，这个近似表示对 y 小于 0 和大于 90 的值给出的是非零概率，然而，从构造 $\{\eta_t\}$ 的方法可以知道这些值是不可能的。因此通过测试一个足够长的序列，将可能暴露出 $p_{10}(y)$ 事实上不是正态的。但是，这将需要一个极长序列。当然，也可以认为图 17.3 所示的短序列与一个由严格正态概率分布生成的序列没有什么区别。

我们已经讨论的问题揭示了一个重要的现象。由中心极限定理，一个用概率分布描述的序列，当对其连续项求和时，将得到一个概率分布更接近正态分布的新序列。现在，当一个波形通过一个滤波器，滤波器的输出是连续输入值的加权求和，这样我们认为滤波器输出的随机信号幅度的共同特性是服从正态概率分布的。

上面所提到的十项数据的连续求和的数值计算过程等价于数据通过一个冲激响应为{1 1 1 1 1 1 1 1 1 1}的滤波器。序列 $\{y_t\}$ 通过一个冲激响应为 $\{g_0\ g_1\ g_2\ \cdots\}$ 的滤波器的结果应该是什么呢?作为一个具体的例子，令

$$\{g\} = \{5\ 3\ 1\ 1\}。$$

那么，输出序列值的概率分布是

$$\{1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\}$$
$$*\{1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\}$$
$$*\{1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\}$$
$$*\{1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\}\times 10^{-4}$$
$$= 10^{-4}\{1\ 2\ 3\ 5\ 7\ 10\ 14\ 18\ 23\ 29\ \cdots\ (91\ 项)\ \cdots\ 3\ 2\ 1\}。$$

一般地，滤波器输出的概率分布是

$$\left[\frac{1}{g_0}p\left(\frac{y}{g_0}\right)\right]*\left[\frac{1}{g_1}p\left(\frac{y}{g_1}\right)\right]*\left[\frac{1}{g_2}p\left(\frac{y}{g_2}\right)\right]*\cdots。$$

这个结果详细说明了对仅用“单个”卷积联系输入和输出序列的系统来说，多个卷积项怎样合成最后的幅度分布。因此，有理由认为我们的序列$\{\eta_t\}$阐明了一个关于它的近似正态幅度分布的普遍现象。然而，这不是它的仅有特征。我们现在必须考虑一项和它后面的项之间的关系。现在，相邻的项显然是相关的，因为每一项是 10 个数之和，其中有 9 个是相同的。

对自相关的影响

为了考察图 17.3 中序列$\{\eta_t\}$的连续值之间的相关性，绘出η_{t+1}对η_t的关系图，如图 17.7 所示。用连续数字标记的点呈现出强的相关性；与前面一样，通过对四个象限（由中值确定）中的点计数来计算相关系数，我们发现值为$(18-2)/20=0.8$。用相似方法的计算可以得到η_{t+2}的相关系数是 0.6，等等，这些值是递减的。对实际数据分析来说，这种十分迅速而且直观的图形计算方法是一个有效的工具。然而，我们现在希望在理论上计算相关系数。

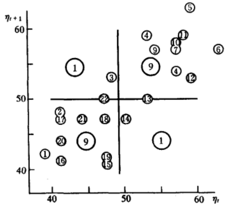


图 17.7 序列η_t的各连续项之间的相关图。相关系数是$[9+9-(1+1)]/20=0.8$

首先考虑积矩相关系数。设序列$\{\eta_t\}$共有 N 项，M_1 是前 $N-\tau$ 项的平均值，其中 $\tau=0,1,2,\cdots$，而 M_2 是后 $N-\tau$ 项的均值。那么相关系数定义为

$$\frac{\sum(\eta_{t+\tau}-M_2)(\eta_t-M_1)}{\left[\sum(\eta_{t+\tau}-M_2)^2\sum(\eta_t-M_1)^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

其中和式的求和范围是从 $t=1$ 到 $t=N-\tau$。这种表达用起来不是很方便，因为均值 M_1 和 M_2 不相等，而且还是随 τ 变化的；然而，它却是散布的点关于它们质心的积矩相关系数的精确表达。

如果我们假设当序列趋于无限长时，一项和它后面的项之间的相关性趋于一个极限，并且这个极限是可以计算的，那么会出现一个简单而重要的结果。

为了方便标记，我们参照序列在极限情况下均值的表示方法重述这个问题。这样

$$\boldsymbol{y}_t=y_t-\mu,$$

其中

$$\mu=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_1^N y_t$$

且

$$\boldsymbol{n}_t=\eta_t-\mu_1$$

其中

$$\mu_1=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_1^N \eta_t。$$

那么

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}\boldsymbol{y}_t=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}\boldsymbol{n}_t=0。$$

如果这些新质心量之间的关系是

$$\{\boldsymbol{n}_t\}=\{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\}*\{\boldsymbol{y}_t\},$$

那么，除了对长序列不太重要的末端效应外，这个关系与最初 y_t 的十个连续值相加的问题是一样的。更一般地，写为

$$\{\boldsymbol{n}_t\}=\{I_t\}*\{\boldsymbol{y}_t\},$$

其中$\{I_t\}$ 是有限长序列，但是比前面我们考虑的序列更一般化。不失一般性，我们可以限制 $\{I_t\}$ 使得

$$\sum I_t=1。$$

那么，要讨论的问题是：序列$\{y_t\}$ 由 N 个不相关的随机数字组成，通过减去均值得到一个新的序列$\{\boldsymbol{y}_t\}$，并且通过与序列$\{I_t\}$ 做序列积得到一个线性组合$\{\boldsymbol{n}_t\}$。求$\{\boldsymbol{n}_t\}$ 的各项间的相关性在 N 趋于无穷时的极限。

$\{\boldsymbol{n}_t\}$ 和自身移位的积矩相关系数定义为

$$\frac{\sum\boldsymbol{n}_t\boldsymbol{n}_{t+\tau}}{\left[\sum\boldsymbol{n}_t^2\sum\boldsymbol{n}_{t+\tau}^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

其中的和式适合运算。为了方便，使用第 3 章中引入的五角星符号，我们把表达式写成如下形式

$$\frac{\boldsymbol{n}_t\bigstar\boldsymbol{n}_t}{\text{归一化因子}},$$

此处引入它是为了简化代数表达。在接下来的讨论中，我们使用如下结果

$$\{f*g\}\bigstar\{f*g\}=(f\bigstar f)*(g\bigstar g)。$$

要得到这个结果，用 f_r 表示 f 的倒序，由定义

$$f\bigstar g=f_r*g,$$

和

$$\begin{aligned}(f*g)\bigstar(f*g)&=(f*g)_r*(f*g)=f_r*g_r*f*g\\&=f_r*f*g_r*g\\&=(f\bigstar f)*(g\bigstar g)。\end{aligned}$$

现在，令 $C(\tau)$ 是

$$\frac{\boldsymbol{n}_t\bigstar\boldsymbol{n}_t}{\text{归一化因子}},$$

对每一个位移 τ 当 $N\to\infty$ 时的极限值。我们把 $C(\tau)$ 称为序列 $\{\boldsymbol{n}_t\}$ 的自相关函数，或者序列所代表函数的自相关函数。那么

$$\begin{aligned}C(\tau) &= \lim_{N\to\infty}\frac{\boldsymbol{n}_t\star\boldsymbol{n}_t}{\text{归一化因子}}\\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{[\{I_t\}*\{\boldsymbol{y}_t\}]\star[\{I_t\}*\{\boldsymbol{y}_t\}]}{\text{归一化因子}}\\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{[\{I_t\}\star\{I_t\}]*[\{\boldsymbol{y}_t\}\star\{\boldsymbol{y}_t\}]}{\text{归一化因子}}\\ &= \frac{[\{I_t\}\star\{I_t\}]*\lim\limits_{N\to\infty}[\{\boldsymbol{y}_t\}\star\{\boldsymbol{y}_t\}]}{\text{归一化因子}}\end{aligned}$$

但是，$\{\boldsymbol{y}_t\}$ 的各项是不相关的；因此

$$\lim_{N\to\infty}\{\boldsymbol{y}_t\}\star\{\boldsymbol{y}_t\}\propto\{\cdots\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ \cdots\}$$

且

$$C(\tau)=\frac{\{I_t\}\star\{I_t\}}{\text{归一化因子}}$$

因为我们选择归一化因子使得 $C(0)=1$，由此可得上式右边本身是一个归一化的自相关函数。

因此，最初不相关的序列在通过一个滤波器后所得序列的自相关函数最终由滤波器冲激响应的自相关函数给定。

对谱的影响

为了研究一个噪声波形通过滤波器以后对谱的影响，需要重新考虑用序列 $\{x_t\}$ 表示一个波形的方法。这样数字序列 $\{x_t\}$ 完全等同于

$$\sum_j x_j\delta(t-j),$$

它是一个连续的均匀间隔的冲激串，冲激的强度由序列的数字给出；或者也等同于光滑曲线

$$\sum_j x_j\,\mathrm{sinc}(t-j)$$

通过序列的值。这两种表达的谱差别很大；第一种谱具有无穷高频谱分量，而第二种频谱具有截止频率。下面的讨论是指第二种情况，以免涉及到两种不同的谱，但结果总可以用冲激信号重新叙述。

随机输入的谱　考虑对应于序列 $\{\boldsymbol{y}_t\}$ 的波形

$$V(t)=\sum_j \boldsymbol{y}_j\,\mathrm{sinc}(t-j)$$

假设序列 $\{\boldsymbol{y}_t\}$ 具有零均值，而且 10 个可能的值等概率出现。那么这个波形的谱是什么呢？

直接取傅里叶变换

$$V(t) \supset S(f) = \sum_j y_j e^{-i2\pi jf} \prod(f)$$

观察结果，我们看到当 $|f| > \frac{1}{2}$ 时，变换是零，并且对较小的 f 值，它可以看作是一组向量的和，向量的长度(模)为 y_j，而相位递增地超前一个角度 $-2\pi jf$。首先要计算的是结果的长度(模)。它的平方由上面的傅里叶变换乘以它的复共轭给出。这就是我们前面所称的功率谱。由下式给出

$$\begin{aligned} SS^* &= \left(\sum_j y_j e^{-i2\pi jf}\right)\left(\sum_j y_j e^{i2\pi jf}\right)\prod(f) \\ &= [y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \cdots + 2(y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_4 + \cdots)\cos 2\pi f \\ &\quad + 2(y_1y_3 + y_2y_4 + y_3y_5 + \cdots)\cos 4\pi f + \cdots]\prod(f) \\ &= \left\{\sum_j y_j^2 + \sum_{\tau \neq 0}\left[\left(\sum_j y_j y_{j+\tau}\right)\cos 2\pi\tau f\right]\right\}\prod(f)。\end{aligned}$$

积矩 $\sum y_j y_{j+\tau}$ 本身不为零，但是对 $\tau \neq 0$ 来说序列 $\{y_i\}$ 的自相关函数是 0。根据定义，当序列中的项数趋于无穷时对除 $\tau = 0$ 外的所有 τ，$\sum y_j y_{j+\tau}$ 相对于 $\sum y_j^2$ 可以忽略，因此，右边的第一项是功率谱的主要部分。需要注意的重要的一点是这一项不包含频率 f，换句话说，功率谱 SS^* 是平的，在 $f = \frac{1}{2}$ 处截止。

如果我们是根据冲激波形 $\sum x_j \delta(t-j)$ 进行讨论的，我么将得到直到无穷高的频率都是平的功率谱。

显然，因为首项 $\sum y_j^2$ 随着序列长度的增加而无限制地增加，所以很难给功率谱指派一个数值。如果一个波形具有无穷的能量(在无穷时间上传输一个非零的功率)，那么如果所有的能量集中在一个有限的带宽内，就没有办法避免每单位带宽具有无穷能量。

显然 $\sum y_j^2$，是波形的总能量，因为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum y_j \operatorname{sinc}(t-j)\right]^2 dt = \sum y_j^2$$

并且类似地

$$\int_{-t}^{t} SS^* df = \sum y_j^2。$$

当然，从瑞利定理可知，这两个积分一定相等。一个好的克服无穷能量困难的方法是处理有限持续期的波形，并且研究当持续期趋于无穷时被讨论的一些量是否趋于一个极限。功率谱的强度或许不会趋于一个极限，但谱的形状趋于一个极限。

由自相关定理，我们知道如果功率谱与 $\prod(f)$ 正比，那么自相关函数将是 $\operatorname{sinc}\tau$，而且由于 $\tau = 0$ 时的值等于 1，所以它是归一化的；这样

$$C(\tau) = \operatorname{sinc}\tau。$$

为直接验证这个结果，我们有

$$
\begin{aligned}
C(\tau) &= \lim_{N\to\infty} \frac{V(t)\bigstar V(t)}{\text{归一化因子}} \\
&= \lim \frac{\left[\sum \boldsymbol{y}_j \operatorname{sinc}(t-j)\right]\bigstar\left[\sum \boldsymbol{y}_j \operatorname{sinc}(t-j)\right]}{\text{归一化因子}} \\
&= \lim \frac{\{\left[\sum \boldsymbol{y}_j \delta(t-j)\right] * \operatorname{sinc}t\}\bigstar\{\left[\sum \boldsymbol{y}_j \delta(t-j)\right] * \operatorname{sinc}t\}}{\text{归一化因子}} \\
&= \lim \frac{\left[\sum \boldsymbol{y}_j \delta(t-j)\right]\bigstar\left[\sum \boldsymbol{y}_j \delta(t-j)\right] * \left[\operatorname{sinc}t\bigstar\operatorname{sinc}t\right]}{\text{归一化因子}} \\
&= \lim \frac{\left[\sum \boldsymbol{y}_j^2 \delta(\tau) + \sum_{\tau\neq 0}\left(\sum_j \boldsymbol{y}_j \boldsymbol{y}_{j+\tau}\right)\delta(t-\tau)\right] * \operatorname{sinc}\tau}{\text{归一化因子}} \\
&= \frac{\left[\sum \boldsymbol{y}_j^2 \delta(t)\right] * \operatorname{sinc}\tau}{\text{归一化因子}} \\
&= \frac{\sum \boldsymbol{y}_j^2 \operatorname{sinc}\tau}{\text{归一化因子}} \\
&= \operatorname{sinc}\tau
\end{aligned}
$$

按照冲激波形 $\sum y_j\delta(t-j)$ 来讲，我们发现 $C(\tau)=\delta^0(\tau)$，这里 $\delta^0(\tau)$ 是零函数，它当 $\tau=0$ 时等于 1，其他值时等于 0，但是这会带来一些不方便。一则，我们希望 $C(\tau)$ 是功率谱的傅里叶变换，但零函数的变换是零；因此，作为在无穷个数中引入无穷能量脉冲的后果，我们必须容忍一个在所有的频率上是平的但等于零的功率谱。然而，应当注意到在上面的推导中引入冲激波形是比较方便的。

最后，还应当提到傅里叶变换的相位，我们只要认为对一个有限持续期的波形来说，相位在 $0\sim 2\pi$ 之间等概分布，并且把相位对频率的依赖关系作为一个待解决的问题就足够了。

输出谱　当波形 $V(t)$ 通过一个滤波器时，输出波形 $W(t)$ 由下式给定

$$W(t)=V(t)*I(t),$$

其中 $I(t)$ 是滤波器的冲激响应，并且与先前用来描述滤波器的序列 $\{I_t\}$ 有关，通常有

$$I(t)=\sum_j I_t\operatorname{sinc}(t-j)。$$

由此可得，$W(t)$ 的谱是 $V(t)$ 的傅里叶变换 $S(f)$ 与滤波器的传输函数 $T(f)$ 的乘积。即

$$W(t)\supset S(f)T(f),$$

并且输出的功率谱为

$$SS^*TT^*。$$

由于随着波形的持续期的增加，输入波形的功率谱在它的截止频率 $|f|=\frac{1}{2}$ 以内是平的，我们设 $SS^*\propto\Pi(f)$，因此输出的功率谱正比于

$$TT^*\Pi(f)。$$

这是

$$[I(t)\star I(t)] * \mathrm{sinc}t$$

的傅里叶变换。上式是一个带限函数，可以用序列表示为

$$\{I_t\}\star\{I_t\}。$$

这与前面所得到的输出的自相关函数完全一致，即

$$C(\tau)=\frac{\{I_t\}\star\{I_t\}}{\text{归一化因子}}$$

显然，$\{I_t\}\star\{I_t\}$ 及其傅里叶变换 TT^* 扮演了重要的角色，TT^* 被称为滤波器的功率传输函数。

如果两个滤波器 $\{I_t\}$ 和 $\{J_t\}$ 是级连的，关键的量变为

$$(\{I_t\} * \{J_t\})\star(\{I_t\} * \{J_t\})$$

并且完全的功率传输函数是各自功率传输函数的积。这个结果可以用来处理任何给定功率谱的随机噪声通过滤波器的问题。我们简单地说，给定的波形是具有平坦功率谱的噪声通过一个滤波器后的波形。

一些噪声数据

图 17.8 是一个长的噪声波形的采样。这里的噪声波形是由 Kendall 和 Smith(1940) 出版的随机数字与二项式系数序列{1 5 10 10 5 1} 进行卷积，然后通过这些点做一条光滑曲线得到的。由于从 0 ～ 9 随机均匀分布的数字的均值是 4.5，所以所得序列的均值是 144；图中的横轴位于平均值上。我们现在来研究波形的谱。

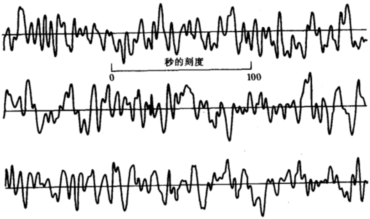


图 17.8　低通噪声的采样，共有 860 个值

已经证明，在这种情况下自相关系数的值与 $\{I_t\}\star\{I_t\}$ 成正比，其中 $\{I_t\}$ 是滤波器的冲激响应；在本例中，与{1 5 10 10 5 1} 卷积的数值运算等价于通过一个物理的滤波器。的确这个

类比十分接近我们通常所讲的数值滤波。因此，在减去均值以后，上面序列的自相关序列为

$$\{1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1\}\star\{1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1\} = \{1\ 10\ 45\ 120\ 210\ 252\ 210\ 120\ 45\ 10\ 1\}。$$

现在，这个二项式序列也可表达为

$$\{1\ 1\}^{*10},$$

由中心极限定理，我们期望这个结果是近似高斯的。事实上，如果对整数值 n 计算高斯表达式 $252\exp[-\pi(0.24n)^2]$ 的值并且与二项式系数进行比较，我们可得

n	0	1	2	3	4	5
高斯	252	210	122	49	14	3
二项式	252	210	120	45	10	1

为了下面表达式的紧凑，用高斯表达式来代替它，但显然很容易计算出更精确的结果。

假设点与点之间的内插是通过与和采样理论有关的 sinc 函数的卷积得到的。那么，平滑曲线的自相关函数正比于

$$\{e^{-\pi(0.24\tau)^2}\,\mathrm{III}(\tau)\} * \operatorname{sinc}\tau$$

并且，它的功率谱正比于傅里叶变换

$$\left\{\frac{1}{0.24}e^{-\pi(f/0.24)^2} * \mathrm{III}(f)\right\}\Pi(f)。$$

最终的表达近似等于

$$\frac{1}{0.24}e^{-\pi(f/0.24)^2}。$$

由于，表达式在应当突然截止到 0 的 $f = 0.5$ 频率处，已经降到了 10^{-5}，所以近似程度是很高的。

由此可见，以上的噪声数据近似具有以零频为中心的高斯谱。我们还可以对幅度谱进行考察，并且发现幅度谱也是近似高斯的。因此，我们可以毫不犹豫地认为，上面的图形是一个高斯低通噪声的例子。对记录的数据可以研究很多有趣的特征，诸如：振荡的强度，速率和特征随时间的变化，以及许多量的问题，诸如：过零的速率及其分布，最大值和最小值的分布，等等。

图 17.9 所示的是中心频率非零而且带宽相对于中心频率非常小的一个例子。图中上面的例子是通过点集 $\{y_t\}$ 的光滑曲线，其中的每一点 y_t 由下式计算

$$y_t = ay_{t-1} + by_{t-2} + \varepsilon_t,$$

其中 $a = 1.84$，$b = -0.9$，而 ε_t 在 $-0.5 \sim 0.5$ 之间均匀分布。这个简单过程的基本原理如下。首先，考虑不包括 ε_t 以及 t 不只限于整数值的情况，这样，设 $y(t)$ 为 t 的函数，并且当 t 为整数值时等于 y_t，那么

$$y(t) = [a\delta(t-1) + b\delta(t-2)] * y(t)。$$

这个方程服从于一个阻尼振荡

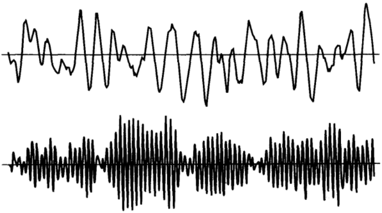


图 17.9 带通噪声的采样

$$Ae^{-\delta t}\cos(\omega t+\alpha)$$

其中 A 和 α 分别是任意的幅度和相位，而频率 ω 和阻尼常数 δ 与常数 a 和 b 的关系如下

$$a=2-\omega^2-\delta$$
$$b=-(1-\delta)。$$

考虑随机项，我们可以得到对随机激励的阻尼谐振响应，随机激励在截止频率内具有平坦的谱，截止频率与连续项的离散间隔有关。

带通噪声的一般特征是由以通带的中心频率为中心的振荡和显著变化的包络幅度组成。仔细观察表明，振荡的相位飘移速率与包络幅度变化的速率有关。

如果噪声通过几个级联的阻尼谐振腔，每一个与所讨论的单独的一样，那么谱将趋于一个以它的中心频率为中心的高斯分布。可事实上，这个例子不是一个高斯谱，但有一个相当近似的高斯幅度分布。现在出现了一个低通噪声例子中所没有出现的问题 —— 包络幅度的分布是什么？

带通噪声的包络

为了研究一个噪声波形 $y(t)$ 的包络，我们需要知道它的希尔伯特变换 $z(t)$。那么如第 13 章所述，包络的幅度定义为

$$\{[y(t)]^2+[z(t)]^2\}^{\frac{1}{2}}。$$

设 $y(t)$ 在 y 和 $y+\mathrm{d}y$ 之间发生的概率为 $p_y(y)\mathrm{d}y$，并设 $z(t)$ 在 z 和 $z+\mathrm{d}z$ 之间发生的概率为 $p_z(z)\mathrm{d}z$。在本例中，我们认为 $p_y(y)$ 是高斯的；设

$$p_y(y)=ae^{-\pi(ay)^2}。$$

正如即将证明的，如果 $z(t)$ 有同样的分布，于是

$$p_z(y)=ae^{-\pi(az)^2},$$

而且，如果还有 z 与 y 独立，那么 $y(t)$ 在 y 和 $y+\mathrm{d}y$ 之间发生而同时 $z(t)$ 在 z 和 $z+\mathrm{d}z$ 之间发生的概率是 $p_y(y)p_z(z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中

$$p_y(y)p_z(z) = a^2\mathrm{e}^{-\pi a^2(y^2+z^2)}。$$

那么，在 (y,z) 平面上，二维概率分布可以用极坐标 r 和 θ 写为

$$p_y(y)p_z(z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = a^2\mathrm{e}^{-\pi a^2r^2}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r。$$

这样，包络幅度 $\{[y(t)]^2+[z(t)]^2\}$ 在 r 和 $r+\mathrm{d}r$ 之间的概率 $p(r)\mathrm{d}r$，由式

$$p(r)\mathrm{d}r = a^2\mathrm{e}^{-\pi a^2r^2}2\pi r\mathrm{d}r,$$

或

$$p(r) = 2\pi a^2\mathrm{e}^{-\pi a^2r^2}$$

给出。这是瑞利分布，第 4 章中有瑞利分布的一些数值参数。参考它的均方横坐标 $\langle r^2\rangle$，它通常写为如下形式

$$p(r) = \frac{2r}{\langle r^2\rangle}\mathrm{e}^{-r^2/\langle r^2\rangle}。$$

至此，我们必须分析希尔伯特变换 $z(t)$ 的概率分布。这里的基本思想是 $z(t)$ 与 $y(t)$ 具有相同的统计特性；首先，它们有相同的功率谱和自相关函数。把 $y(t)$ 看作相位无关的谐波分量的叠加，我们知道希尔伯特变换（它对每个傅里叶的分量移位不同的量）的作用是给出另一个独立的同类叠加。基于这些假设我们得到包络的分布服从瑞利分布。

噪声波形的检测

如果一个噪声波形 $y(t)$ 通过一个输出为 $|y(t)|$ 的线性检测器，那么显然，就正的输出来说输出波形与输入波形具有相同的高斯概率分布。更进一步，$|y(t)|$ 的包络与 $y(t)$ 的包络相同，因此包络具有相同的瑞利分布。

如果我们用输出为 $[y(t)]^2$ 的平方律检测器，包络 V 是 $y(t)$ 的包络 r 的平方。这样

$$V = r^2$$

且

$$\mathrm{d}V = 2r\mathrm{d}r。$$

因此，由于 $p_V\mathrm{d}V = p(r)\mathrm{d}r$，

$$p_V = \frac{1}{\langle V\rangle}\mathrm{e}^{-V/\langle V\rangle}。$$

这是一个截断指数分布。

噪声功率的测量

考虑一个功率谱为 $R(f)$ 的噪声波形，假设我们要求测量它的强度。信号可能来自于一个带通放大器，放大器与一个指向宽带电磁辐射源的天线相连接。如果辐射源的功率谱在放大器的整个通带内是平的，那么，$R(f)$ 可以看作是接收滤波器的功率传输函数。

因为信号的均值为零，它通过检测器产生一个单向电流，电流的均值就是信号强度的度量。在此我们使用平方律检测器，我们需知道输出的功率谱由表达式

$$2R(f)\star R(f)+\left[\int_{-\infty}^{\infty}R(f)\mathrm{d}f\right]^2\delta(f)$$

给出。在本表达式中，第一项包含谱 $R(f)$ 的差频 f(或和频）的各项，第二项表示直流分量。和频和差频是由一组谐波分量的平方引起的，就像振荡信号的简单检测理论中的情况一样。

为了测量均值，必须减少波动部分。通过让已检波形通过一个功率传输函数为 $S(f)$ 的线性平滑滤波器可以做到这一点。它的输出的谱为

$$S(f)\left\{2R(f)\star R(f)+\left[\int_{-\infty}^{\infty}R(f)\mathrm{d}f\right]^2\delta(f)\right\}。$$

相对于平均值，波动现在被缩小了；均方波动是

$$2\int_{-\infty}^{\infty}S(f)[R(f)\star R(f)]\mathrm{d}f=2R(f)\star R(f)\,|_0\int_{-\infty}^{\infty}S(f)\mathrm{d}f$$

且均值为

$$[S(0)]^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}R(f)\mathrm{d}f。$$

均方根波动和均值的比值决定着测量均值时所能达到的精度限制，在测量理论中经常会遇到这样的限制。公式为

$$\frac{\text{均方根波动}}{\text{均值}}=\left[\frac{2R(f)\star R(f)\,|_0}{\int_{-\infty}^{\infty}R(f)\star R(f)\mathrm{d}f}\frac{\int_{-\infty}^{\infty}S(f)\mathrm{d}f}{S(0)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{W_S}{\frac{1}{2}W_{R\star R}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 W_S 是平滑滤波器功率传输谱的等效带宽（第 8 章），它由下式给出

$$W_S=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}S(f)\mathrm{d}f}{S(0)},$$

而 $W_{R\star R}$ 是作为 $R(f)$ 的自相关宽度在第 8 章中已经叙述的量。它是 $R\star R$ 的等效带宽，把 $R(f)$（包含它的负频率部分）代入自相关积分，就得到 $R\star R$。

$$R\star R=\int_{-\infty}^{\infty}R(f')R(f+f')\mathrm{d}f'。$$

这样，

$$W_{R\star R}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}R(f)\star R(f)\mathrm{d}f}{R(f)\star R(f)\,|_0}$$

记 $\tau=\frac{1}{W_S}$ 以及 $\Delta f=\frac{1}{2}W_{R\star R}$ 可以更方便一些，得

$$\frac{\text{均方根波动}}{\text{均值}}=\frac{1}{(\tau\Delta f)^{\frac{1}{2}}}。$$

如果接收滤波器在带宽Δ内均匀接收，在带外什么也不接收，而平滑滤波器由一个在时间间隔 T 内取平均的器件组成，在这种简单情况下，$\tau = T$ 且 $\Delta f = \Delta$。对其它形状的接收滤波器和其他类形的平滑滤波器，τ 和 Δf 的值见表 17.1。

表 17.1 接收和平滑滤波器数据①

接收滤波器②	$R(f)$	Δf
矩形通带，$f_0>\frac{1}{2}\Delta$	$\Pi\left(\frac{\lvert f\rvert-f_0}{\Delta}\right)$	Δ
两个分开的矩形通带	$\Pi\left(\frac{\lvert f\rvert-f_1}{\Delta_1}\right)+\Pi\left(\frac{\lvert f\rvert-f_2}{\Delta_2}\right)$	$\Delta_1+\Delta_2$
三角形通带，$f_0>\frac{1}{2}\Delta$	$\Lambda\left(\frac{\lvert f\rvert-f_0}{\frac{1}{2}\Delta}\right)$	$\frac{3}{4}\Delta$
单调谐电路，$f_0\gg\Delta$	$\left[1+\left(\frac{\lvert f\rvert-f_0}{\Delta}\right)^2\right]^{-1}$	$2\pi\Delta$
两个隔离的级连调谐电路，$f_0\gg\Delta$	$\left[1+\left(\frac{\lvert f\rvert-f_0}{\Delta}\right)^2\right]^{-2}$	$\frac{4}{5}\pi\Delta$
高斯通带③	$\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\lvert f\rvert-f_0}{\Delta}\right)^2\right]$	$2\pi^{\frac{1}{2}}\Delta$
平滑滤波器	$S(f)$	τ
在时间 T 上取滑动平均	$\operatorname{sinc}^2 Tf$	T
单 RC 电路	$[1+(2\pi RCf)^2]^{-1}$	$2RC$
两个隔离的级连 RC 电路	$[1+(2\pi RCf)^2]^{-2}$	$4RC$
临界阻尼 RLC 电路	$\left[\left(\frac{R}{2L}\right)^2+(2\pi f)^2\right]^{-2}$	$\frac{8L}{R}$
矩形通带	$\Pi\left(\frac{f}{2f_0}\right)$	$\frac{1}{2f_0}$
高斯通带	$\exp\left(-\frac{f^2}{2f_0^2}\right)$	$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}f_0}$

① Bracewell(1962)。

② 符合 $R(0)$ 是零或者可以忽略的带宽。

③ 半功率带宽是 $(8\ln 2)^{\frac{1}{2}}\Delta$。

参考书目

Bracewell, R. N.: "Radio Astronomy Techniques," *Handbuch der Astrophysik*, vol. 54, pp. 50-129, Springer, Berlin, 1962.

Gardner, W. A.: "Statistical Spectral Analysis," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.

Goodman, J. W.: "Introduction to Fourier Optics," 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1996.

Goodman, J. W.: "Statistical Optics," Wiley, New York, 1966.

Gray, R. M.: "Probability, Random Processes, and Ergodic Properties," Springer, New York, 1987.

Leon-Garcia, A.: "Probability and Random Processes for Electrical Engineering," Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.

Papoulis, A.: "Systems and Transforms with Applications in Optics," McGraw-Hill, New York, 1968.

Parzen, E.: "Modern Probability Theory and Its Applications," Wiley, New York, 1960.

Ripley, B. D.: "Spatial Statistics," Wiley, New York, 1981.

Steward, E. G.: "Fourier Optics," Ellis Horwood, Chichester, U.K., 1987.

Swarup, G., A. R. Thompson, and R. N. Bracewell: "The Structure of Cygnus A," *Astrophys. J.*, vol. 238, pp. 305-309, 1963.

习题

1. 经验法则 在我们对诸如图 17.1 的记录测量信噪比之前，首先需要测量噪声的强度。一种方法是读出相邻间隔上的值，并计算均方根值。然而，根据广泛引用的经验法则，均方根值是峰-峰值的五分之一。研究这一法则。

2. 峰宽精度 对类似图 17.1 所示的记录（但其中的信号是高斯的而不是双峰的），测量信号的半峰值宽度。假设信噪比较大，计算所测宽度的标准差。如果宽度用 5% 的标准差度量，峰值信号一定要比均方根噪声大多少倍？

3. 一个噪声波形具有高斯幅度分布和一个确定的功率谱。对它的微分的幅度分布和功率谱你能说些什么？

4. 上过零率和峰值率对功率谱的关系

(a) 一个高斯分布的随机数序列与序列 $\{I_t\}$ 卷积。我们假设序列中连续数字间的间隔为 1 秒。当输出序列的一个数字是负的而下一个数字是正的时，我们说发生了一个正的过零，或者称为上过零。证明所期望的每秒的上过零数 ν 由下式给出

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\arccos\gamma_1,$$

其中

$$\{\gamma_t\} = \frac{\{I_t\}\star\{I_t\}}{\text{归一化因子}}$$

用通用的方法选择归一化因子使得 $\gamma_0 = 1$。

(b) 证明已知 γ_1 等价于知道 $\{\gamma_t\}$ 的中心二阶差分，或者等价于当 $\{I_t\}$ 是一个长序列时，由 $\{I_t\}$ 定义的光滑曲线的自相关函数(ACF)的中心曲率。然后再证明每秒的上过零数 ν 等于功率谱 $S(f)S^*(f)$ 的回转半径，或者

$$\nu^2 = \langle f^2 \rangle_{SS^*} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 S(f) S^*(f) \mathrm{d}f}{\int_{-\infty}^{\infty} S(f) S^*(f) \mathrm{d}f} = \frac{\text{ACF 的中心曲率}}{\text{ACF 的中值}}$$

你如何从物理上解释分子中的积分不存在的情况？

(c) 证明功率谱为 $S(f)S^*(f)$ 的噪声波形中，每秒钟最大值的个数等于功率谱为 $f^2 S(f) S^*(f)$ 的不同波形中每秒钟的上过零个数。

5. (a) 图 17.8 中所示的波形具有高斯功率谱 $\exp(-f^2/2f_0^2)$。假设连续值的间隔为 1 秒，用图中所给的对于图的解释确定 f_0。

(b) 对一个具有高斯功率谱的观测波形，要求通过对每秒钟的上过零数计数来求解 f_0。通过实际计数，估计关系 $f_0 = K\nu$ 中系数 K 的值，其中 ν 是期望的每秒钟的上过零数。这种估计的精度是多少？

6. 对直到 10 的整数值，像图 17.7 一样画出 $\eta_{t+\tau}$ 对 η_t 的散点图，作出相关性对 τ 的图形。

7. 设 ρ 是积矩相关系数，ψ 是通过对图 17.5 那样的散点图各象限中的点计数而计算出的简单系数。在什么条件下，ρ 和 ψ 之间有一对一的关系？证明

$$\rho = \sin(\frac{1}{2}\pi\psi)$$

是一个有用的转换公式。

8. 削去噪声峰值　我们期望来自外空间的射频辐射在天线上产生的宽带电压包含由各种星际分子所引起的窄带信号。由于对微弱信号的检测存在很大的技术困难，因此希望通过计算机处理，接收电压首先被削波使得当电压值为正时等于 +1，而为负时等于 −1。看起来，这样似乎会丢失信息，但是证明原始信号的自相关函数为

$$\sin\left[\frac{1}{2}\pi C(\tau)\right],$$

其中 $C(\tau)$ 是已削波信号的自相关函数，因此可以通过傅里叶变换得到辐射中的谱线。

9. 人工随机噪声　一个信号 $V(t)$ 包含三个间隔很近但不成比例的频率，

$$V(t) = \cos t + \cos et + \cos \pi t$$

从 t 的单位间隔开始，对信号作图，得到前几个周期函数性态的印象，然后快速画出信号的包络到 $t = 150$。包络的起伏方式使我们联想到窄带噪声，但幅度分布当然不是高斯的。证明，实际上信号电平在 V 和 $\mathrm{d}V$ 之间的概率正比于

$$(1-V^2)^{-\frac{1}{2}}\Pi\left(\frac{V}{2}\right) * (2-V^2)^{-\frac{1}{2}}\Pi\left(\frac{V}{2}\right) * (1-V^2)^{-\frac{1}{2}}\Pi\left(\frac{V}{2}\right)。$$

证明它与高斯噪声非常类似，对于数百个周期的采样，幅度分布将很难与实际情况区分开来。

10. 用相干测绘一个无线射频源　我们的星系或其它星系中的无线电波到达地球，在每个波达方向(DOA) 上的强度都可以用温度 T(在所涉及的频率范围内，这是一个方便的量，它与每单位频率间隔的功率成正比) 来描述。接收场中有两个一致的天线，分别配有两个一致的窄带放大器。放大器的输出电压由时变复矢量 $V_1(t)$ 和 $V_2(t)$ 给定，它们通过一致的传输线传

送给一个非线性电路，电路的功能是测量出下式定义的复数量 Γ

$$\Gamma = \frac{\langle V_1(t)V_2^*(t)\rangle}{\langle V_1(t)V_1^*(t)\rangle}\text{。}$$

量 Γ 被称为场的复相干度，它是两个天线之间间隔的函数。如果把注意力限制在一个小的立体角度(例如，通过使用有向天线可以做到这一点)，证明可以用下式测绘空间信号源

$$\frac{\overline{T}}{\overline{T}\,|_0} = \Gamma,$$

其中 $\overline{T}$ 是待求温度 T 的傅里叶变换。阐明 $\overline{T}$ 和 Γ 所依赖的自变量的性质。提示：求解这个问题的一种方法是根据远处的垂直于视线的平面上的横向场分量 $F(t)$ 来处理(假设平面比能量源近一些)。量 T 可以看作是可以用 $T \propto \langle F(t)F^*(t)\rangle$ 来表达的场的统计。

11. 一个放大器的功率传输函数(是频率 f 的函数)是 $\exp(-f^2/2B^2)$。放大器后面是一个平方律检测器，一个功率传输函数为 $\exp(-f^2/2b^2)$ 的低通滤波器，和一个自动记录电流计。作为一个总增益校准过程，由一个精心设计的噪声发生器作用于放大器，结果的偏差从记录中读出。由二极管产生的噪声功率的谱从与 B 相比可以忽略的低频到远大于 B 的高频的频率范围内是均匀的，而且它的电平也是标准化的。证明记录的均方根波动是偏差的 K 倍，其中

$$K = \left(\frac{2^{\frac{1}{2}}b}{B}\right)^{\frac{1}{2}}\text{。}$$

假设 $B = 10^4$，$b = 10^2$，以及精度要求能保证检测出 1% 的增益变化。建立起 1% 的增益变换需要多于还是少于 1 秒的时间？如何能够研究在 $\frac{1}{2}$ 秒量级的特征时间上发生的增益波动？

12. 电压 $V_1(t)$ 作用于一个冲激响应为 $I(t)$ 的带通放大器，通过一个检测器的修正后用冲激响应为 $J(t)$ 的低通滤波器进行平滑。证明输出电压 $V_2(t)$ 为

$$V_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} V_1(t-\tau_1)K(\tau_1, \tau_2)V_1(t-\tau_2)\,\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2,$$

其中

$$K(\tau_1,\tau_2) = \int_{-\infty}^{\infty} I(\tau_1-\tau)J(\tau)I(\tau_2-\tau)\,\mathrm{d}\tau\text{。}$$

13. 具有高斯幅度分布的噪声波形的谱达到但没有超过频率 f_c。这样，由采样定理确定的临界采样率为 $2f_c$。证明采样点一般不是独立的，推导在什么条件下，采样点是不相关的。噪声功率的测量精度可以用独立测量数的平方根来表示。证明有效独立值的出现率与功率谱的自相关宽度有关，而不是与有 f_c 关。

14. 反射天线的表面容差 位于一个理想的抛物面反射器的焦点上的点源发出的球面波在反射后变为平面波，但是由于设计所允许的抛物面的不平度，从一个天线发出的波前会像图 17.8 那样起皱。设 y 是波前与理想平面波前的偏差，λ 是工作波长。证明位于平面法线上远处的接收点，所接收的功率与从一个理想的反射器接收到的功率相比下降了一个因子

$$\frac{1}{1+\mathscr{D}\langle\delta^2\rangle},$$

其中 $\delta = 2\pi y/\lambda$。角括号表示在天线孔径上取平均，$\mathscr{D}$ 是一个设计参数，如果在波前的所有点上的场强是一样的，那么 $\mathscr{D}$ 等于 1。

15. 随机天线阵 指向天顶的 N 个相同的天线，随机安排在地面上的一块区域 G 上，这块区域相当大，因此我们不必考虑天线重叠的可能性。天线通过长度相等的传输线连接到一对终端，连接的方式确保从位于天顶方向上的一个远处的点源发出的信号到达终端对的相位相同。为了探测这种"随机阵列"的辐射方向图，我们在一个球面上移动点源，球面的面积比 G 大，中心位于 G 的质心上，然后测量终端上电压的幅度和相位。随着点源从天顶上移开，终端上的电压下降，在每一个源的方向上，我们考虑集合平均电压，即 G 内所有可能 N 个天线的排列产生的电压相位复矢量的平均。证明如果 G 完全被天线充满，那么集合平均电压正比于收到的电压，因此在平均意义上，随机天线阵的辐射方向图是一样的，就像一个巨大的天线占用了整个区域 G。

16. 一个峰值电压表包括一个电阻与电容并联然后再与二极管串联。作用于这个电路两端的交流电压在峰值处的一个短暂的间隔内向电容充电，充电的平均速率正好平衡了电容通过它的并联电阻的泄漏。跨接在电容两端的表头指示作用电压的峰值电压。研究能否用这种仪器测量噪声波形的均方根电压。

17. 涡动尾迹 流星在大气中留下的尾迹很快就变成许多紊动，通过雷达可以观测到尾迹的盘旋效应，当可见度满足时也可以通过摄影观察。最初提出的解释变形的物理原因是大气的随机涡动，大气的随机涡动理论自动产生均方量。为了测试这个理论，假设尾迹投影到一个平面，考虑它相对于理想直线的斜率和偏差。推导每单位长度上过零数 ν 由

$$2\pi\nu = \frac{\text{均方根斜率}}{\text{均方根偏差}}$$

确定，研究这一结果。

18. 随机噪声和线性检测器 一个标准差为 σ 的零均值随机噪声电压波形 $v(t)$ 通过一个线性检测器，使得：当 $v(t)$ 为负时输出是零，而当 $v(t)$ 为正时输出与输入相同。然后输出通过一个低通滤波器。我们设滤波器的通带与 $v(t)$ 的谱密切相关，滤波器的输出是检测器输出的五个有效独立值的平均，滤波器的输出关于均值电压 m 波动的标准差为 σ_f。

(a) 证明

$$m = (2/\pi)^{\frac{1}{2}}\sigma$$

$$\sigma_f = \left(\frac{1-2/\pi}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\sigma\text{。}$$

(b) 如果波形 $v(t)$ 有一个谐振谱，谱的中心在 6 000 Hz，3dB 带宽为 1 000 Hz，且如果滤波器是一个数字计数器，它的输出为检测器 5 ms 输出的精确平均，证明

$$\sigma_f = \left(\frac{1-2/\pi}{5\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sigma\text{。}$$

第 18 章

热传导与热扩散

热传导问题在傅里叶理论中占有特殊的地位，因为正是傅里叶对与热有关的问题的研究使他在 1822 年出版了热的理论分析“Théorie Analytique de la Chaleur”一书，书中详细阐述了他的思想。在本章中，将要说明傅里叶分析是如何被引入到热流研究的，从而使我们已学到的思想背景可直接应用于这个领域。为简单起见，我们仅讨论一维热流问题，但这对我们的目的来说已经足够了。而且，很显然在更一般的几何情况下，需要求取在二维和三维情况下的傅里叶变换。更全面的背景知识参见 Jakob(1957) 的著作。

我们不要把本章的思想局限于热传导；它们本质上也适用于扩散以及通常由扩散方程描述的行为。因此，所涉及的这类物理学与半导体中的电子和空穴的扩散，等离子体中电子的扩散或者电离层中已被电离化的粒子流的轨迹是相同的。但为了方便，本书是依据热传导来写的，同时参考了一些电缆中的电现象。

一维扩散

扩散方程

$$\nabla^2 V = \frac{1}{K}\frac{\partial V}{\partial t}$$

或者它的一维形式

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{K}\frac{\partial V}{\partial t}$$

是熟知的用于描述热传导和热扩散现象的方程。我们将集中讨论一维方程，这对此处所讨论的扩散来讲已足够了，与更一般的方程相比所不同的只是它的几何复杂度较低。

如果热只能沿 $\pm x$ 方向流动时直棒中的温度用 $V(x)$ 表示，那么仅在有温度梯度 $\frac{\partial V}{\partial x}$ 的地

方才会有热能的流动。每秒钟沿直棒传播的热量 I 与温度差成正比，而与单位长直棒材料的热阻 r 成反比。即

$$I=-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial x}。$$

沿着温度差减小的方向流向低温处的热量会引起那里温度的升高，升高的温度与每单位长累积的热量成正比。描述材料温升性质的量是每单位长度的热容量① c；温度升高与 c 成反比。每秒钟单位长所积累的热量是流入热量和流出热量的差，即 $\frac{\partial I}{\partial x}$。从而

$$\frac{\partial V}{\partial t}=-\frac{1}{c}\frac{\partial I}{\partial x}。$$

这个方程考虑到了当接收的热量不足以补充必须流出的热量时，即当 $\frac{\partial I}{\partial x}$ 为正时或温度差的变化率 $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ 为负时，温度的下降。可以看到，这就使得 $V(x)$ 随着时间的推移而更加平滑，而且，由于我们对平滑度有定量的度量方法，我们能对此给出一个明确的定义。

这里，将要说明扩散与波的传播的一个根本区别。一根伸展的弦或一个水面在波动的情况下，它的平滑度可以用(非耗散的)一维波动方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

来描述。其中 v 是波速，不随时间的推移而增加，作为一个一般的性质，用 $-t$ 替换 t 描述的波也是波动方程的解。因此，在任何合理的定义下，随着时间的推移，弦的平滑度保持不变。另一方面，对扩散来讲，这种情况则是不可逆的；如果倒过来考虑的话，V 的分布序列将是不合情理的。

从描述一维热流动的两个方程中消去 $\partial I/\partial x$，我们得到

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=rc\frac{\partial V}{\partial t}。$$

只要物理量 V 的梯度是线性比例地在传递同一物理量，它的累积使 V 线性地增加，通过对符号进行适当的重新定义，我们可以建立相同的偏微分方程。这种量 V 的例子有：溶液中化学药品的浓度；大气中的一种过热成分的局部压力；媒介中的温度；海底电缆导体间的电势差；以及半导体中电子或空穴的浓度。因为可以用电路图来表示，我们选择电缆作为我们的第二个例子。导体有一个总的电阻 r 以及每单位长度的电容 c。电位差是 $V(x)$，且一个导体中的电流是 $I(x)$，另一个导体中的电流是 $-I(x)$。每单位长度存储的电荷是 cV。与导体的电阻相比较，任何感抗都是可以忽略的，而与位移电流相比，隔开两个导体的介质中的传导电流也是可以忽略的。于是方程

---

① 对单位截面积的直棒，通过用热导率替换 r^{-1} 同时用容积比热 ρs 替换 c 可以把 r 和 c 转换成通用的量，其中 ρ 是密度而 s 表示比热。r 的单位是热欧姆或热欧每米，c 的单位是热法拉或热法每米。作者感谢 W. Shockley 提供的这个信息。显然，V 和 I 分别用热伏特(tholts)和热安培(thamps)度量。

$$I = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial I}{\partial x}$$

可以用于电缆，且长度为 dx 的电缆可用图 18.1(a) 的电路表示。一段有限长的电缆可看作是一个链(b)，是由无穷小的单元(a) 组成的。沿着一端在火中的拨火棍的热扩散类似于电荷从电池往电缆中的渗透(图 18.2)。线电荷密度是 $q = cV$，或者，在热力学情况下是每单位长度的热量。

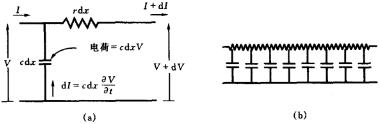


图 18.1　仅具有电阻和电容的电缆的电路表示

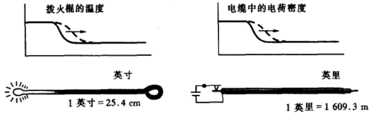


图 18.2　沿着拨火棍的热扩散以及电荷向电缆中的渗透

热传导现象中时间的不可逆性与熵的变化有关，熵增加的速率为

$$\int \frac{c(\partial V/\partial t)}{V} \mathrm{d}x。$$

在有关电的例子中，不可逆性与能量耗散有关，能量耗散速率为

$$\int \frac{1}{2} r I^2 \mathrm{d}x。$$

在热传导情况下，熵一直增加到等温状态且热流停止；在电的情况下，当每一个导体都达到相等的电势且电流停止时，系统达到零能量耗散的最终状态。

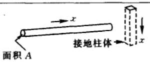
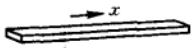
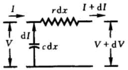
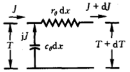
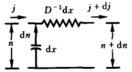
这是否意味着热流动期间熵的增加相当于电能到热能的转换呢？答案是否定的，因为，电的耗散要求熵会在一些点减小而对应地在其它的点增加，只是在对所有点积分时熵才满足单调增加的要求。

众所周知，阻容网络是非振荡的，其中原因之一是网络中没有电感，这样就不具备普通网

络振荡所依赖的两类不同的储能元件。我们不排除由自然行为会产生一次或多次脉冲，但正如在一个普通的振荡电路中一样，如果刚开始（或任何时候）没有负的电势，那么也就没有后续的振荡。当然，一个非等温的热传导系统在没有外界干预下是绝不会达到低于原始最小温度的。

物理、化学和工程的许多领域都有简单的扩散方程，它们都可以使用同样的变换方法；半导体中电子和空穴的扩散就是一个例子。符号的不一致，以及对符号和参数（符号是分配给参数的）的选择妨碍了一个基本理论在不同领域间的转换。表 18.1 阐明了这样的关系。

表 18.1　热导体中热的扩散，半导体中载流子的扩散，以及电信号在没有电感或泄漏电导的电缆中传播情况的类比

电	热	半导体
		
电压 V(伏)	温度 T(开尔文)	载体密度 n(粒 / 厘米^3)
电流 I(安)	热流 J(瓦)	流密度 j(粒 / 厘米^2 秒)
电压梯度 $\partial V/\partial x$ (伏 / 米)	温度梯度 $\partial T/\partial x$(开 / 米)	密度梯度 $\partial n/\partial x$(厘米$^{-4}$)
电阻 / 米 r(欧 / 米)	热阻 / 米 $r\theta$(热欧 / 米)	(扩散常数)$^{-1}$ D^{-1}(厘米$^{-2}$ 秒)
电容 / 米 c(法 / 米)	热容 c_θ	单位且无量纲
		
$rI = -\partial V/\partial x$	$r_\theta J = -\partial T/\partial x$	$D^{-1}j = -\partial n/\partial x$　(1)
$c\partial V/\partial t = -\partial I/\partial x$	$c_\theta \partial T/\partial t = -\partial J/\partial x$	$\partial n/\partial t = -\partial j/\partial x$　(2)
$\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = rc\dfrac{\partial V}{\partial t}$	$\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = r_\theta c_\theta \dfrac{\partial T}{\partial t}$	$\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial n}{\partial t}$　(3)

注：等式(1) 给出了电压、温度以及粒子密度的梯度。等式(2) 给出了电流、热流以及粒子流的梯度。消去电流 I(或 J，或 j) 就得到熟悉的扩散方程(3)。方程(1) 的三种表示说明流正比于梯度。方程(2) 对应于流体动力学中的连续方程，表示基尔霍夫定律(Kirchhoff)，即在输入节点处的电流 $\sum i = 0$。

当一个电缆的方程模型中只包含电阻和每单位长度的电容时，如果电介质损耗较大（不能忽略）时，就需要做一些修改；在此情况下，需要考虑每单位长度的电导 g，这可以通过在等效电路中插入一个与电容并联的电导来实现。当侧面方向的热损耗影响到沿导体的热扩散时，要

使用同样的改进电路。当等离子体器件受到很高频率的电激励时，电子的动能就会影响等离子体的特性，这时就需要插入一个与电容并联的电感。如果等离子的密度高到电子和等离子间的碰撞不能忽略时，就需要一个电阻与电感串联。

作为一组基于基尔霍夫定律的方程，纯数学的电路模拟可以阐明不熟悉领域的深奥方程，而且赋予我们把在一个领域的经验中可能具有的物理直觉应用到一个新的学科领域的能力。

一个点的高斯扩散

现在我们要考虑两个特殊的例子。设在 $t=0$ 时 V 的初始分布为

$$A\delta(x)$$

其中 A 是常量。那么通过代入 t 的后续值可以证明

$$V_t(x)=A\left(\frac{rc}{4\pi t}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-x^2rc/4t}$$

以及

$$I_t(x)=A\,\frac{rcx}{2t}\left(\frac{rc}{4\pi t}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-x^2rc/4t}。$$

换句话说，V 是一个高斯分布，分布的宽度以 $t^{\frac{1}{2}}$ 的速度加宽，而幅度以 $t^{-\frac{1}{2}}$ 的速度减小，从而使分布下的面积保持不变。流 I 可用两个瑞利分布表示，它们的宽度以 $t^{\frac{1}{2}}$ 的速度加宽，而幅度以 t^{-1} 的速度减小。V 和 I 的分布见图 18.3。对任何非零的 x，V 和 I 的值在降到零之前都要通过最大值。

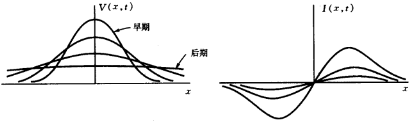


图 18.3　局部热注入的结果

在 $t=0$ 后的任意时刻，在电的情况下总储能为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}cV^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}c\,\frac{A^2rc}{4\pi t}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-2x^2rc/4t}\,\mathrm{d}x=\frac{A^2rc^2}{8\pi t}\left(\frac{4\pi t}{2rc}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=A^2\left(\frac{rc^3}{32\pi rt}\right)^{\frac{1}{2}}。$$

已知，集中蓄积的热以高斯方式扩散，扩散方程如下

$$\Gamma_t(x)=\left(\frac{rc}{4\pi t}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-x^2rc/4t},$$

并且考虑到扩散方程的线性，它可以对不同的解进行叠加，所以我们可以用的卷积积分的形式来表示一个具有任意初始分布 $V_0(x)$ 的扩散

$$V_t(x) = \Gamma_t(x) * V_0(x)。$$

对任何正的 t，我们可以把分布 V 看作是初始分布和一个在时间 t 内消逝的密集点源的高斯分布的卷积。函数 $\Gamma_t(x)$ 通常被称为扩散方程的格林函数，$\Gamma_t(x)$ 及其傅里叶变换可以参见图 18.4。

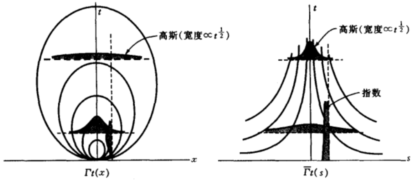


图 18.4 扩散方程的格林函数 $\Gamma_t(x)$ 及其傅里叶变换

空间正弦扩散

现在我们特别感兴趣的是高斯扩散函数 $\Gamma_t(x)$ 的傅里叶变换 $\overline{\Gamma}_t(s)$，因为通过卷积定理可以引入傅里叶理论。我们知道

$$\overline{\Gamma}_t(s) = e^{-4\pi^2 ts^2/rc},$$

而且，注意到正如对所有的 t，$\Gamma_t(x)$ 具有相同的面积一样，对所有的 t，$\overline{\Gamma}_t(0) = 1$。由卷积定理可得

$$\overline{V}_t(s) = e^{-4\pi^2 ts^2/rc}\overline{V}_0(s),$$

这可以做如下解释。假设 $V_t(x)$ 可被分解为具有 $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 2\pi sx$ 形式的空间傅里叶分量，那么每一个这样的分量都随时间指数地衰减，衰减的时间常数为

$$\frac{rc}{4\pi^2 s^2};$$

即，空间频率 s 越高，衰减速度越快；正如预料中的那样，温度差越高和空间波长越短是相互联系的。对 $s = 0$，即对一个均匀分布，时间常数是无穷大，当然它必须如此，因为没有能够导致热流动的温度差。

现在，我们可以按如下方式对具有任何初始分布的扩散作图。让分布进行一个滤波特性是高斯的且不产生相位变化的低通滤波运算。根据将要经过的时间，调整滤波器的宽度使得它与

$t^{-\frac{1}{2}}$ 成比例地收缩。事实上，我们说

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 2\pi sx\, e^{-4\pi^2 s^2 t/rc}$$

表示的是自然响应，即正(余)弦分布仍然保持是正(余)弦的，它只是没有空间频率变化且没有 x 移位的简单衰耗，因此傅里叶分析可以使扩散现象的描述更加简单。与 x 成正(余)弦关系的分布的响应可以从下式直接得到

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = rc\,\frac{\partial V}{\partial t},$$

注意到对 x 的偏微分等价于乘以 $i2\pi s$。则

$$(i2\pi s)^2 \mathbf{V} = rc\,\frac{d\mathbf{V}}{dt},$$

其中 $\mathbf{V}$ 是一个复向量，实际的分布是 $\mathbf{V}\exp i2\pi sx$ 的实部。即

$$\mathbf{V} = Ae^{i\Phi} e^{-4\pi^2 s^2 t/rc},$$

其中 $A\exp i\Phi$ 是一个任意的复常量，且

$$\begin{aligned} V &= \mathrm{Re}[Ae^{i\Phi} e^{-4\pi^2 s^2 t/rc}\ e^{i2\pi sx}] \\ &= Ae^{-4\pi^2 s^2 t/rc} \cos(2\pi sx + \Phi)。\end{aligned}$$

现在我们已经给出了一维扩散问题解的两种形式。在第一种形式中，我们从一个集中在一点的热源入手，并且用分布的每个分量所产生的高斯包络的线性叠加来表示一个任意分布的扩散。在第二种形式中，我们对任意的分布进行傅里叶分析，并且使每个谐波分量按各自的速率指数地衰减变化(图 18.5)，然后再次合成后得到结果。

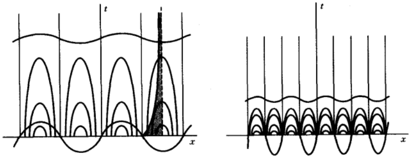


图 18.5 正弦分布的指数衰减，形式不变，速率正比于空间频率的平方

从前面的讨论，我们知道使用卷积的过程在概念上很有吸引力。然而，两种看问题的方法都很能说明问题，而且我们已经说明它们是通过卷积定理密切相联的。

对于等效电路还有一些进一步要说明的问题。我们很自然地认为描述电路状态的两个必需的量 V 和 I 是同样重要的。然而，通过从基本方程中消去 V，我们发现 I 与 V 一样满足同一差分方程；即

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = rc\,\frac{\partial I}{\partial t}。$$

这样，随时间的推移，I 的分布与已描述的 V 的分布完全相同。例如，方程

$$I_t(x) = \Gamma_t(x)$$

描述了流分布是高斯的且初始时仅集中在一点的问题的解；换句话说，问题是当 V 是一个仅在一点具有非零梯度的阶跃函数时会怎样呢。V 的解一定是

$$-\int r\Gamma_t(x)\mathrm{d}x$$

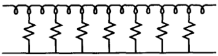


图 18.6 电感-电导传输线

由对偶性原理，电感-电导传输线（图 18.6）服从我们已经讨论过的同一方程，但 V 和 I 互换。这样 V 与 I 的梯度成正比，但反过来不成立。

还有另一种可能的传输线电路本身就说明这一点，如图 18.7 所示的电容-电导电路。它的方程为

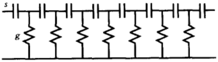


图 18.7 电容-电导传输线

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = SI$$

和
$$\frac{\partial I}{\partial x} = gV。$$

由此
$$\frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial t} = SgV。$$

并且 I 服从同样的三阶偏微分方程。因为我们可能会期望分量的简单组合会表现得更为简单，那么我们或许会对在前面的二阶方程就满足的情况下出现了一个三阶的方程而感到惊讶。为找出这种现象普遍特征的线索，让我们立即回到先前的正弦分布，我们有

$$(\mathrm{i}2\pi s)^2\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t} = Sg\mathbf{V},$$

因此

$$\mathbf{V} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}\mathrm{e}^{-Sgt/4\pi^2 s^2}。$$

这样 V 的均匀分布将快速衰减，并且谐波空间分布将以与空间频率的平方成比例的时间常数衰减，在极端情况下良好的空间振动被持续下去。由对偶性原理，我们可以说图 18.8 的电阻-电感传输线服从同样的微分方程，其中 V 和 I 的角色互换。

一般地，我们可以通过拉普拉斯变换式（参见 Carslaw and Jaeger，1947；van der Pol and Bremmer，1955）的应用来得到服从更一般的初始条件和边界条件的扩散方程的解。

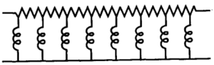


图 18.8 电阻-电感传输线

正弦时间的改变

在交流传输线理论中，由经验可知，对许多应用来说，阻抗（即 V 和 I 的比值）和传播常数为我们提供了非常方便的辅助参数，对许多应用来说，这些参数比基本参数更有用（在我们的例子中是 r 和 c）。我们希望把这种优良的效用引入到热扩散问题中出现的交变激励问题。特性阻抗 Z_0 为

$$Z_0=\left(\frac{r}{\mathrm{i}\omega c}\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 ω 是激励的角频率。传播常数 γ 为

$$\gamma=(\mathrm{i}\omega cr)^{\frac{1}{2}}。$$

Z_0 和 γ 都是复值的，但是因为每一个的实部和虚部的绝对值是相等的，所以仅涉及两个实常数（对应于两个实数 r 和 c）。

参考书目

Carslaw, H. S., and J. C. Jaeger: "Conduction of Heat in Solids," Oxford University Press, London, 1947.
Jakob, M.: "Heat Transfer," Wiley, New York, 1957.
van der Pol, B., and H. Bremmer: "Operational Calculus Based on the Two-Sided Laplace Integral," Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1955.

习题

1. 反向思考　已知一个直棒的温度分布。要求追溯它的过去并求初始的（或更早期的）温度分布。我们知道扩散方程不能决定逆向的流动问题。推导相关的微分方程。考虑把用于处理前向时间的卷积过程逆转的可能性，并对此问题应用空间分量滤波的概念。

2. 在一无限长的直棒上，其 $rc=2\ 500\ \mathrm{s/m^2}$，它的温度分布为

$$V(x)=300+10\mathrm{e}^{-300x^2}+5\mathrm{e}^{-75x^2}。$$

推出 $V(x)$ 先前可能的分布。

3. 使用滤波器对逆扩散问题和均衡问题进行比较和对照。

4. 热辐射的波动　月球近地点的表面温度有半个月近似为 350 K(Kelvin)，另外半个月近似为 150 K。（月食时的红外测量表明，当太阳光的照射停止后，表面温度会以每小时数百 K 的速度下降。用 1 cm 波长的微波观测到月亮表面的平均温度为 $240+40\cos\left(\omega t-\frac{1}{4}\pi\right)$K，其中 $\omega=2.46\times10^{-6}\ \mathrm{rad/s}$。定性解释(a) 为什么变化是余弦的；(b) 为什么幅度只有 40 K；(c) 为什么用微波波长测得的满月比视觉上的满月晚八分之一个月。

5. 电-热类比　欧姆损耗项 $\frac{1}{2}rI^2$ 是电缆中电荷不可逆扩散的时段对时段以及点对点的表示。用热传导的语言解释 $\frac{1}{2}rI^2$，把它与一些热力学的不可逆过程对应起来。

6. 当温度为 V 的单位长直棒吸收一定的热量 $\mathrm{d}q$ 时，增加的熵 $\mathrm{d}S$ 定义为

$$dS = \frac{dq}{V}。$$

我们确信整个直棒的熵随扩散的进行一定是稳定增加的，证明当温度从 $V_0(x)$ 变化到 $V_t(x)$ 时，熵的增加为

$$c\int \log \frac{V_t(x)}{V_0(x)} dx = c\int \log V_t(x) dx + 常数。$$

现在，根据电缆上电压的分布解释表达式 $\int \log V_t(x) dx$，把它与电气通信领域的一些随时间推移会增加的概念对应起来。

7. 圆柱扩散 穿过地球大气层的流星留下一个每米有 α 个电子和正离子的尾迹，尾迹以扩散系数 K 扩散。证明在尾迹通过点经过时刻 t 后，在距离流星尾迹上的点为 r 处每立方米的电子密度 N 为

$$N = \frac{\alpha}{4\pi Kt} e^{-r^2/4Kt}。$$

对频率为 f 的无线电波，如果每立方米含有 N 个电子的空气的折射率是

$$\left(1 - \frac{81N}{f^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

证明零折射率的表面是一个半径扩张为最大半径 $\frac{3\alpha^{\frac{1}{2}}}{f}$ 的柱面，并且在总时间 $\frac{6.2\alpha}{Kf^2}$ 后半径缩小到零。

8. 一个弱电离化的圆柱每单位长度分布着 α 个电子，在离轴 r 处的每单位面积的电子数是 $N(r)$。波长为 λ 的无线电波入射到圆柱上通常被部分地反射。证明由于圆柱的扩散，干扰使得回波功率减少的因子为

$$\left| \frac{1}{\alpha} \iint N(r) e^{i2kx} dS \right|^2,$$

其中 k 是传播常数 $\frac{2\pi}{\lambda}$，x 是在入射方向上与轴的距离，dS 是横截面的面积元。

9. 热-电类比 寻找一个与方程为 $\partial^3 V/\partial x^2 dt = V$ 的电气传输线类似的一维连续物理系统。

10. 半阶微分 证明进入一个直棒的热流与作用于一端的温度差的半阶微分成正比。

11. 球形扩散 你用一种老配方做了一些布丁，把它们放在布中悬挂起来以排干水分，直到它们变成每个重 1 kg 坚硬而均匀的球。日复一日地，你取出一个球放进经过预热的烤箱，每天增加烹调时间，直到有一天检查显示没有湿润的未烤熟的核。现在，你要做一个 10 kg 的布丁。烤箱也和前面的一样经过预热，解释为什么你会认为合适的烹调时间是 1 kg 时烹调时间的 5 倍。

12. 扩散 在一个长为 L 的水渠上有许多等间距为 d 的地方，在这些地方同时($t = 0$ 时刻)滴下量为 Q 的液体肥料，肥料通过渠中不流动的水迅速扩散。设 $V_t(x)$ 表示 t 时刻的肥料浓度，它是沿水渠距离 x 的函数，单位为公斤每米。

(a) 写出初始分布 $V_0(x)$ 的表达式。

(b) 到一定时间，浓度将变成近似均匀的。它将趋于的常数值是什么？

(c) 如果 $I_t(x)$ 是 t 时刻在横截面 x 处每秒流向 x 正方向的公斤数，那么方程 $\partial V_t(x)/\partial x = -\partial I_t(x)/\partial x$ 是否正确？

(d) 如果我们对初始分布 $V_0(x)$ 进行傅里叶分析，我们得到的波长是 d（空间频率是 $1/d$）的傅里叶分量的初始幅度是多少？检验你的单位，确保得到的幅度单位是千克每米。（你会发现对无限长的渠求解这个问题比较有利，它将给出相同的答案。）

(e) 我们考虑过去了一段较长时间，浓度不是十分均匀，但是我们想研究它是怎样的不均匀。写出 $V_t(x)$ 的近似表达式，定义你要引入的任何附加符号。

13. 正弦温度变化 在地面几英尺（1 英尺 = 0.304 8 米）下的土壤温度 $\theta(t)$ 用华氏度表示为：$\theta(t) = 60° + 10°\cos(\omega t - \pi/4)$，其中 $2\pi/\omega = 1$ 年，$t = 0$ 对应于仲夏。

(a) 试说明对应于温度的变化，同一深度的垂直热流 $I(t)$ 也是随时间正弦变化的。

(b) 假设 $I(t)$ 是正弦变化的，即 $I(t) = I_0\cos(\omega t + \alpha)$。推出相位角 α。

(c) 土壤表面的温度 $\theta_0(t)$ 显然是以天为周期变化的，它不是简单的 $A + B\cos(\omega t + \theta)$ 这种形式，其中 ω 的值与上面一样；考虑到这个事实，解释为什么由这种不规律的表面输入所激励的地面下的温度变化却趋于简单的以一年为周期的正弦形式。

14. 传输线模拟 描述一个服从一维扩散方程的一维连续机械系统。找出一个可能出现这种系统的例子。

15. 地面下的温度 在阳光明媚的日子里，土地表面的温度上升很快，在接近下午时达到最大值，在日落时很快地下降。解释为什么在 1 m 深的土壤中温度的变化本质上是以 24 h 为周期的正弦变化，并且它的峰-峰值间的变化要远小于地表面温度的最大值-最小值间的变化。作为典型值，我们取土壤密度 ρ 为 2 000 kg m^{-3}，比热 s 为 50 J kg^{-1}K^{-1}，热导率 k 为 30 Jm^{-1}s^{-1}K^{-1}。

第 19 章

动态功率谱

我们可以用傅里叶级数或谱表示诸如由麦克风产生的对应于一段音乐的复杂波形，可以说原始音乐段中的任何细微之处，即使是最简短的拨奏曲，也能被谱捕获，谱和波形完全等效。但是我们很难指出在谱中与拨弦相对应的特征；即使我们能发现这样一个特征，仅通过观察谱，也很难说在哪个时刻拨动了小提琴的弦。这是因为傅里叶级数系数是与时间无关的常数。如果只有功率谱，那么我们也不可能说出什么时间拨动了弦，因为功率谱与时间原点的选择无关；进一步，如果一些谐波与其它谐波在时间上互相调换，功率谱也不会变化。由此可得，时间信息一定包括在弦的自然频率(G 弦的自然频率是 196Hz) 附近的复系数的相位中。只有 196Hz 系数的相位还不够，因为相位与任意个自然周期的时移是一致的。

动态谱的概念

我们的耳朵装备了几千个具有不同规格尺寸的柔韧的微小单元，并用它们来有效地将声音分解到各个频率柜中，它们由一个锥形的流体动力学波导，耳蜗进行激励。但是，耳朵不是只进行傅里叶分析；当听音乐的时候，耳朵后面所进行的操作的作用是提取信息。所以，耳朵的频率分析滤波器柜不断地提供各自的变化的输出，由此我们可以建立起对最初产生声音动作的印象。耳朵可以有效地专注于一个短的连续时间间隔的信号。当需要高的频率分辨率时，比如一个小提琴家为了伴奏双簧管演奏者的标准 440Hz 而拉出一个长的音符时，耳朵自动地关注一个长的时间段。当需要高的时间分辨率时，比如对爆破音协调一致的辨识，耳朵的注意力可以变为关注一个短的时间段。这些变化可以随信号的流入自适应地进行。

音乐记号恰当地说明了听众对音调和持续期的感觉。高音调的音符在五线谱上也在高的地方，同时时间也是从左至右流过。动态谱图则继承了音符的这两个特性。

为了描述随时间变化的谱，牵涉到一个与量子力学的不确定性原理有关的频谱分辨率和时间分辨率之间的折衷问题。不确定性原理最初是由全息摄影之父 Dennis Gabor(1900 — 1979)(参见 Gabor, 1946) 提出的。好的频谱分辨率需要较长的时间片段；而好的时间分辨率

需要短的时间段,从而需要接受低的频率分辨率。

鸟声、语音(Rabiner and Schafer, 1978)以及各种地球物理现象的计算表达,通常已经使用了下面的方法,即首先把时间信号分成短的相等的时间段,然后对每一段使用傅里叶分析得到复系数。在时间轴的每一段上,垂直地堆叠一些单元来容纳分析后的系数(图 19.1)。根据不确定性关系,单元的高度(或带宽)与单元的宽度(或持续期)成反比;这样,单元的形状或纵横比对所有的计算表达都是一致的。然而,如果为了不模糊短暂的跃变而选择短的时间段,或相反地,为了得到更好的频率分辨率而选择更长的时间段,纵横比就会有所不同。在解释过测量和计算的技术并且给出一些动态谱的例子后,本章将涉及一些其它的时频平面分割方法。

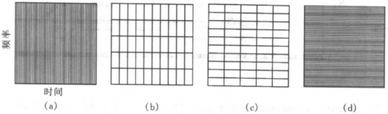


图 19.1 把时频平面分割成宽度为 Δt、高度为 Δf 的单元,单元的面积不能小于某个确定的极限。(a) 和 (d) 中的每个单元对应一个复数,(a) 是信号的时域采样而 (d) 是变换值。(b) 和 (c) 图示了具有不同单元高宽比的动态功率谱的结构

动态谱图

图 19.2 在时频平面上显示了一个动态功率谱,它是一个已经被记录下来的波形,因为太复杂而不能由眼睛解释。然而,耳朵可以听见滴答声(短持续期和宽频带的垂直条纹)的波形

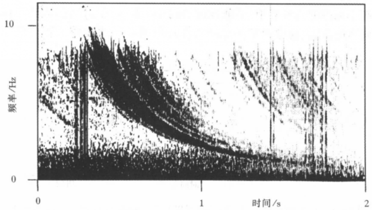


图 19.2 位于南极的 Palmer 站记录的甚低频频带内自然现象的动态功率谱,显示了电闪(垂直迹线)和呼啸声(曲线),它是在回到地球前经过几倍地球半径的传播后已经弥散的电闪信号。当只作为时间的函数时,就不能明显地看出原始波形记录中的许多物理上有意义的特性。Courtesy Jerry Yarbrough。

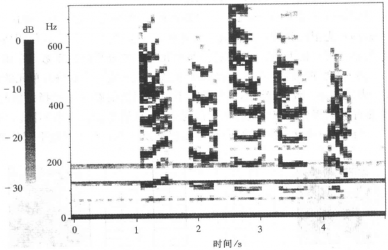


图 19.3 语音“bait beat bite boat boot”的音纹。元音是由大约三分之一秒的持续期刻画的且具有许多大强度的谐波。辅音比较短暂且带宽比较宽。可以看到，在 60，120，180 和 240Hz 有连续的嗡声，这说明幅度调制与语音有关。从一个元音到下一个元音时基频（约 100Hz）的下降和语调没有关系，它是元音本身的特征，如果注意倾听这是可以听见的。在泛音中，说话方式之间的频率下降是更值得注意的。如果仔细听的话，每一种说话方式内的频率变化决定着元音声，元音声用于识别说话者的口音。(Courtesy Jerry Yarbrough)

和降音调的长的快速变化。图 19.3 给出了一种语音的图形表达。地震图、从行星表面和地球来的雷达回波、心电图以及其它的时间信号都能用类似的方法来表达。在所有情况下，可视化的分析都激起了对物理原因的思考。这样的动态谱可以用按图 19.4 中所示原理工作的仪器得到。被分析的信号波形 $s(t)$ 首先被放大，然后分为 N 路，同样的 $s(t)$ 通过由 N 个带通滤波器组成的涵盖整个频率范围的滤波器柜。带通滤波器的中心频率为 f_j，它们是等间隔的而且所有的滤波器具有同样的带宽，就像紧靠频率轴的左边所画出的滤波器特性一样。随着时间的推

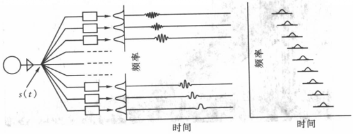


图 19.4 信号源 $s(t)$，放大器，功分器以及中心频率为 f_j 的一组带通滤波器的输出 $r_j(t)$。滤波器的传输函数 $H_j(f)$ 示于频率轴的左边，所有的传输函数具有相同的形状；滤波器冲激响应是 $h_j(t)$。右边的动态功率谱是对带通滤波器的输出进行整流和低通滤波得到的。平方律整流将得到动态功率谱在点 (t,f_j) 处的值

移，每一个滤波器的输出都在本滤波器相应的中心频率附近振荡，幅度和相位随时间的变化与本滤波器带内的信号内容一致。每个输出信号都被整流和平滑，结果显示在图的右边，最后对结果进行记录。实际上，动态谱像胶卷上的底片黑度一样被记录下来，或者像屏幕上的亮度分布一样被表示出来，或者数字地记录下来。自然地，有种种方法可以实现这一步，而且有几种可以使用的商业仪器。到 20 世纪 50 年代，有两类有代表性的模拟仪器，一种是 Kay Electric Sonograph，它可以扫描从 85Hz ～ 8kHz 的一个可调滤波器；另一种是 Raytheon Rayspan，它用一组滤波器（共 420 个）跨越了最大可以达到 50kHz 的范围内的任意 10kHz 的带宽。厂商提出了可比带宽（大约 40Hz）和可分辨时间（10ms）。整流和平滑的步骤意味着不保留相位信息。

图 19.2 显示的是动态谱图的常见例子，通过用 15kHz 的采样率对一个信号数字化，然后再用计算机处理就可以得到它。分辨率与最初的模拟仪器相近。动态功率谱早已是许多研究的重要工具，比如电离层和磁气圈的研究（Helliwell，1905），语音分析（Flanagan and Cherry，1969），音乐（Pierce，1983），鸟声，蝙蝠叫声，海洋哺乳动物的叫声和其它水下声音等的研究。

图 19.5 的人造信号例子阐明了动态谱分析的一些定量特性。图的底部是信号波形，它的

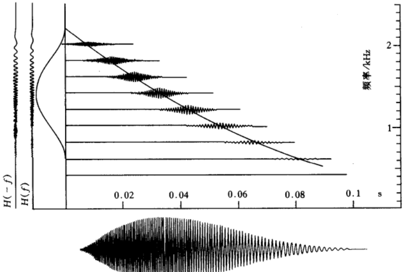


图 19.5 信号波形（下）以及阐述频分方法的一组滤波器的响应。左边的光滑曲线是整个的信号功率谱。穿过几个滤波器响应的曲线表示的是计算的瞬时频率

强度先增大后减小，持续期为 0.1 s。直观感觉，信号的频率随时间明显下降，在图中可以看到，随着时间的推移波形的峰 - 峰间隔逐渐增大。信号的表达式为 $E(t)\cos\left[2\pi\left(\alpha t+\frac{1}{2}\beta t^2+\frac{1}{3}\gamma t^3\right)\right]$，其中 $E(t)$ 是上升和下降的包络，而 $\alpha = 2\,200$ Hz 是 $t=0$ 时刻的初始频率。通过求相位 $\alpha t+\frac{1}{2}\beta t^2+\frac{1}{3}\gamma t^3$（用周期测量）对 t 的导数，我们可以得到瞬时频率为 $f_{inst}=\alpha+\beta t+\gamma t^2$。图中使用 $\beta=-27\,500\text{Hzs}^{-1}$ 作为漂移速率。包括 $\gamma=95\,000\text{Hzs}^{-2}$ 的项给漂移引入一定的曲度，正如 f_{inst} 对时间的下降曲线所证实的那样。

沿频率轴(频率范围大约在 500Hz ～ 2200Hz 之间)所画的是信号的功率谱,它稍微有点歪,正如前面提到的,功率谱不能反映信号的漂移特性。如果还可以利用谱的相位,或者如图中左边所示的 Hartley 变换 $H(f)$,那么就有可能对其求逆变换。

每个滤波器具有相等的 100Hz 带宽;因此,滤波器输出的包络都具有相同的等效宽度(0.01s)。我们可以看到载波频率与从频率轴读出的中心频率一致。为了演示的目的,中心频率的间隔取 200Hz,是带宽的 2 倍,但是中心频率间隔取为一个带宽要更实用一些。使用比带宽窄的间隔将有冗余,但可以增强如图 19.2 中的灰度表示。

计算动态功率谱

有两种方法可用来计算诸如图 19.4 中右边图形的那些值:频分和时分。我们首先处理频分,并有图作例证。

频分　频分意味着输入信号同时(或顺序地)通过一连串的如图 19.4 中的方框所示的带通滤波器。中心频率覆盖从 $f_{\min}$ 到 $f_{\max}$ 的范围,它可以是图中所示的均匀间隔,也可以使用频率的对数($\log f$)是均匀的频率间隔,它具有生物学意义。

设第 j 个滤波器的中心频率为 f_j。根据不同的情况,滤波器的带宽通常可以等于、大于或小于频率间隔。如果使用均匀间隔的频率,那么滤波器带宽与频率无关;每一个这样的恒定带宽滤波器的冲激响应是在其频带中心频率附近的振荡,并被调制了一个对所有频率都具有相同持续期的包络信号。如果我们使用的是对数频率($\log f$)的均匀间隔,而不是频率 f 的均匀间隔,那么用赫兹度量的带宽将与 f_j 成比例增加。每一个相应的常-Q 滤波器的冲激响应在中心频率 f_j 附近振荡,但对较高的频率来说持续期较短。对每一个滤波器来说,包络下的振荡周期数都是一样的,实际上冲激响应是相同的,但是在时间上压缩了一个正比于中心频率的因子。在图 19.4 中,如果输入信号是一个冲激,而不是流畅的音调,那么不同的响应将排成一条线,这是因为所有的滤波器都在同一时间受到激励。显然,图中的输入信号是一个降调的汽笛声。

一个冲激响应为 $h(t)$ 的模拟滤波器,它的响应为 $r(t) = s(t) * h(t)$。为了计算响应,我们对输入信号 $s(t)$ 进行采样,采样率为 f_{samp},然后对采样信号 s_i 进行计算。于是 $s_i = s(i/f_{samp})$,其中 $i = 1,2,3,\ldots$。用具有相同采样间隔($1/f_{samp}$)的 $h(t)$ 的离散值 h_i 表示滤波器。那么滤波器的输出响应$\{r_i\}$的离散值是$\{r_i\} = \sum_k s_{i-k}h_k = \{s_i\} * \{h_i\}$。卷积求和增加了系数的个数,可能是 20 个或者 30 个,这与描述滤波器所需要的系数个数有关。

这看起来很简单,但需要考虑一些实际问题。假设 $f_{samp} = 15$ kHz,那么理论上可以采样最高频率为 7.5 kHz 的信号,但是由于噪声的存在,每周期两个采样点就不够了。因此,或许我们能够得到可靠结果并能谨慎测试其实际物理信号性能的最高频率为 4 kHz。但现在,假设 $s(t)$ 包含有 8 ～ 10 kHz 范围的频率分量,这或许是由在频率上等间隔的谐波(它对语音识别和音乐欣赏来说是必要的)引起的,也可能是由多余的噪声或干扰引起的。但是,15 kHz 的采样率不能辨别 7 kHz ～ 5 kHz(混叠)范围信号分量的采样。因此,获取数字数据的模拟器件需要保证滤除输入中超过 1/2 采样频率的频率分量。

当其中一个因子项数较少时,比方说不大于 30,如本例中的$\{h_i\}$,通过求和可以快速地计算卷积。但是,采样间隔的选择会引起一个实际的问题。如果不同滤波器的冲激响应$\{h_i\}$不同,那么,对较低的 f_j 的值,以 $1/f_{samp}$ 为采样间隔的系数个数要比足以描述那些滤波器冲激响应

所需的系数个数多一或两个数量级。应该避免存储不必要数据的开销。常-Q滤波器不存在这个问题。

求卷积的另一种方法是取信号的傅里叶变换或哈特利变换，补充足够的零，依次乘以每个滤波器的传输函数，再取逆变换。这种方法可以得到与时域卷积严格相同的结果；计算方法的选择依赖具体情况，或许考虑的是计算速度，或许考虑的是计算机容量。正如我们所看到的，15 kHz 的采样率只能在最高频率 6 kHz 的低保真情况下较好地使用，这时 5 秒的记录就意味着有 75 000 个采样点，这就使得在某些情况下通过变换的方法计算卷积变得不太现实。因此要引入时分的方法。

时分 我们可以把信号分成时间段而不是把信号分成许多频带；图 19.6 给出了两个这样的时间片段，它们的时间中心分别位于 $t_i = 0.03$ s 和 0.07 s。当我们使用 $h(t)$ 或时间窗的等效宽度来度量时，其持续期为 0.01 s。虽然我们可以使用边缘陡峭的片段，就像在图 19.4 中使用边缘陡峭的滤波器一样，但使用高斯形状更好一些。两个片段中的前一片段的表达式为

$$f(t) = s(t)\mathrm{e}^{-\pi[(t-0.03)/W]^2}$$

其中 $W = 0.01$ s。计算这一段的变换，然后移动 $W/2$，计算新的变换，等等，直到计算完所有的信号。因为所有的变换具有同样的长度，所以这种计算方法比较方便。

作为一个例子，如果 $f_{samp} = 15$ kHz，那么 350 个采样点足以描述宽度为 $2W$ 的 $f(t)$。在每段的边上，高斯因子比它的峰值低 27 dB，在很多情况下，它足以公平地对待信噪比。图中给出的跨度为 0.02 s，而且用眼睛就可以看见截断。如果我们把跨度加宽到 $2.4W$，包络将下降到 40 dB，而且将有 420 个采样点。这显然更为实用，在频率分辨率允许的情况下，它有更宽的时间片段和更大的频率变换的余地。

图 19.6 中所示的时间段的傅里叶变换只使用了功率谱，这意味着相位信息被丢弃了。动态相位谱也是存在的，而且在一些应用中很有价值。

表示 在动态功率谱的值计算完毕并存储以后，需要选择一种表示方式，包括使用具有不同可视密度的点的灰度示意图、等值线图，以及打印输出数据矩阵等。使用灰度谱图，我们能够通过在密度和计算值之间选择合适的函数关系来加强期望的特性，可以设置门限值，扩大动态范围，加上辅助的颜色（伪彩色）等。

等价定理

我们可以用时分的方法在 f_j 频率段上计算出 t_i 时间段的傅里叶变换的幅度和相位，把它记为 $G(t_i, f_j)$。这个幅度和相位与用一个中心频率为 f_j 的滤波器在 t_i 时刻所计算的幅度和相位一致吗？显然，答案与滤波器的带宽有关。滤波器的带宽应当是这样的，它的冲激响应包络与控制以 t_i 时刻为中心的片段宽窄的乘性因子一致。把带宽变窄将使响应在时间上展宽并且减少了 $t = t_i$ 时刻的功率。

按照频分，设 f_j 处的滤波器对信号 $s(t)$ 的响应为 $r_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t')h_j(t-t')\mathrm{d}t'$，其中 $h_j(t)$ 是第 j 个滤波器的冲激响应；这个滤波器的传输函数 $H_j(f)$ 是它的冲激响应的傅里叶变换，表示为 $H_j(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h_j(t)\exp(-\mathrm{i}2\pi ft)\mathrm{d}t$。在时分方法中，我们用一个中心在 $t = t_i$ 的移位的时

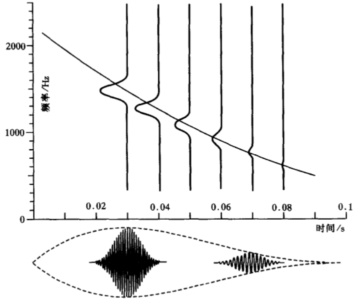


图 19.6 为了阐述时分，通过乘以高斯函数 $\exp[-\pi(t-\tau)^2/W^2]$ 取早先信号（虚线轮廓）的两段，其中等效宽度 $W=0.01$ s，$\tau=0.03$ 和 0.07 s。图中绘制了对频率的六段功率谱（粗曲线）

间函数 $w(t-t_i)$ 与信号 $s(t)$ 相乘，再做傅里叶变换。然后问，对相同的索引对 (i,j) 在 $f=f_j$ 处的变换值是否与 $r_j(\tau)$ 的幅度和相位有关系。傅里叶变换的值是 $\int_{-\infty}^{\infty}s(t)w(t-t_i)\exp(-i2\pi f_j t)\mathrm{d}t$，所以，如果 $h_j(t_i-t)=w(t-t_i)\exp(-i2\pi f_j t)$，那么这两个表示是等价的。这样：

$$r_j(t)=\mathrm{e}^{-i2\pi ft}\int_{-\infty}^{\infty}S(f')H_j(f'-f)\mathrm{e}^{i2\pi f't}\mathrm{d}f'=\int_{-\infty}^{\infty}s(t')w(t'-t)\mathrm{e}^{-i2\pi ft'}\mathrm{d}t'。$$

由于 $H_j(f)$ 的形式为 $H_0(f)*\delta(f-f_j)$，$f>0$，那么 $H_j(f)$ 的逆傅里叶变换 $h_j(t)$ 的形式确实为 $w(t)\exp(-i2\pi f_j t)$，而且当乘性因子 $w(t)$ 的选择与滤波器冲激响应的包络一致时，就得到相同的结果。

如果通带 $H_j(f)$ 是由 $\exp[\pi(f-f_j)^2/W_f^2]$ 所描述的高斯形式，那么动态功率谱的值将与在时分方法中，当时间窗 $w(t)$ 也是高斯的且等效宽度 W 是 W_f 的倒数时所得的结果是一致的。当用 $W=0.01$ s 时，相应的滤波器带宽 W_f 将为 100 Hz，正如图 19.5 实际使用的一样。

包络和相位

在滤波器的响应 $r_j(t)$ 确定以后，在与图 19.4 有关的描述中，一定能够得到它的包络（以及相位，如果需要的话）。用二极管整流和用低通滤波器平滑都很容易在计算机中仿真。计算功率谱的一个粗略的过程是对响应平方，移位半个周期，再相加；这个估计是 $[r_j(t)]^2+[r_j(t+1/4f_j)]^2$。

更好的办法是通过取响应的希尔伯特变换(第 13 章)来确定瞬时包络和相位。虽然图19.4所示的是一组 j 个离散滤波器,对图 19.6 的说明也假设 j 是离散的,但事实上,我们可以认为 j 是连续变化的,而且最初的声谱仪的确就是连续扫频的。这样,$r_j(t)$ 可以用第 j 个滤波器的冲激响应 $h_j(t)$ 定义为

$$r_j(t) = h_j(t) * s(t) = [e^{-\pi(t/W)^2}\cos 2\pi f_j t] * s(t),$$

其中,t 和 f_j 被看作连续变化的而且用冲激响应 $h_j(t)$ 代替了冲激序列 $\{h_j\}$。对任意的 t 和 f_j,$r_j(t)$ 有一个瞬时包络 $G(t,f_j)$ 和瞬时相位 $\phi(t,f_j)$,这样 $r_j(t) = \mathrm{Re}\{G(t,f_j)e^{i[\phi(t,f_j)+\omega t]}\}$。我们称 $Ge^{i\phi}$ 为 Gabor 动态谱,因为在 t 和 f_j 的离散值上计算的结果和与之对应的时频单元上谱的复系数是相同的。使用此种符号,动态功率谱为$[G(t,f_j)]^2$。

虽然相位中有更多的信息,但相位不像功率谱那样容易表示和解释。一种方法是不用平滑,直接从$[r_j(t)]^2$ 建立一个半色调显示。图形将得到类似全息图的稀疏的边缘,通过 $r_j(t)$ 的过零点的准平行的等相线。

设 r_j 只在 t 等于 $m\Delta t$ 的离散数值上计算,其中 Δt 是 Gabor 单元的宽度,设 j 的值与频率的关系为 $f = nj\Delta f$,其中 Δf 是相应于 Δt 的临界单元高度,并且把单元的复 Gabor 系数记为 a_{mn}。Gabor 认为信号 $s(t)$ 可用这些系数表示如下

$$s(t) = \sum_m \sum_n a_{mn} e^{-(t-m\Delta t)^2/W^2} e^{i2\pi n t\Delta f};$$

要得到一个精确的结果,m 和 n 必须是小于 1 的分数(Bastiaans,1994)。

很多文献都起源于 Gabor(1946) 的论文;参见 Boashash(1988) 和 Cohen(1989),以及 Gabor 和其后作者的 SCI。

用 log$f$ 代替 f

现在,我们回过头来讨论(t,f)平面的非均匀分割,首先考虑在垂直轴上用 log$f$ 代替 f 的例子。实际上,自动钢琴和它之前的音乐盒就用了与此相同的坐标系统。基于频分的方法,为了生成这种动态功率谱,需要一组常-Q 滤波器,它们的冲激响应为

$$h_j(t) = e^{-\pi t^2/T^2}\cos 2\pi f_j t,$$

其中,等效宽度 T 与信道中心频率 f_j 成反比,这样 $T = k/f_j$。选择 $k = 2$;从而在频率 f_j 上的信号在时间 T 内正好有两个周期。图 19.7 的左边给出了一组频率 $f_j = 500, 707, 1\,000, 1\,414, 2\,000$Hz 的冲激响应。现在,由于每个冲激响应的持续期与频率 f_j 成反比,所以当时间分辨率得到改善时频率分辨率就会变差。当用与图 19.5 中相同的信号时,这些滤波器的响应 $r_j(t)$ 如图所示。

在 500 Hz 信道上,冲激响应 $h_{500}(t)$ 具有相对长的持续期,或许 10 ms,而响应 $r_{500}(t)$ 持续约 30 ms。在 2 000 Hz 信道上,冲激响应为 500 Hz 处的 1/4,相应地增加了时间分辨率;然而,响应 $r_{2000}(t)$ 并不比 $r_{500}(t)$ 短,大约持续 40 ms,这是因为降低频率分辨率伴随着增加时间分辨率。由于信号通过了一个滤波器 $H_{2000}(f)$,其频率响应比较宽,所以输出响应在时间上展宽了。

值得注意的是,$r_{2000}(t)$ 的响应峰值的时刻比信号的瞬时频率通过以 2 000 Hz 为中心频率的滤波器的时刻要晚。相反地,如果我们聚焦于时间,在某时刻所达到的最大响应的频率小于

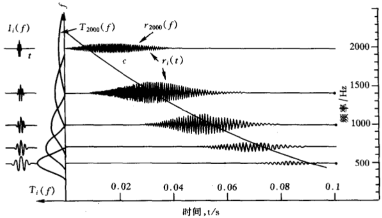


图 19.7　中心频率为 f_j 的一组常Q滤波器的响应,滤波器的带宽以频率比$\sqrt{2}$成几何级数增长。左边:滤波器的冲激响应 $h_j(t)$ 和它们的传输函数 $H_j(f)$。主图是对一个降调的响应 $r_j(t)$,降调的频率下降如曲线 C 所示

此时刻的瞬时频率。这一显著的影响是带宽-持续期不等式所固有的不确定性的直接后果。为了形象地理解这一点,想象一个斜双变量正态概率分布(Skewnormal bivariate probability distribution)。有一条与恒定概率密度 $p(x,y)$ 的同心椭圆轨迹的主轴相一致的脊线,它类似与我们的瞬时频率轨迹。y 对 x 的回归线与 x 对 y 的回归线类似于峰值时间对频率和峰值频率对时间的关系。

在一些应用(诸如线性调频脉冲雷达)中,都试图确定瞬时频率和频率漂移率以达到比带宽-持续期不等式所允许的更好的精度,例如可以通过检测过零点。对由电子方式生成的线性调频脉冲可以成功地做到这一点,但是如果预先不知道信号的特征(如观测地球物理研究),那么当对一个比线性调频更复杂的信号应用过零技术时,就会呈现固有的不确定性。

小波变换

一些具体的文献(Grossman and Morlet, 1984; Kronland-Martinet, 1987; Mallat, 1989; Strang, 1989; Daubechies, 1991; Sheng, 1996)使用称为小波的常 Q 滤波器进行动态功率谱分析。下面给出了小波的明确意义。为了代替我们通过用各种冲激响应和信号 $s(t)$ 卷积得到的响应集

$$r_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_j(t-t')s(t')\mathrm{d}t' = h_j(t) * s_j(t),$$

考虑由

$$h\left(\frac{t}{\log 2\pi f_j}\right) * s(t)$$

生成的不同的集合。在这种形式中,冲激响应随 f_j 变化,但仅只是简单改变一个事先选择的基本小波 $h(t)$ 的时间轴上的伸缩。基本小波可以是高斯波包,但不是必须的。所选的基本小波在

时间上和频率上应当是紧凑的。如果选择的 $h(t)$ 是一个平方可积函数(这样,它在两个方向上逐渐消失)并且具有零均值(频率成分不包括直流),就可以满足这两个条件。由伸缩得到的冲激响应称为小波。

使用滤波器柜自然地分开编码信号的频带要求采样率能根据频带中心变化,这就导致了“子带编码”(参见 Vetterli,1984),这种技术源于 Kretzmer(1946)的著作。术语“小波”已代替了这种概念早期的各种表达。

使用常用的符号,小波变换可以写作

$$\Phi(a,b)=\frac{1}{|a|^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}h\left(\frac{t-b}{a}\right)s(t)\mathrm{d}t$$

数量 b 具有时间的量纲,它表示时间的平移,而尺度因子 a,定义为 $-\log 2\pi f_j$,也具有时间的量纲,表示时间的伸缩。归一化因子 $|a|^{-1/2}$ 对伸缩进行补偿使得所有的小波具有相同的能量。随着频率的增加,a 变得越来越负,所以相应的频率轴是指向下,而不是指向上的。$\Phi(a,b)$ 的定义用的是互相关而不是卷积积分,如果 $h(\ )$ 是一个偶函数,那么这个差别将不是什么问题。不过正如上面做的,也可以通过直接使用 f_j 而不是 a 用卷积引入小波变换。

小波变换是一个高度振荡实体,而且如果经过整流并直接显示一个浓淡点图,图像将呈现上面讨论的与相位有关的条纹状。当然,小波变换也可以整形后再平滑并且用与图 19.2 相同的方式表示。主要的不同之处在于滤波器带宽随着 $|a|$ 的增加加宽。如果 $h(t)$ 选择的是高斯波包,如图 19.7,那么这就是惟一的差别。正如上面所解释的,如果我们选择 (a,b) 在平面作图,图将是颠倒的并且在垂直方向上被非线性压缩了,从而线性的频率漂移表现为曲线形式的漂移。

虽然,术语小波最初只是简单地意味着常-Q 滤波器与 Gabor 所讨论的常带宽滤波器的区别,但很快就发现了几个意义更广的数学优点。另一方面,正如 Gabor 所指出的,高斯基本信号是不正交的。这个缺点已经通过基本小波的自由选取克服了。

小波变换的可逆性在数据压缩(尤其是图像压缩)中很重要。当一个波形用时频平面上的单元表示时,在传输之前,通过省略掉具有较少内容的单元,或者通过门限编码,显然都可以把数据压缩到一定的范围。子带编码实际上是省略超过某个分解标准的分量,原有的 8×8 块 DCT 编码的 JPEG4 图形传输协议已被一种基于小波理论的 8×8 新方法所取代。这样,通过对时频平面上的动态功率谱进行可视化解释,它的应用范围已经超出了简单表达复杂波形的范畴。虽然如此,基于高斯基本信号的简单表示将继续得到广泛使用,比如使用空间可变单元形状,chirplets,以及能够局部自适应于所遇信号且能够看清楚已经被模糊了的细小结构的算法。

自适应的单元位置

使用常-Q 滤波器的主要目的是在高频处增加时间分辨率,在降调哨声和消除频率漂移的例子中,在提高低频处的频率分辨率的同时提高高频处的时间分辨率将会得到更好的表达。到目前为止所描述的两个方案,在单元的形状和位置上都没有考虑信号的特点,不允许单元形状在 (t,f) 平面上进行局部构造。但是没有理由不让单元形状与时间和频率都有关。我们可以在一个临时的动态谱图上建立一种单元形状对单元位置的详细说明。当然,用形状变化的单元铺满平面可能不必没有重叠或缝隙;然而,允许单元重叠是没有坏处的,就像用比需要的更多的

滤波器来改善表达一样，虽然没有增加什么信息。

基本线性调频信号(Chirplets)

我们知道，在符合一个较低的面积限制的条件下，(t,f) 平面上的基本单元可以有任意的高度和宽度，而且纵横比允许随频率变化。当达到或接近最低限制时，正如 Gabor 所定义的，存在一个基本信号，它就是分析滤波器的冲激响应。如果要被分析的信号就是基本信号，单元的纵横比就可以随时间变化，这就使得不能观测时变信号的滤波器，可以象耳朵一样自适应地处理输入信号。

为了利用计算上的灵活性，我们首先用固定时间和频率分辨率进行分析。在有垂直条纹结构的地方，可以用更好的时间分辨率重新分析，在频率相关性小的方向上牺牲频率分辨率。相反，水平条纹的面积可以用更好的频率分辨率重新分析，而倾斜的结构需要 Chirplets。

图 19.2 所示的是一种自然现象的动态谱，具有多个不同强度的降调信号，它们具有几乎相同的形状但是由很短的时延分开，在先前的信号没有消失前就收到了新的信号分量。在低频处，相邻的分量看起来合并在一起了；在高频处呈现的结构还没有混在一起但用一般的方法已无法分开，我们如何能把它们分开呢?图 19.8 考虑了两个时间相隔 1 秒的简单的降调信号，横跨两条瞬时频率轨迹的正方形单元表明，Δf 和 Δt 的选择不能分解开这两个分量。其它的两个长方形表示具有相同面积的其它基本信号，这两个长方形说明不管是使滤波器带宽更窄(右下)或更宽(左上)，都不能分开这两个信号，然而，如果时频平面能被分割成倾斜的单元，如图中所示的中心位于较早发生的分量上的倾斜单元，那么这两个分量就可以被分开。为了做到这一点，我们要求滤波器具有如下形式的冲激响应

$$T^{-1}e^{-\pi(t-T)^2}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left[2\pi\left(ft+\frac{1}{2}\beta t^2\right)\right],$$

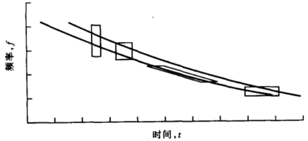


图 19.8 正方形单元以及水平(右)或垂直(左)拉长的单元均不能分辨间隔很短的两个降调信号，如图中所示单元跨过了两个频率轨迹。同样面积的倾斜的单元能够在垂直于轨迹的方向上分辨出两个轨迹

其中，频率漂移率 β(本例中是负的)的选择与所期望的倾斜度一致。Gabor 所不知道的这个新的基本信号称为 Chirplet，大约在同一时间由 Mihovilovic 与 Bracewell(1991，1992)和 Mann 与 Haykin(1992)分别独立提出；Chirplet 在时频平面上占用最小的面积。对这两个降调信号计算动态谱证明，使用 Chirplets 可以分解细小的结构。结果还证明，在任意给定的时间段内，当两

个频率的信号同时出现在一个长方形单元时，将会有调制滤波器的时间响应强度的差频出现。在图 19.2 中可以看见几处这样的差频，这表明它们实际上是几个简单分量的合成。对任何记录的复杂波形，自适应 Chirplet 分析都被期望在实际研究中发挥重要作用。

维格纳(Wigner)分布

在对一维时间函数 $f(t)$ 进行操作以便在时频平面上建立一种二维表达的各种方法中，维格纳过程是最早的一种。令对应于 $f(t)$ 的实值维格纳分布 $W(t,f)$ 为

$$W(t,f)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t+\frac{1}{2}\tau)f^{*}(t-\frac{1}{2}\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau。$$

可以很容易建立一些例子。这样在 $t=T$ 处的单位冲激 $\delta(t-T)$，它的维格纳分布是 (t,f) 平面上 $t=T$ 处的一条垂直线。它本身可以写作 $\delta(t-T)$，现在它是两个变量 t 和 f 的函数，但是与 f 无关。除了 Wigner 分布是完全不模糊的以外，嘀答声的 Gabor 图看起来与灰度图是一样的，这是 Gabor 图和各种小波变换的特点，这个现象与不确定性原理有关。

第二个例子，取一个恒定幅度的线性调频信号，它在 $t=0$ 时的频率是 f_0 且随时间以速率 $\beta\mathrm{Hzs}^{-1}$ 增加，所以瞬时频率为 $f_0+\beta t$。$f(t)=\exp\left[\mathrm{i}2\pi\left(\frac{1}{2}\beta t^2+f_0t-c\right)\right]$ 的维格纳分布是 $\delta(\beta t+f_0-f)$，这个分布集中在直线 $f=f_0+\beta t$ 上。这与我们稳定地旋转信号发生器的频率旋钮时所产生的理想图画出奇地一致。然而，由不确定原理所决定的分辨率限制的事实，将不可能为一对降调信号 $f(t)+f(t-\Delta t)$ 提供一个和具有高斯幅度包络的单个降调信号同样清晰的维格纳分布。

第三个例子，一个频率为 f_0 的余弦波 $f(t)=\cos 2\pi f_0 t$，在 Gabor 图上，它将呈现为在 $f=f_0$ 处的水平带，它的维格纳分布为 $\frac{1}{4}\delta(f+f_0)+\frac{1}{4}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}\delta(f)\cos 4\pi f_0 t$，除了 $f=\pm f_0$ 的水平线以外，出现了一个交叉项，即在 $f=0$ 处的一条直线。随时间的推移，它的强度以 $\frac{1}{2}f_0$ 为周期变化。此交叉项是由定义引起的数学结果，并且不具有在 $f=\pm f_0$ 处的稳定线的直观感觉。

最后，考虑 $f(t)=\delta(t-1)+\delta(t-5)$，它的维格纳分布为 $\delta(t-1)+\delta(t-5)+2\delta(t-3)\cos 8\pi f$。每一个冲激都有一条水平线，但是额外的在平均时间 $t=3$ 处还有一条，并且它在 f(频率)方向被调制。

对于由许多部分组成的复杂信号，如语音波形，维格纳分布不能够像 Gabor 图那样作出形象的解释。

维格纳分布很容易求逆；给定 $W(t,f)$，我们可以得到原始信号为

$$f(t)=\frac{1}{f^{*}(0)}\int_{-\infty}^{\infty} W(\frac{1}{2}t,f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi ft}\mathrm{d}f。$$

进一步，向下投影到时间轴上，得

$$|f(t)|^2=\int_{-\infty}^{\infty} W(t,f)\mathrm{d}f$$

同时，水平投影到频率轴得到功率谱

$$| F(f) |^2 = \int_{-\infty}^{\infty} W(t,f)\mathrm{d}t。$$

$f(t)$ 的总能量等于维格纳分布下的容积

$$\int_{-\infty}^{\infty} | f(t) |^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W(t,f)\mathrm{d}t\mathrm{d}f$$

维格纳分布在光学方面很有用，它被认为是研究现有系统的工具。信号 $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(\ )$ 的维格纳分布是 $W(-f,t)$，它与把分布 $W(t,f)$ 旋转 90° 所得的结果是一样的。在缓变型光纤中(第13章)，输入孔径中的空间场分布在距离 L 上转换成它的傅里叶变换(L 可以通过横截面中的折射率分布来计算)。从输入到 L/a 的中间位置上，场可以表示为孔径分布的 a 阶分数傅里叶变换。Lohmann(1993) 描述了一个与 Weigner 分布旋转 90°/a 的直接联系，Ozaktas 等(1993) 涉及了与小波，线性调频变换，以及光衍射的进一步的联系。

参考书目

Bastiaans, M. J.: "Oversampling in Gabor's Expansion by an Integer Factor," Proc. IEEE-SP International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis, Philadelphia, Pennsylvania, USA, October 25-28, 1994.

Boashash, B.: "Time-Frequency Signal Analysis and Synthesis," SPIE vol. 975, pp. 164-185, 1989.

Cohen, L.: "Time-frequency Distributions—A Review," *Proc. IEEE*, vol. 77, pp. 941-981, 1989.

Daubechies, I.: "The Wavelet Transform: A Method for Time-Frequency Localization," pp. 366-417 in "Advances in Spectrum Analysis and Array Processing," vol. 1, S. Haykin, ed., 1991.

Flanagan, J. L., and L. Cherry: "Excitation of Vocal-Tract Synthesizers," *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 45, pp. 764-769, 1969.

Gabor, D.: "Theory of Communication," *J. I. E. E.*, vol. 93, Part III, pp. 429-444, 1946.

Grossman, A., and J. Morlet: "Decomposition of Hardy Functions into Square-Integrable Wavelets of Constant Shape," *SIAM J. Math. Anal.*, *vol.* 15, pp. 723-736, 1984.

Helliwell, R. A.: "Whistlers and Related Ionospheric Phenomena," Stanford University Press, 1965.

Kretzmer, E. R.: "Reduced-alphabet Representation of Television Signals," *IRE Conv. Rec.*, vol. 4, pp. 140-147, 1956.

Kronland-Martinet, R., J. Morlet, and A. Grossman: "Analysis of Sound Patterns Through Wavelet Transforms," *Intl. J. Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, vol. 1, pp. 97-126, 1987.

Lohmann, A. W.: "Image Rotation, Wigner Rotation, and the Fractional Fourier Transform," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 10, pp. 2181-2186, 1993.

Mallat, S.: "A Theory for Multi-resolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation," *IEEE Trans. Patt. Anal. Machine Intell.*, vol. 7, pp. 674 - 693, 1989.

Mann, S., and S. Haykin: "'Chirplets' and 'Warblets': Novel Time-frequency Methods," *Electronics Letters*, vol. 28, no. 2, pp. 114-116, 1992.

Mihovilovic, D., and R. N. Bracewell: "Chirplet Analysis of Dynamic Spectra," *Electronics Letters*, vol. 27, pp. 1159-1161, 1991.
Mihovilovic, D., and R. N. Bracewell: "Whistler Analysis in the Time-Frequency Plane Using Chirplets," *Journal of Geophysical Research*, vol. 97, pp. 17199-17204, 1992.
Ozaktas, H. M., B. Barshan, D. Mendlovic, and L. Onural: "Convolution, Filtering, and Multiplexing in Fractional Fourier Domains and Their Relation to Chirp and Wavelet Transforms," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 11, pp. 547-559, 1994.
Pierce, J. R.: "The Science of Musical Sound," Scientific American Library, New York, 1983.
Qian, S., and D. Chen: "Joint Time-frequency Analysis: Methods and Applications," Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.
Rabiner, L. R., and R. W. Schafer: "Digital Processing of Speech Signals," Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1978.
Sheng, Y.: "Wavelet Transform," pp. 747-827 in "The Transforms and Applications Handbook," A. D. Poularikas, ed., CRC Press/IEEE Press, Boca Raton, Florida, 1996.
Strang, G.: "Wavelets and Dilation Equations: A Brief Introduction," *SIAM Review*, vol. 31, pp. 614-627, 1989.
Vetterli, M.: "Multi-dimensional Subband Coding," *Signal Processing*, vol. 6, pp. 97-112, 1984.

习题

1. 小波定义 一个基本小波 $h(t)$ 的傅里叶变换为 $H(f)$。(a) 证明 $|a|^{-1/2}h[(t-b)/a]$ 的傅里叶变换与 $H(f)$ 具有同样的能量。(b) 另一方面，如果从基本小波构造的小波为 $|a|^{-1}h[(t-b)/a]$，证明在 $f=0$ 时所有的傅里叶变换都有同样的值。

2. 尺度函数 函数 $\phi(x)$ 满足如下的展开式

$$\phi(x)=c_0\phi(2x)+c_1\phi(2x-1)+c_2\phi(2x-2)+c_3\phi(2x-3)+\ldots,k=0,1,2,3,\ldots,$$

这说明 $\phi(x)$ 能够分解为压缩函数 $\phi(2x)$ 的一个有限的移位拷贝序列。容许的移位是 $\frac{1}{2}k$，即，$0,\frac{1}{2},1,1\frac{1}{2},\ldots$，系数 c_k 可以是任意的。(a) 证明 $\Lambda(x-1)$ 满足该展开式并给出系数 c_k。(b) 如果 $\Lambda(x-1)$ 用间隔 $\Delta x=\frac{1}{2}$ 的采样点表示，即用{0 1 2 1 0}来表示，该展开式还成立吗？(c) 对用 $\phi(x)=\Pi(x)\mathrm{sgn}(-x)$ 定义的 Haar 小波，该展开式成立吗？

3. 滑动汽笛声 一个声音持续 1 秒钟，期间幅度先上升再下降，同时音调从 200 Hz 升高到 400 Hz 然后下降。写出一个与鸣笛时的声压信号一致的表达式。

4. 刺耳的制动 到达一个十字路口的火车以加速度 $-g$ 制动并拉响汽笛。静止时汽笛的基频是 550 Hz。写出十字路口的声音气压信号 $s(t)$ 的表达式。

5. 平均频率 信号 $s(t)$ 的傅里叶变换为 $S(f)$，功率谱为 $|S(f)|^2$，功率谱是非负的，这与沿一条线的质量分布类似。就像与功率谱对应的质量分布的质心那样定义信号 $s(t)$ 的平均频率，即

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} f\,|S(f)|^2 \mathrm{d}f}{\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 \mathrm{d}f}。$$

(a) 在本定义下，信号 $s(t) = \exp[-\pi(10^{-5}t)^2]\cos 2\pi 60t$ 的平均频率是什么？

(b) 这个高度纯单音信号的功率谱相对它的平均频率的均方根离差是什么？

(c) 对波形 $s(t)$ 进行时频分析，合适的单元尺寸和形状是什么？

6. 一个简单的波形　一个信号 $s(t) = J_0(2\pi t)$，当 $|t| \to \infty$ 时，它的频率趋于 1 Hz，在 $t = 0$ 附近呈现更低的频率，或许会达到 2/3 Hz 左右。如何在时频图上显示出这个单音信号的漂移？

7. Haar 小波的傅里叶变换　对由 $\left(0 < x < \frac{1}{2}\right)$ 时 $f(x) = 1$，$\left(\frac{1}{2} < x < 1\right)$ 时 $f(x) = -1$，且当 $x < 0$ 或 $x > 1$ 时，$f(x) = 0$ 定义的 Haar 小波，推导它的傅里叶变换

$$F(s) = (\pi s)^{-1}(1 - \cos\pi s)(\sin\pi s + \mathrm{i}\cos\pi s)。$$

8. Wigner 分布定理　如果 $f(t)$ 的 Wigner 分布为 $W(t,f)$，证明

$f(-t)$ 的 Wigner 分布是 $W(-t, -f)$　　(旋转 π)

$af(t)$ 的 Wigner 分布是 $|a|^2W(t,f)$　　(非线性)

$f(at)$ 的 Wigner 分布是 $\frac{1}{|a|}W(at, f/a)$　　(相似性)

9. 高斯脉冲的 Wigner 分布　(a) 证明 $f(t) = \exp(-\pi t^2/W^2)$ 的 Wigner 分布为 $W(t,f) = \sqrt{2}W\exp[-2\pi(t^2/W^2 - W^2f^2)]$。(b) 对一个给定的等效宽度 W，轨迹 $W(t,f) =$ 常数的形状是什么？

第20章

sinc$x$，sinc^2x 和 exp$(-\pi x^2)$的数值表

本表列出了归一化函数 sinc$x$，sinc^2x 和 exp$(-\pi x^2)$的从 0～3.99 的函数值（六个小数位）。sinc$x$ 的定义是

$$\text{sinc}x=\frac{\sin\pi x}{\pi x}。$$

sinc$x$，sinc^2x 和 exp$(-\pi x^2)$的数值表

x	sinc$x$	sinc^2x	exp$(-\pi x^2)$	x	sinc$x$	sinc^2x	exp$(-\pi x^2)$
.00	1.000 000	1.000 000	1.000 000	.25	.900 316	.810 569	.821 725
.01	.999 836	.999 671	.999 686	.26	.892 454	.796 473	.808 664
.02	.999 342	.998 685	.998 744	.27	.884 325	.782 031	.795 311
.03	.998 520	.997 043	.997 177	.28	.875 936	.767 263	.781 687
.04	.997 370	.994 747	.994 986	.29	.867 290	.752 192	.767 814
.05	.995 893	.991 802	.992 177	.30	.858 394	.736 840	.753 713
.06	.994 089	.988 212	.988 754	.31	.849 251	.721 228	.739 407
.07	.991 959	.983 983	.984 724	.32	.839 869	.705 379	.724 916
.08	.989 506	.979 121	.980 095	.33	.830 251	.689 316	.710 263
.09	.986 729	.973 634	.974 874	.34	.820 403	.673 061	.695 470
.10	.983 632	.967 531	.969 072	.35	.810 332	.656 638	.680 556
.11	.980 215	.960 821	.962 700	.36	.800 043	.640 068	.665 544
.12	.976 481	.953 515	.955 769	.37	.789 542	.623 376	.650 454
.13	.972 432	.945 623	.948 292	.38	.778 834	.606 583	.635 308
.14	.968 070	.937 159	.940 282	.39	.767 927	.589 712	.620 124
.15	.963 398	.928 135	.931 755	.40	.756 827	.572 787	.604 923
.16	.958 418	.918 566	.922 724	.41	.745 539	.555 828	.589 723
.17	.953 135	.908 466	.913 208	.42	.734 070	.538 859	.574 545
.18	.947 550	.897 851	.903 221	.43	.722 428	.521 902	.559 406
.19	.941 667	.886 736	.892 783	.44	.710 618	.504 977	.544 323
.20	.935 489	.875 140	.881 911	.45	.698 647	.488 107	.529 315
.21	.929 021	.863 080	.870 625	.46	.686 522	.471 312	.514 396
.22	.922 265	.850 573	.858 943	.47	.674 249	.454 612	.499 585
.23	.915 227	.837 640	.846 885	.48	.661 837	.438 028	.484 895
.24	.907 909	.824 298	.834 472	.49	.649 291	.421 579	.470 341

续表

x	$\text{sinc}x$	$\text{sinc}^2 x$	$\exp(-\pi x^2)$	x	$\text{sinc}x$	$\text{sinc}^2 x$	$\exp(-\pi x^2)$
.50	.636 620	.405 285	.455 938	1.00	.000 000	.000 000	.043 214
.51	.623 829	.389 163	.441 698	1.01	−.009 899	.000 098	.040 570
.52	.610 926	.373 231	.427 634	1.02	−.019 595	.000 384	.038 063
.53	.597 919	.357 507	.413 758	1.03	−.029 083	.000 846	.035 689
.54	.584 815	.342 008	.400 081	1.04	−.038 360	.001 472	.033 442
.55	.571 620	.326 749	.386 613	1.05	−.047 423	.002 249	.031 317
.56	.558 342	.311 746	.373 363	1.06	−.056 269	.003 166	.029 308
.57	.544 989	.297 013	.360 341	1.07	−.064 895	.004 211	.027 411
.58	.531 568	.282 565	.347 555	1.08	−.073 297	.005 372	.025 621
.59	.518 086	.268 413	.335 012	1.09	−.081 473	.006 638	.023 932
.60	.504 551	.254 572	.322 719	1.10	−.089 421	.007 996	.022 341
.61	.490 970	.241 051	.310 682	1.11	−.097 138	.009 436	.020 843
.62	.477 350	.227 863	.298 905	1.12	−.104 623	.010 946	.019 432
.63	.463 699	.215 017	.287 395	1.13	−.111 873	.012 515	.018 106
.64	.450 024	.202 522	.276 154	1.14	−.118 886	.014 134	.016 860
.65	.436 333	.190 386	.265 186	1.15	−.125 661	.015 791	.015 690
.66	.422 632	.178 618	.254 494	1.16	−.132 196	.017 476	.014 591
.67	.408 929	.167 223	.244 080	1.17	−.138 490	.019 179	.013 561
.68	.395 232	.156 209	.233 944	1.18	−.144 541	.020 892	.012 596
.69	.381 548	.145 579	.224 089	1.19	−.150 350	.022 605	.011 692
.70	.367 883	.135 338	.214 514	1.20	−.155 915	.024 309	.010 847
.71	.354 245	.125 490	.205 219	1.21	−.161 235	.025 997	.010 056
.72	.340 642	.116 037	.196 204	1.22	−.166 310	.027 659	.009 317
.73	.327 079	.106 981	.187 467	1.23	−.171 140	.029 289	.008 627
.74	.313 565	.098 323	.179 006	1.24	−.175 724	.030 879	.007 982
.75	.300 105	.090 063	.170 820	1.25	−.180 063	.032 423	.007 382
.76	.286 708	.082 201	.162 906	1.26	−.184 157	.033 914	.006 822
.77	.273 379	.074 736	.155 261	1.27	−.188 006	.035 346	.006 301
.78	.260 126	.067 666	.147 881	1.28	−.191 611	.036 715	.005 816
.79	.246 955	.060 987	.140 764	1.29	−.194 972	.038 014	.005 365
.80	.233 872	.054 696	.133 906	1.30	−.198 091	.039 240	.004 945
.81	.220 885	.048 790	.127 301	1.31	−.200 968	.040 388	.004 556
.82	.207 999	.043 263	.120 947	1.32	−.203 604	.041 455	.004 195
.83	.195 220	.038 111	.114 837	1.33	−.206 002	.042 437	.003 860
.84	.182 556	.033 327	.108 967	1.34	−.208 162	.043 331	.003 549
.85	.170 011	.028 904	.103 333	1.35	−.210 086	.044 136	.003 262
.86	.157 593	.024 835	.097 928	1.36	−.211 776	.044 849	.002 995
.87	.145 306	.021 114	.092 748	1.37	−.213 234	.045 469	.002 749
.88	.133 156	.017 731	.087 786	1.38	−.214 462	.045 994	.002 522
.89	.121 150	.014 677	.083 038	1.39	−.215 462	.046 424	.002 311
.90	.109 292	.011 945	.078 497	1.40	−.216 236	.046 758	.002 117
.91	.097 589	.009 524	.074 158	1.41	−.216 788	.046 997	.001 939
.92	.086 044	.007 404	.070 015	1.42	−.217 119	.047 141	.001 774
.93	.074 664	.005 575	.066 062	1.43	−.217 234	.047 190	.001 622
.94	.063 452	.004 026	.062 293	1.44	−.217 133	.047 147	.001 482
.95	.052 415	.002 747	.058 702	1.45	−.216 821	.047 011	.001 353
.96	.041 557	.001 727	.055 283	1.46	−.216 301	.046 786	.001 235
.97	.030 882	.000 954	.052 031	1.47	−.215 576	.046 473	.001 126
.98	.020 395	.000 416	.048 939	1.48	−.214 650	.046 075	.001 027
.99	.010 099	.000 102	.046 002	1.49	−.213 525	.045 593	$.0_3 9\ 353$

续表

x	sinc$x$	sinc$^2 x$	exp($-\pi x^2$)	x	sinc$x$	sinc$^2 x$	exp($-\pi x^2$)
1.50	−.212 207	.045 032	.0$_3$8 514	2.00	.000 000	.000 000	.0$_5$3 487
1.51	−.210 697	.044 393	.0$_3$7 746	2.01	.004 974	.000 025	.0$_5$3 075
1.52	−.209 001	.043 681	.0$_3$7 043	2.02	.009 894	.000 098	.0$_5$2 709
1.53	−.207 122	.042 900	.0$_3$6 399	2.03	.014 756	.000 218	.0$_5$2 385
1.54	−.205 065	.042 052	.0$_3$5 811	2.04	.019 556	.000 382	.0$_5$2 099
1.55	−.202 833	.041 141	.0$_3$5 273	2.05	.024 290	.000 590	.0$_5$1 846
1.56	−.200 431	.040 172	.0$_3$4 782	2.06	.028 954	.000 838	.0$_5$1 622
1.57	−.197 862	.039 150	.0$_3$4 335	2.07	.033 545	.001 125	.0$_5$1 425
1.58	−.195 133	.038 077	.0$_3$3 926	2.08	.038 058	.001 448	.0$_5$1 251
1.59	−.192 246	.036 958	.0$_3$3 554	2.09	.042 491	.001 805	.0$_5$1 097
1.60	−.189 207	.035 799	.0$_3$3 215	2.10	.046 840	.002 194	.0$_6$9 618
1.61	−.186 020	.034 603	.0$_3$2 907	2.11	.051 101	.002 611	.0$_6$8 427
1.62	−.182 690	.033 375	.0$_3$2 626	2.12	.055 272	.003 055	.0$_6$7 378
1.63	−.179 221	.032 120	.0$_3$2 371	2.13	.059 350	.003 522	.0$_6$6 456
1.64	−.175 619	.030 842	.0$_3$2 140	2.14	.063 332	.004 011	.0$_6$5 645
1.65	−.171 889	.029 546	.0$_3$1 930	2.15	.067 214	.004 518	.0$_6$4 934
1.66	−.168 034	.028 236	.0$_3$1 739	2.16	.070 994	.005 040	.0$_6$4 309
1.67	−.164 061	.026 916	.0$_3$1 566	2.17	.074 670	.005 576	.0$_6$3 761
1.68	−.159 975	.025 592	.0$_3$1 410	2.18	.078 238	.006 121	.0$_6$3 280
1.69	−.155 780	.024 267	.0$_3$1 268	2.19	.081 697	.006 674	.0$_6$2 860
1.70	−.151 481	.022 947	.0$_3$1 140	2.20	.085 044	.007 233	.0$_6$2 491
1.71	−.147 084	.021 634	.0$_3$1 024	2.21	.088 278	.007 793	.0$_6$2 169
1.72	−.142 594	.020 333	.0$_4$9 197	2.22	.091 396	.008 353	.0$_6$1 887
1.73	−.138 016	.019 048	.0$_4$8 252	2.23	.094 396	.008 911	.0$_6$1 641
1.74	−.133 355	.017 784	.0$_4$7 400	2.24	.097 276	.009 463	.0$_6$1 426
1.75	−.128 617	.016 542	.0$_4$6 631	2.25	.100 035	.010 007	.0$_6$1 238
1.76	−.123 806	.015 328	.0$_4$5 939	2.26	.102 672	.010 541	.0$_6$1 075
1.77	−.118 928	.014 144	.0$_4$5 316	2.27	.105 184	.011 064	.0$_7$9 322
1.78	−.113 988	.012 993	.0$_4$4 755	2.28	.107 571	.011 572	.0$_7$8 080
1.79	−.108 991	.011 879	.0$_4$4 250	2.29	.109 832	.012 063	.0$_7$7 000
1.80	−.103 943	.010 804	.0$_4$3 797	2.30	.111 964	.012 536	.0$_7$6 060
1.81	−.098 849	.009 771	.0$_4$3 390	2.31	.113 969	.012 989	.0$_7$5 243
1.82	−.093 714	.008 782	.0$_4$3 024	2.32	.115 844	.013 420	.0$_7$4 533
1.83	−.088 543	.007 840	.0$_4$2 697	2.33	.117 589	.013 827	.0$_7$3 917
1.84	−.083 341	.006 946	.0$_4$2 403	2.34	.119 204	.014 210	.0$_7$3 382
1.85	−.078 113	.006 102	.0$_4$2 140	2.35	.120 688	.014 566	.0$_7$2 919
1.86	−.072 865	.005 309	.0$_4$1 905	2.36	.122 040	.014 894	.0$_7$2 518
1.87	−.067 602	.004 570	.0$_4$1 694	2.37	.123 262	.015 193	.0$_7$2 170
1.88	−.062 329	.003 885	.0$_4$1 506	2.38	.124 352	.015 463	.0$_7$1 869
1.89	−.057 050	.003 255	.0$_4$1 338	2.39	.125 310	.015 703	.0$_7$1 609
1.90	−.051 770	.002 680	.0$_4$1 187	2.40	.126 138	.015 911	.0$_7$1 384
1.91	−.046 495	.002 162	.0$_4$1 053	2.41	.126 834	.016 087	.0$_7$1 190
1.92	−.041 229	.001 700	.0$_5$9 340	2.42	.127 401	.016 231	.0$_7$1 023
1.93	−.035 978	.001 294	.0$_5$8 276	2.43	.127 837	.016 342	.0$_8$8 780
1.94	−.030 745	.000 945	.0$_5$7 329	2.44	.128 144	.016 421	.0$_8$7 534
1.95	−.025 536	.000 652	.0$_5$6 486	2.45	.128 323	.016 467	.0$_8$6 461
1.96	−.020 354	.000 414	.0$_5$5 736	2.46	.128 374	.016 480	.0$_8$5 538
1.97	−.015 206	.000 231	.0$_5$5 070	2.47	.128 298	.016 460	.0$_8$4 743
1.98	−.010 094	.000 102	.0$_5$4 478	2.48	.128 097	.016 409	.0$_8$4 060
1.99	−.005 024	.000 025	.0$_5$3 953	2.49	.127 772	.016 326	.0$_8$3 473

续表

x	sinc$x$	sinc^2x	$\exp(-\pi x^2)$	x	sinc$x$	sinc^2x	$\exp(-\pi x^2)$
2.50	.127 324	.016 211	$.0_{8}2\ 969$	3.00	.000 000	.000 000	$.0_{12}5\ 255$
2.51	.126 754	.016 067	$.0_{8}2\ 537$	3.01	−.003 322	.000 011	$.0_{12}4\ 351$
2.52	.126 064	.015 892	$.0_{8}2\ 166$	3.02	−.006 618	.000 044	$.0_{12}3\ 600$
2.53	.125 256	.015 689	$.0_{8}1\ 848$	3.03	−.009 886	.000 098	$.0_{12}2\ 977$
2.54	.124 331	.015 458	$.0_{8}1\ 576$	3.04	−.013 123	.000 172	$.0_{12}2\ 460$
2.55	.123 291	.015 201	$.0_{8}1\ 343$	3.05	−.016 326	.000 267	$.0_{12}2\ 032$
2.56	.122 137	.014 918	$.0_{8}1\ 144$	3.06	−.019 492	.000 380	$.0_{12}1\ 677$
2.57	.120 873	.014 610	$.0_{9}9\ 737$	3.07	−.022 618	.000 512	$.0_{12}1\ 383$
2.58	.119 500	.014 280	$.0_{9}8\ 283$	3.08	−.025 701	.000 661	$.0_{12}1\ 140$
2.59	.118 020	.013 929	$.0_{9}7\ 041$	3.09	−.028 740	.000 826	$.0_{13}9\ 393$
2.60	.116 435	.013 557	$.0_{9}5\ 982$	3.10	−.031 730	.001 007	$.0_{13}7\ 733$
2.61	.114 748	.013 167	$.0_{9}5\ 078$	3.11	−.034 670	.001 202	$.0_{13}6\ 362$
2.62	.112 961	.012 760	$.0_{9}4\ 309$	3.12	−.037 557	.001 411	$.0_{13}5\ 231$
2.63	.111 076	.012 338	$.0_{9}3\ 654$	3.13	−.040 389	.001 631	$.0_{13}4\ 299$
2.64	.109 097	.011 902	$.0_{9}3\ 096$	3.14	−.043 162	.001 863	$.0_{12}3\ 530$
2.65	.107 025	.011 454	$.0_{9}2\ 622$	3.15	−.045 876	.002 105	$.0_{13}2\ 897$
2.66	.104 864	.010 996	$.0_{9}2\ 219$	3.16	−.048 528	.002 355	$.0_{13}2\ 376$
2.67	.102 615	.010 530	$.0_{9}1\ 877$	3.17	−.051 114	.002 613	$.0_{13}1\ 948$
2.68	.100 283	.010 057	$.0_{9}1\ 587$	3.18	−.053 635	.002 877	$.0_{13}1\ 595$
2.69	.097 869	.009 578	$.0_{9}1\ 340$	3.19	−.056 087	.003 146	$.0_{13}1\ 306$
2.70	.095 377	.009 097	$.0_{9}1\ 132$	3.20	−.058 468	.003 419	$.0_{13}1\ 069$
2.71	.092 810	.008 614	$.0_{10}9\ 547$	3.21	−.060 777	.003 694	$.0_{14}8\ 736$
2.72	.090 170	.008 131	$.0_{10}8\ 050$	3.22	−.063 012	.003 971	$.0_{14}7\ 138$
2.73	.087 461	.007 649	$.0_{10}6\ 783$	3.23	−.065 171	.004 247	$.0_{14}5\ 829$
2.74	.084 685	.007 172	$.0_{10}5\ 712$	3.24	−.067 253	.004 523	$.0_{14}4\ 757$
2.75	.081 847	.006 699	$.0_{10}4\ 807$	3.25	−.069 255	.004 796	$.0_{14}8\ 879$
2.76	.078 949	.006 233	$.0_{10}4\ 043$	3.26	−.071 177	.005 066	$.0_{14}3\ 162$
2.77	.075 994	.005 775	$.0_{10}3\ 398$	3.27	−.073 018	.005 332	$.0_{14}2\ 575$
2.78	.072 985	.005 327	$.0_{10}2\ 855$	3.28	−.074 775	.005 591	$.0_{14}2\ 096$
2.79	.069 926	.004 890	$.0_{10}2\ 396$	3.29	−.076 448	.005 844	$.0_{14}1\ 706$
2.80	.066 821	.004 465	$.0_{10}2\ 010$	3.30	−.078 036	.006 090	$.0_{14}1\ 387$
2.81	.063 671	.004 054	$.0_{10}1\ 686$	3.31	−.079 537	.006 326	$.0_{14}1\ 127$
2.82	.060 482	.003 658	$.0_{10}1\ 412$	3.32	−.080 951	.006 553	$.0_{15}9\ 147$
2.83	.057 255	.003 278	$.0_{10}1\ 183$	3.33	−.082 277	.006 770	$.0_{15}7\ 423$
2.84	.053 995	.002 916	$.0_{11}9\ 897$	3.34	−.083 514	.006 975	$.0_{15}6\ 020$
2.85	.050 705	.002 571	$.0_{11}8\ 277$	3.35	−.084 662	.007 168	$.0_{15}4\ 879$
2.86	.047 388	.002 246	$.0_{11}6\ 917$	3.36	−.085 719	.007 348	$.0_{15}3\ 951$
2.87	.044 047	.001 940	$.0_{11}5\ 778$	3.37	−.086 686	.007 514	$.0_{15}3\ 198$
2.88	.040 687	.001 655	$.0_{11}4\ 823$	3.38	−.087 561	.007 667	$.0_{15}2\ 587$
2.89	.037 309	.001 392	$.0_{11}4\ 023$	3.39	−.088 346	.007 805	$.0_{15}2\ 091$
2.90	.033 918	.001 150	$.0_{11}3\ 354$	3.40	−.089 038	.007 928	$.0_{15}1\ 690$
2.91	.030 517	.000 931	$.0_{11}2\ 795$	3.41	−.089 640	.008 035	$.0_{15}1\ 364$
2.92	.027 110	.000 735	$.0_{11}2\ 327$	3.42	−.090 149	.008 127	$.0_{15}1\ 101$
2.93	.023 699	.000 562	$.0_{11}1\ 936$	3.43	−.090 567	.008 202	$.0_{16}8\ 877$
2.94	.020 288	.000 412	$.0_{11}1\ 610$	3.44	−.090 893	.008 262	$.0_{16}7\ 153$
2.95	.016 880	.000 285	$.0_{11}1\ 338$	3.45	−.091 128	.008 304	$.0_{16}5\ 761$
2.96	.013 478	.000 182	$.0_{11}1\ 111$	3.46	−.091 272	.008 331	$.0_{16}4\ 637$
2.97	.010 086	.000 102	$.0_{12}9\ 225$	3.47	−.091 325	.008 340	$.0_{16}3\ 730$
2.98	.006 707	.000 045	$.0_{12}7\ 652$	3.48	−.091 288	.008 333	$.0_{16}2\ 998$
2.99	.003 344	.000 011	$.0_{12}6\ 344$	3.49	−.091 161	.008 310	$.0_{16}2\ 409$

续表

x	sinc$x$	sinc^2x	exp($-\pi x^2$)	x	sinc$x$	sinc^2x	exp($-\pi x^2$)
3.50	−.090 946	.008 271	$.0_{16}1\,934$	3.75	−.060 021	.003 603	$.0_{19}6\,508$
3.51	−.090 642	.008 216	$.0_{16}1\,551$	3.76	−.057 952	.003 358	$.0_{19}5\,140$
3.52	−.090 251	.008 145	$.0_{16}1\,244$	3.77	−.055 836	.003 118	$.0_{19}4\,057$
3.53	−.089 773	.008 059	$.0_{17}9\,969$	3.78	−.053 677	.002 881	$.0_{19}3\,201$
3.54	−.089 209	.007 958	$.0_{17}7\,983$	3.79	−.051 476	.002 650	$.0_{19}2\,523$
3.55	−.088 561	.007 843	$.0_{17}6\,389$	3.80	−.049 236	.002 424	$.0_{19}1\,988$
3.56	−.087 829	.007 714	$.0_{17}5\,110$	3.81	−.046 960	.002 205	$.0_{19}1\,565$
3.57	−.087 015	.007 572	$.0_{17}4\,085$	3.82	−.044 649	.001 994	$.0_{19}1\,232$
3.58	−.086 120	.007 417	$.0_{17}3\,263$	3.83	−.042 306	.001 790	$.0_{20}9\,685$
3.59	−.085 145	.007 250	$.0_{17}2\,605$	3.84	−.039 934	.001 595	$.0_{20}7\,611$
3.60	−.084 092	.007 071	$.0_{17}2\,078$	3.85	−.037 535	.001 409	$.0_{20}5\,978$
3.61	−.082 962	.006 883	$.0_{17}1\,657$	3.86	−.035 111	.001 233	$.0_{20}4\,692$
3.62	−.081 756	.006 684	$.0_{17}1\,320$	3.87	−.032 666	.001 067	$.0_{20}3\,680$
3.63	−.080 477	.006 476	$.0_{17}1\,051$	3.88	−.030 200	.000 912	$.0_{20}2\,885$
3.64	−.079 125	.006 261	$.0_{18}8\,367$	3.89	−.027 718	.000 768	$.0_{20}2\,260$
3.65	−.077 703	.006 038	$.0_{18}6\,654$	3.90	−.025 221	.000 636	$.0_{20}1\,769$
3.66	−.076 212	.005 808	$.0_{18}5\,289$	3.91	−.022 712	.000 516	$.0_{20}1\,384$
3.67	−.074 655	.005 573	$.0_{18}4\,201$	3.92	−.020 194	.000 408	$.0_{20}1\,083$
3.68	−.073 032	.005 334	$.0_{18}3\,335$	3.93	−.017 668	.000 312	$.0_{21}8\,459$
3.69	−.071 346	.005 090	$.0_{18}2\,646$	3.94	−.015 138	.000 229	$.0_{21}6\,606$
3.70	−.069 599	.004 844	$.0_{18}2\,097$	3.95	−.012 606	.000 159	$.0_{21}5\,156$
3.71	−.067 794	.004 596	$.0_{18}1\,662$	3.96	−.010 074	.000 101	$.0_{21}4\,022$
3.72	−.065 931	.004 347	$.0_{18}1\,316$	3.97	−.007 545	.000 057	$.0_{21}3\,135$
3.73	−.064 013	.004 098	$.0_{18}1\,041$	3.98	−.005 022	.000 025	$.0_{21}2\,442$
3.74	−.062 042	.003 849	$.0_{19}8\,235$	3.99	−.002 506	.000 006	$.0_{21}1\,901$

半峰值横坐标

$\mathrm{sinc}\,0.603355=0.5$

$\mathrm{sinc}^2\,0.442946=0.5$

$\exp[-\pi(0.469719)^2]=0.5$

$\mathrm{sinc}\,0.442946=1/\sqrt{2}$

$\exp[-\pi(0.332141)^2]=1/\sqrt{2}$

$\mathrm{sinc}'x=(\cos\pi x-\mathrm{sinc}\,x)/x$

第 21 章

部分习题答案

第 2 章　基本原理

14. 因为对复量 $f(x)=R(x)+\mathrm{i}I(x)$ 来说，可以通过它本身与其复共轭相加再除以 2 得到它的实部，

$$R(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f^*(x)。$$

已知 $f^*(x)=-f(-x)$。因此

$$R(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}f(-x)。$$

因为 $R(x)+R(-x)$ 为零，所以 $R(x)$ 是奇的。对虚部 $I(x)$，我们有

$$\mathrm{i}I(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}f^*(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(-x),$$

因为 $I(x)-I(-x)=0$，所以虚部是偶的。

$f(x)=R(x)+\mathrm{i}I(x)$ 的傅里叶变换有两个部分。由上一题可知，$R(x)$（它是实的和奇的）的变换是纯虚的。$I(x)$（它是实的和偶的）的变换是实的；从而 $\mathrm{i}I(x)$ 的变换是纯虚的。因此整个变换是纯虚的。

19. 如果在一个周期上计算 2.18 的积分，那么 2.18 的表达式就可以用于对称度的度量。对第一个函数，偶对称轴位于 $x=0,\pm1,\pm2,\cdots$，对称度是 100%。对 $\Lambda(x)-\frac{1}{2}$，奇对称度是 100%，因为如果把它移动 x 的半个单位，它就变成奇的了。函数 $\Lambda(x)-\frac{1}{4}$ 保持了 100% 的偶对称，但是奇对称本质上被破坏了，只有 12.5% 的对称度。

$$\int_{-1}^{1}\left[\Lambda(x)-\frac{1}{4}\right]\left[\Lambda(x-1)-\frac{1}{4}\right]\mathrm{d}x\Big/\int_{-1}^{1}[\Lambda(x)]^2\mathrm{d}x$$
$$=2\int_0^1\left(\frac{3}{4}-x\right)\left(-\frac{1}{4}+x\right)\mathrm{d}x\Big/\int_0^1(1-x)^2\mathrm{d}x$$
$$=1/8。$$

22. 如果 $f(x)$ 是偶的，那么 $f(x)+F(x)$ 的变换是它本身。例如，$f(x)=1$ 且 $F(s)=\delta(s)$，那么 $1+\delta(x)$ 是它自己的变换；另一个例子是 $\Pi(x)+\mathrm{sinc}(x)$，它的变换是 $\mathrm{sinc}(s)+\Pi(s)$。更一般地(J. Phys. A: Math. Gen., vol. 24, pp. L1143-1144, 1991)，$f(x)+F(x)+f(-x)+F(-x)$ 的变换是它本身。由上面可知，因为 $f(x)+f(-x)$ 是偶函数，它的变换是 $F(s)+F(-s)$。傅里叶变换是自变换的特征函数列表于习题 8.25。

第 3 章 卷积

6. 令 $f=g*h$。那么

$$\begin{aligned}f*f&=(g*h)*(g*h)\\&=g*[h*(g*h)]\\&=g*[h*(h*g)]\\&=g*[(h*h)*g]\\&=g*[g*(h*h)]\\&=(g*g)*(h*h)，\text{证完。}\end{aligned}$$

9. 定理：$\int_{-\infty}^{\infty}f(g*h)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}g(h\star f)\mathrm{d}x$

推导：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}f(g*h)\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty}g(u)h(x-u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{\infty}g(u)\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x)h(x-u)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u\\&=\int_{-\infty}^{\infty}g(u)[f*h(-)]\mathrm{d}u\\&=\int_{-\infty}^{\infty}g(h\star f)\mathrm{d}u。\end{aligned}$$

一个更对称的定理是

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(h\star f)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}h(g\star f)\mathrm{d}x。$$

它与 $f(g*h)$ 无关，但是通过交换 g 和 h 可以从前面的定理推出。

说明：有关傅里叶变换的一个关系是

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(g*h)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}F(-)GH\,\mathrm{d}s。$$

11. 令 $K_1(u)$ 和 $K_2(u)$ 是两个 hermitian 函数，并设 $S(u)=K_1(u)+K_2(u)$ 以及 $P(u)=K_1(u)K_2(u)$。由定义，如果 $S(-u)=S^*(u)$，那么 $S(u)$ 是 hermitian 的。我们注意到：

$$S(-u)=K_1(-u)+K_2(-u)=K_1^*(u)+K_2^*(u)=[K_1(u)+K_2(u)]^*=S^*(u),$$

所以和是 hermitian 的。又

$$\mathrm{P}(-u)=K_1(-u)K_2(-u)=K_1^*(u)K_2^*(u)=[K_1(u)K_2(u)]^*=\mathrm{P}^*(u),$$

所以积也是 hermitian 的。

17. 令 $x=0.2n$,其中 n 是整数。那么问题是先要求得 $f_1(x)$ 的近似值,其中

$$\{f_1(n)\}*\{1.0\ 0.8187\ 0.6703\ 0.5488\ 0.4493\ 0.3679\ \cdots\}=\{1\}。$$

由图 3.10 的方法,我们可得 $\{f_1(n)\}=\{1\quad -0.8187\}$。所求的归一化序列是

$$\{1\quad -0.8187\}/0.1812=\{5.518\quad -4.518\}。$$

25. 所求的函数是两个圆心距离为 r 的单位直径的圆的重叠面积。如果圆心位于 C 和 C',Q 是 CC' 的中点,P 是两个圆的一个交叉点,R 是圆心为 C 的圆上最靠近 C' 的点,面积是 PQR 所围面积的 4 倍。

$$\begin{aligned}\operatorname{chat} r &= 4(\text{扇形 } CPR \text{ 的面积} - \text{三角形 } CPQ \text{ 的面积})\\ &= 4\left[\frac{1}{2}CP^2\cos^{-1}r-\frac{1}{2}CQ\cdot PQ\right]\\ &= \frac{1}{2}[\cos^{-1}r-r(1-r^2)^{1/2}]。\end{aligned}$$

29. (a) 可以通过取卷积和来验证一个序列是另一个序列的互易序列。(b) 采样与两个序列一致的两个函数是 $v(t)=2H(t)$ 和 $i(t)=2\cos\pi tH(t)$。

30. 任意周期为 2,3 或 6 的序列与 6 元序列 $\{a_k\}$ 的卷积都是看不见的(无形的);从而,给定序列 $\{c_k\}$ 中将不会出现周期为 2,3 或 6 的周期分量。因此,反卷积算法不能重建它们;反卷积只能得到未知 $\{b_k\}$ 的除去周期为 2,3 或 6 的分量的部分 —— 称之为基本解(Austral. J. Phys., vol. 7, pp. 615-640, 1954)。不过,在某些情况下,未知的 $\{b_k\}$ 是可以恢复的,例如当 $\{b_k\}$ 具有有限长度时。这个重要的主题出现在恢复的标题下。

31. 卷积所需的时间应该与哪个序列更短没有关系。随 N 的渐近变化与计算卷积时所使用的方法有关,是通过直接相乘求和的方法,还是通过第 3 章中矩阵相乘的方法,或者是通过变换相乘的方法,甚或是通过嵌入的程序等。有关记时的有趣的事情是对于你所选择的方法,可以经验地确定这种渐近变化。

第 4 章　一些有用函数的记法

7. $$\begin{aligned}4\operatorname{sinc}x*\sin x &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x-u)\sin 4\pi u}{\pi u}du\\ &= \frac{\sin x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos u\sin 4\pi u}{u}du-\frac{\cos x}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin u\sin 4\pi u}{u}du\\ &= \frac{2\sin x}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos u\sin 4\pi u}{u}du-(\text{被积函数是奇函数时为 }0)\end{aligned}$$

我们需要用标准积分(如,见 Gradshteyn 和 Ryzhik No. 3.741.2)。

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax\cos bx}{x}\mathrm{d}x = \pi/2, \qquad a > b \geqslant 0。$$

因此

$$\int_0^\infty \frac{\sin 4\pi u\cos u}{u}\mathrm{d}u = \pi/2$$

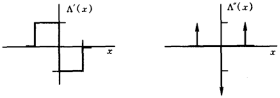
且 $4\mathrm{sinc}4x * \sin x = \sin x$。

12. 我们可求得

$$\Lambda'(x) = \begin{cases} 0 & |x| > 1 \\ 1 & -1 < x < 0 \\ -1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

我们知道这等于 $-\Pi(x/2)\mathrm{sgn}x$。除在 $x=-1,0,1$ 处的间断点外，二阶导数为零。在传统分析中，我们说 $\Lambda'(x)$ 在这些点不可导，或者说 $\Lambda(x)$ 在这些点上的二阶导数不存在。然而，下一章中，这种情况可以用 δ 符号处理如下：

$$\Lambda''(x) = \delta(x+1) - 2\delta(x) + \delta(x-1)。$$



15. 由定义

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

且由于 $|x|$ 是连续的，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|x| = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} = \mathrm{sgn}x。$$

现在，$\mathrm{sgn}x$ 是不连续的；因此我们不能简单地对 x 的两段范围内的表达式 1 和 -1 求导，并总结说 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\mathrm{sgn}x$ 在任何地方都等于零。用下一章的符号，在 $x=0$ 处的不连续量 $+2$ 将产生结果 $\mathrm{sgn}'x = 2\delta(x)$。$|x|$ 和 $2xH(x)$ 有相同的二阶导数是由于它们的一阶导数只差一个常量，就像对 $|x| - x = 2xH(x)$ 求导所看到的一样。

19. 这个结果可以使用冗长的积分表，或者等效地通过余弦变换表得到证实，两种表都有可以使用的软件包。或者，图示集表明 $\mathrm{jinc}x \supset (1-s^2)\Pi(s/2)$。所求的无穷积分等于变换在 $s=0$ 处的值，也即 1。

第 5 章 冲激符号

3. 除 $2x^2-\frac{1}{2}=0$ 外，表达式 $\delta\left(2x^2-\frac{1}{2}\right)$ 的值均为零，即表达式在 $x=\pm\frac{1}{2}$ 处有冲激。每个冲激的强度是 $2x^2-\frac{1}{2}$ 的绝对斜率的倒数，在 $x=\frac{1}{2}$ 和 $x=-\frac{1}{2}$ 处的绝对斜率都是 2，因此 $\delta\left(2x^2-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\delta\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(x+\frac{1}{2}\right)$。对 $\delta(x^2-a^2)$ 的情况，它在 $x=a$ 和 $x=-a$ 的绝对斜率是 $2a$。因此 $\delta(x^2-a^2)=\delta(x-a)/2a+\delta(x+a)/2a$。

7. (a) $\sin\pi x$ 的根位于 $x=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 且在过零处的绝对斜率是 π。因此 $\delta(\sin\pi x)$ 是一串位于 x 的整数值上的强度为 π^{-1} 的冲激。所以，$\pi\delta(\sin\pi x)$ 与 $\text{III}(x)$ 相同。

(b) 对 $\delta(\sin x)$，冲激位于 $x=0,\pm\pi,\pm2\pi,\cdots$，具有单位强度，可以用 $\pi^{-1}\text{III}(x/\pi)$ 来表示。括号中的 π 拉伸了横坐标使得冲激间隔是 π 而不是 $\text{III}(x)$ 的单位间隔。但是拉伸增强了冲激；因此前面要有补偿因子 π^{-1}。

9. 假设我们取 $\Pi\left(\pm\frac{1}{2}\right)$ 为 $\frac{1}{2}$，用图形可以证明

$$\text{III}(x)\Pi(x/8)=\frac{1}{2}\delta(x+4)+\text{III}(x)\Pi(x/7)+\frac{1}{2}\delta(x-4)$$

在 $\Pi(x)$ 的定义中没有规定这个性质。这不是来自于 $\Pi(x)$ 的定义，而是来自于筛选冲激落在被采样函数的间断点上时的筛选积分。结果是(61 页)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)f(x)\mathrm{d}x=[f(a+)+f(a-)]/2。$$

在我们的例子中，对 $\Pi(x/8)$ 的右边沿，我们可以写

$$\int_{3.5}^{4.5}\delta(x-4)\Pi(x/8)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}。$$

因此，$\delta(x-4)\Pi(x/8)$ 与 $\frac{1}{2}\delta(x-4)$ 等效，类似地对左边沿，$\delta(x+4)\Pi(x/8)=\frac{1}{2}\delta(x+4)$。

12. (a) $\delta'(-x)=-\delta'(x)$ 的一个令人满意的证明如下。在 72 页的记法中，用序列 $p_\tau(x)=\tau^{-1}\exp(-\pi x^2/\tau^2)$ 定义了 $\delta(x)$，且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)F(x)\mathrm{d}x\triangleq\lim_{\tau\to0}\int_{-\infty}^{\infty}p_\tau(x)F(x)\mathrm{d}x=F(0) \tag{1}$$

序列 $p_\tau(x)$ 定义 $\delta'(x)$。现在，让我们证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(x)F(x)\mathrm{d}x=-F'(0)。 \tag{2}$$

由定义

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(x)F(x)\mathrm{d}x&=\lim_{\tau\to0}\int_{-\infty}^{\infty}p'_\tau(x)F(x)\mathrm{d}x\\&=-\lim_{\tau\to0}\int_{-\infty}^{\infty}p_\tau(x)F'(x)\mathrm{d}x\qquad(72\text{ 页})\end{aligned}$$

$$= -F'(0) \qquad 由(1)。$$

现在，对 $\delta'(-x)$：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(-x)F(x)\mathrm{d}x = \lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}p'_{\tau}(-x)F(x)\mathrm{d}x$$
$$= -\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}p'_{\tau}(x)F(x)\mathrm{d}x \qquad (p'_{\tau}\ 是奇的)$$
$$= F'(0)\ 。$$

使用广义函数，这个讨论提供了一个展现基本关系(1)和(2)的导数的机会。但讨论可以概括如下，广义函数 $\delta'(-x)$ 是负的 $\delta'(x)$，因为定义 $\delta'(-x)$ 的序列是负的定义 $\delta'(x)$ 的序列。

这个结果的一个有趣的性质是有等价于 $p_{\tau}(x)$ 的非偶序列和等价于 $p'_{\tau}(x)$ 的非奇序列。然而，在广义函数理论中，$\delta(x)$ 和 $\delta'(x)$ 分别是偶对称和奇对称的。对此性质的更多描述可参见 5.19。

在另一种方法中，我们可以把

$$\delta'(x) * f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) \tag{3}$$

看作是 $\delta'(x)$ 的基本性质。对两边取反可得

$$\delta'(x) * f(-x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(-x)}f(-x)。$$

令 $g(x) = f(-x)$，那么

$$\delta'(-x) * g(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)。\tag{4}$$

把(3)和(4)比较说明 $\delta'(-x)$ 和 $-\delta'(x)$ 具有同样的性质。

(b) 为了研究 $x\delta'(x)$，对它乘以测试函数 $F(x)$ 并积分。由(2)

$$\int_{-\infty}^{\infty}x\delta'(x)F(x)\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xF(x)]_{x=0} = -F(0)。$$

但是
$$\int_{-\infty}^{\infty}[-\delta(x)]F(x)\mathrm{d}x = -F(0)。$$

因此
$$x\delta' = -\delta(x)。$$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)\delta(x)] = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(0)\delta(x)] = f(0)\delta'(x)$。

及

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)\delta(x)] = f(x)\delta'(x) + f'(x)\delta(x)$$
$$= f(x)\delta'(x) + f'(0)\delta(x)。$$

因此
$$f(x)\delta'(x) = f(0)\delta'(x) - f'(0)\delta(x)。$$

为了加强对结果的直观印象，所有上面的讨论都可以用序列 $\tau^{-1}\Pi(x/\tau)$ 和它的导数 $\tau^{-1}[\delta(x+\tau/2) - \delta(x-\tau/2)]$ 来做。

19. 书中有时采用“因果”序列 $\tau^{-1}\Pi\left[\left(x-\frac{1}{2}\tau\right)\Big/\tau\right]$ ($\tau>0$) 来处理在 $t=0$ 时刻施加输入的系统的响应。那么冲激响应是 $\tau\to 0$ 时对矩形脉冲响应的极限。矩形函数序列定义了一个实体 $\delta_+(x)$，它具有如下性质

$$G(0+)=\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\tau^{-1}\Pi\left[\left(x-\frac{1}{2}\tau\right)\Big/\tau\right]G(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\delta_+(x)G(x)\mathrm{d}x$$

其中

$$G(0+)=\lim_{\epsilon\to 0}G(x+|\epsilon|)。$$

$\delta_-(x)$ 具有相似的性质。由于(61 页)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)G(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}G(0-)+\frac{1}{2}G(0+),$$

所以可得 $\delta(x)=\frac{1}{2}\delta_-(x)+\frac{1}{2}\delta_+(x)$。

非对称的 $\tau^{-1}\left\{\Lambda(x/\tau)+\frac{1}{2}\Lambda[(x-\tau)/\tau]\right\}$ 包括两个部分，第一部分性态与 $\delta(x)$ 相同，第二部分的性态与 $\frac{1}{2}\delta_+(x)$ 相同。它定义了一个实体 $\delta_a(x)=\delta(x)+\frac{1}{2}\delta_+(x)=\delta_+(x)+\frac{1}{2}\delta_-(x)$ (即 $\mu=1,\ \nu=\frac{1}{2}$)。

在广义函数理论中，通过把注意力限制在各阶导数均存在的序列和测试函数回避了许多问题。由于我们经常对不满足需求的测试函数 $G(x)$ 应用冲激符号标记，所以为了建立即使 $G(x)$ 有缺陷时也正确的标准结果，通常要做一些辅助的讨论。然而，除此以外有些实际中的现象根本就不包括在广义函数理论之中。筛选间断点处右边沿值的 $\delta_+(x)$ 就是这样的一个例子。

24. (a) 当我们取 $\frac{1}{2}\tau^{-1}\Lambda[(x/\tau)-1]$ 在 $\tau\to 0$ 时的极限时，我们必须首先固定 x。如果我们取 x 等于 0，那么对所有的 τ 函数值都是零，所以极限是零。如果 $x\neq 0$，函数值上升形成一个峰且随 $\tau\to 0$ 下降；对 $\tau<x/2$，函数值保持零所以极限是零。在 $\tau\to 0$ 的极限情况下，所给出的函数 $f(x,\tau)$ 具有单位面积但对所有 x 都趋于零。(我们可以注意到，随 $\tau\to 0$，$\max[f(x,\tau)]$ 无极限地增加。) 正则序列(74 页) 也有同样的性质。虽然如此，这样的序列等价于 $\delta(x)$ 的其它序列。

(b) $\tau\to 0$ 时 $f(0,\tau)\to-\infty$ 的一个例子是 $\tau^{-1}[\Lambda(\tau^{-1}x-2)-\Lambda(\tau^{-1}x)+\Lambda(\tau^{-1}x+2)]$，它的中间是一个负的三角窗函数，两边是两个相等的正的三角窗函数，且具有单位面积。

25. (a) 由习题 5.12，$f(x)\delta'(x)=f(0)\delta'(x)-f'(0)\delta(x)$。

对其求导可得 $f(x)\delta''(x)+f'(x)\delta'(x)=f(0)\delta''(x)-f'(0)\delta'(x)$。

因此，$f(x)\delta''(x)=f(0)\delta''(x)-f'(0)\delta'(x)-f'(x)\delta'(x)$。再次使用 5.12 展开第三项，我们有

$$f(x)\delta''(x)=f(0)\delta''(x)-2f'(0)\delta'(x)+f''(0)\delta(x)。$$

(b) 可以用数学归纳法来证明。如果

$$f(x)\delta^{(n)}(x) = a_0 f(0)\delta^{(n)}(x) - a_1 f'(0)\delta^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n f^{(n)}(0)\delta(x) \quad (1)$$

那么

$$f(x)\delta^{(n+1)}(x) + f'(x)\delta^{(n)}(x) = a_0 f(0)\delta^{(n+1)}(x) - a_1 f'(0)\delta^{(n)}(x) + \cdots + a_n f^{(n)}(0)\delta'(x)$$

移项并使用(1)，

$$\begin{aligned} f(x)\delta^{(n+1)}(x) &= a_0 f(0)\delta^{(n+1)}(x) - a_1 f'(0)\delta^{(n)}(x) + \cdots + a_n f^{(n)}(0)\delta'(x) - \\ &\quad a_0 f'(0)\delta^{(n)}(x) + \cdots + a_{n-1} f^{(n)}(0)\delta'(x) + a_n f^{(n+1)}(0)\delta(x) \\ &= b_0 f(0)\delta^{(n+1)}(x) - b_1 f'(0)\delta^{(n)}(x) + \cdots + b_n f^{(n)}(0)\delta'(x) - \\ &\quad b_{n+1} f^{(n+1)}(0)\delta(x)。 \end{aligned} \quad (2)$$

我们知道$\{b_0\ b_1\ \cdots\ b_n\} = \{1\ \ 1\} * \{a_0\ a_1\ \cdots\ a_n\}$。现在，对 $n = 2$，(1) 是正确的，二项式系数为{1 2 1}。因此对 $n = 3$，(2) 是正确的，二项式系数为{1 3 3 1}，因此对 $n = 4$ 和所有的整数 n 这都是正确的。

32. 由于波形不太重要，所以我们选择矩形脉冲。我们也能研究电流 $I(t)$。如此，$V(t) = K\Pi(t/\tau)$，由于 $V(t) = RI(t)$，由此可得 $I(t) = (K/R)\Pi(t/\tau)$。已知

$$\int V(t)I(t)\mathrm{d}t = 2。$$

而 $V(t)I(t) = (K^2/R)\Pi(t/\tau)$。因此

$$\int (K^2/R)\Pi(t/\tau)\mathrm{d}t = 2,$$

由此，我们得到 $K^2 = 2R/\tau$。因此有瞬时功率

$$V(t)I(t) = 2\tau^{-1}\Pi(t/\tau)。$$

这告诉我们，随着 τ 变得越来越短，功率可以用冲激 $2\delta(t)$ 来描述。然而，如果电压本身是一个规则冲激，那么与给定的情况相反，它将传输给电阻无穷的能量。注意到

$$V(t)I(t) = [V(t)]^2/R = 2R^{-1}\tau^{-1}\Pi(t/\tau)$$

我们可得

$$V(t) = 2^{1/2}\tau^{-1/2}\Pi(t/\tau)。$$

因此对 $V(t)$，所求的 δ 符号是 $2^{1/2}\tau^{1/2}\Pi(t/\tau)$。即使电压波形是一个零函数，它也能传给电阻有限的能量。

33. (a) $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\delta(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tau^{-1}\Pi(x/\tau)\tau^{-1}\Pi(y/\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\tau\to 0}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\tau^{-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1。$$

由于这个性质，我们可以像 66 页一样写 $\delta(x)\delta(y) = {}^2\delta(x,y)$。

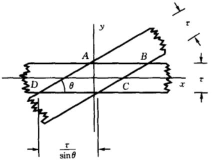
(b) 一个与 x 轴成 θ 角的叶片可以用 $\delta(y - x\tan\theta)$ 来表示，$\delta(y)$ 是沿 x 轴的叶片。因此，问题是要我们考虑如下积分

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(y-x\tan\theta)\delta(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

根据规则，

$$I=\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tau^{-1}\Pi\left(\frac{y-x\tan\theta}{\tau}\right)\tau^{-1}\Pi\left(\frac{y}{\tau}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\lim_{\tau\to 0}\iint_{ABCD}\tau^{-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$



被积函数是平行四边形 $ABCD$ 上的 τ^{-2}，平行四边形的高度是 τ，底是 $\tau/\sin\theta$，面积是 $\tau^2/\sin\theta$。因此积分值是 $1/\sin\theta$，而且随着相交部分越来越斜，它趋于无穷。

35.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\sin x)\Pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\cos x)\Pi(x/4)\mathrm{d}x=2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\sin 2x)\Pi(x/4)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}。$$

36. 单边拉普拉斯变换的使用者会有很大的异议，为了解释的目的，他们通过把符号变为 $\delta_+(x)$ 来避免这一点(参见习题 5.19)。

37. [①]由于 $|x|$ 是连续的，除 x 的原点以外，它的导数等于 $\mathrm{sgn}(x)$。所以宣称的相等受条件 $x\neq 0$ 的约束。在 $x=0$，导数是一个不确定的常量，但是在进一步求导时它将消失。由于 $|x|+x$ 与 $2xH(x)$ 一致，它们具有同样的二阶导数 $2\delta(x)$，即使它们在原点处没有定义。

38. 对越来越大的 N 值，如 $N=200$，400 和 800，在 $0<s<0.25$ 的范围内观察归一化的和 $N^{-1}\sum_1^N 2\sin 2\pi ks$。如果它不是明显不同的话，图形将显示出 $\sum_k 2\sin 2\pi ks$ 不收敛，但是图形还说明，当选择 s 使得 $2\pi s=1^\circ$ 时，部分和在 $\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}^\circ$ 附近等幅振荡。在 $\mathrm{III}(x)\mathrm{sgn}x$ 作为一个因子出现在物理可实现的表达式中的这类问题中，采用所推荐的变换可以得到严格正确的结果。

第 6 章 基本定理

12. 符号 $f^{*3/2}$ 表示 f 与本身卷积半次。由上一题，下式是合理的。

① 此答案不是原题的答案。—— 译者注

$$f^{*3/2} \supset F^{3/2}$$

或者

$$f^{*3/2} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi sx}\left[\int e^{-i2\pi su} f(u)\mathrm{d}u\right]^{3/2}\mathrm{d}s。$$

这个积分表达式为分数阶自卷积提供了一个可操作的定义。对不同的观点，参见 13 章。

14. 由习题 6.1(d)，

$$e^{-ax^2} \supset (\pi/a)^{\frac{1}{2}} e^{-\pi^2 s^2/a}$$

因此

$$e^{-ax^2} * e^{-bx^2} \supset \pi(ab)^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi^2 s^2 (a^{-1}+b^{-1})}。$$

20. 设 $g(x) = \int^x f(u)\mathrm{d}u$，那么 $\int_{-\infty}^{\infty} G(s)\mathrm{d}s = g(0)$。因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}\left[\int^x f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x = \int^0 f(u)\mathrm{d}u。$$

26. $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2 x\cos\pi x\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(s)\left[\frac{1}{2}\delta\left(s+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(s-\frac{1}{2}\right)\right]\mathrm{d}s = \frac{1}{2}$。

28. 首先验证 $(\pi x)^{-1} \supset -\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}\,s$，通过计算公式右边的傅里叶积分可以很容易做到这一点。那么

$$(\pi x)^{-1} * (-\pi x)^{-1} \supset (-\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}\,s)(\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}\,s) = \mathrm{sgn}^2 s = 1。$$

变换为 1 的函数是 $\delta(x)$。由此可得，变换在 1 和 -1 之间跳变的任何函数的自相关是冲激。这种函数的例子有 $2\mathrm{sinc}x - \delta(x)$，$\delta(x) - 4\mathrm{sinc}x\cos\omega x$ $(\omega > 2\pi)$，以及 $(\pi x)^{-1}e^{ix}$。

29. 说

$$e^{-\pi x^2} = \delta(x) + (4\pi)^{-1}\delta''(x) + \cdots, \tag{1}$$

可能不正确似乎是一个令人惊讶的结果。如果我们写出如下完全的推理，问题就出现了：

$$f(x) = \mathscr{F}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{s^n}{n!}F^{(n)}(0) \tag{2}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\mathscr{F}[s^n F^{(n)}(0)/n!] \tag{3}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[\delta(x)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x - \cdots + \delta^{(N)}(x)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^N}{N!}f(x)\mathrm{d}x\right]。$$

我们知道，有限个函数和的傅里叶变换是各自变换的和，但是和的极限的变换(2) 等于变换的和的极限吗？显然不是。这种情况类似于必须在行和列上相加的双边无穷序列。如果我们打算先求出行的和，再把它们加起来，那么行的和本身必须存在。在本例中，我们从极限情况下对每个 s 来说和都存在的(2) 式化成 s 上的傅里叶积分并非严格存在的(3) 式。即便如此，特殊的关系式(1) 仍有些应用。例如，如果我们要求解 $e^{-\pi s^2}\Pi(s/a)$，解析的方法不是很方便，通过

$$a\mathrm{sinc}ax * [\delta(x) + (4\pi)^{-1}\delta''(x) + \cdots]$$

将会得到一个正确的级数结果吗?

33. 令(Exp)表示任意形如 $a\exp(-|x|)$ 的函数。那么

$$(\text{Voigt}) = (\text{Gaussian}) * (\text{Cauchy}) \supset (\text{Gaussian}) \times (\text{Exp})。$$

所以

$$\begin{aligned}(\text{Voigt}) * (\text{Voigt}) &\supset (\text{Gaussian}) \times (\text{Gaussian}) \times (\text{Exp}) \times (\text{Exp}) \\ &= (\text{Gaussian}) \times (\text{Exp})。\end{aligned}$$

因此

$$(\text{Voigt}) * (\text{Voigt}) = (\text{Voigt})。$$

第 7 章　求解变换

1. 二阶导数 $F''(s)$ 可以用二阶有限差分 $F(s+\Delta s)-2F(s)+F(s-\Delta s)$ 除以 $(\Delta s)^2$ 来近似。因此 $F''(0)$ 可以用 $[F(\Delta s)-2F(0)+F(-\Delta s)]/(\Delta s)^2$ 来近似。$F(s)$ 的虚部是奇函数,在 $s=0$ 处曲率为零,而实部是偶函数,使得可以用 $F(\Delta s)$ 代替 $F(-\Delta s)$。因此表达式 $-F''(0)/4\pi^2$ 可以由 $2[R(0)-R(1)]/4\pi^2(\Delta s)^2$ 来近似,这个量比数据的二阶矩稍微小一点(Δs 越小,一致性越好)。当 $R(0)$ 已被核实等于 $\sum f(x)$ 后,矩检验证实了 $R(1)$ 没有过失误差。

2. 参见复变量的三角函数的积分表或者余弦变换表。一个简单的数值检验就是以 Δx 为间隔,对 $\cos\pi x^2$ 求和,再乘以 Δx,并与 $F(0)=2^{-1/2}$ 进行比较。随着 x 的增加,被加数变得高度振荡,以至于数值求和似乎不太可靠。然而,只有 $x=0$ 左右的几个周期对积分的贡献最大,在 $|x|$ 较大时的快速振荡往往可以被忽略。因此以 $\Delta x=0.1$ 为间隔从 $x=0$ 到 10 的求和在几个百分点内与期望相吻合,直接消除了过失误差。重做以 $\Delta x=0.001$ 为间隔从 $x=0$ 到 100 的求和得到的一致性可以达到 0.2%。虽然这种数值近似没有形成证明,但它可以给出因子 2,π 等的快速的验证,证明涉及到代数学和微分学的知识。

3. 已知 $\cos\pi x^2 \supset 2^{-1/2}(\cos\pi s^2+\sin\pi s^2)$。附加的积分 $\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\pi x^2 e^{-\mathrm{i}2\pi sx}\,dx$ 等于 $2\mathrm{i}\int_0^{\infty}\sin\pi x^2\cos 2\pi x\,dx$(由于被积函数是 x 的奇函数,所以可忽略 $\sin\pi x^2\sin 2\pi sx$ 的无穷积分)。从积分表或余弦变换表我们可以得到以下结论:

$$\begin{aligned}e^{\mathrm{i}\pi x^2} &\supset 2^{-1/2}[\cos\pi s^2+\sin\pi s^2+\mathrm{i}(\cos\pi s^2-\sin\pi s^2)] \\ &= 2^{-1/2}[e^{-\mathrm{i}\pi s^2}+\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\pi s^2}] \\ &= \sqrt{\mathrm{i}}\,e^{-\mathrm{i}\pi s^2}。\end{aligned}$$

虽然表格很方便,但变换也可以手工计算。以这种情况为例。因为 $\cos x^2$ 或 $\sin x^2$ 都不会随着 x 的增加而衰减,引入稍后趋于零的阻尼。因此考虑 $\exp(-\sigma x^2)\exp\mathrm{i}x^2$,这里的 σ 最后将趋于零。于是

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sigma-\mathrm{i})x^2} e^{-\mathrm{i}2\pi sx}\,dx \\ &= e^{-\pi^2 s^2/(\sigma-\mathrm{i})}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sigma-\mathrm{i})x^2-\mathrm{i}2\pi sx+\pi^2 s^2/(\sigma-\mathrm{i})}\,dx\end{aligned}$$

$$= e^{-\pi^2 s^2/(\sigma-i)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sigma-i)[x-i\pi s/(\sigma-i)]^2} dx$$

$$= e^{-\pi^2 s^2/(\sigma-i)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sigma-i)x^2} dx$$

$$= e^{-\pi^2 s^2/(\sigma-i)} \sqrt{\frac{\pi}{\sigma-i}}。$$

最后

$$e^{ix^2} \supset \lim_{\sigma\to 0}\Phi(s) = \sqrt{\frac{\pi}{-i}} e^{-i\pi^2 s^2}。$$

由此可得

$$e^{i\pi x^2} \supset \sqrt{i} e^{-i\pi s^2}$$

将实部和虚部分开，可得

$$\cos\pi x^2 \supset 2^{-1/2}(\cos\pi s^2 + \sin\pi s^2)$$
$$\sin\pi x^2 \supset 2^{-1/2}(\cos\pi s^2 - \sin\pi s^2)。$$

5. (a) 运用相似性和移位定理。

(b) $\{f\} = \{0 \quad 1\frac{1}{2} \quad 3 \quad 4\frac{1}{2} \quad \cdots \quad 10\frac{1}{2} \quad 12 \quad 11\frac{1}{2} \quad \cdots \quad 1\frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad 0\}$。

(c) 一致性在最差情况下要好于 $F(0)$ 的 0.25%。

6. 结果与 $G(s) = 8e^{-i9\pi s}\operatorname{sinc}8s + 4.5\delta(s)$ 的一致性不是很好。假设在一种相似的情况中，你不能很容易地得到理论变换，但是你可以计算变换。为了解决这一问题，可以通过重新计算当前例子从而使计算的值更接近理论变换的方法进行试验。

7. 对于所有的从 1 直到 N 的整数值 s，由于对每一个这种整数，乘积中都有一个零因子，所以乘积的极限值是零。对 $s \ll 1$ 乘积近似为 $1 - s^2 - s^2/4 - s^2/9 - \cdots = 1 - s^2(1 + 1/4 + 1/9 + \cdots) = 1 - (\pi^2/6)s^2$，$\exp(-\pi 2s^2/6)$ 也接近于这一结果。因此计算说明只有当 s 的值足够小使得指数函数的二次展开形式足够精确时，结果与高斯一致。从标准展开式

$$\sin\pi s = \pi s \prod_{k=1}^{\infty}(1 - s^2/k^2),$$

可以预料到这种粗糙的近似，正如习题 8.32 中所提到的一样这说明，最初的连续积的极限是 $\operatorname{sinc}s$。

8. 把一周均值 $(1/7)\sum_j$ 赋给 F_0。基频分量（每周一个循环的频率）有其振幅和相位，将这两个参数赋给 F_1 和 F_2。将 F_3 和 F_4 赋给每周两个循环的频率分量，再加上三次谐波（每周三个循环）的两个数值，就可以完成七个数值的计算。

这就出现了一个有趣的问题。从每日的数值中可分辨的最高频率是每天 0.5 个循环或一周 3.5 个循环，并且可以从用于搜集 g_i 的长数据集中确定出这种以两天为周期的分量的幅度和相位。然而，与七个完备的数字 F_k 相关的频率落在 0，1/7，2/7 和 3/7 处；这些频率中最高的也达不到每天 0.5 个循环。因此可能有一些重要的表征性的信息（逐日交替的信息）被丢失了。这种丢失的机制是交替的每周一的数据都会反相，所以每天的交替被一周的总和给抵消掉了。

通过在两星期上求和得到一个 14 个值的数据集可以辨别这种变化。现在，根据一组新数 F_k，$k=0$ 至 13 提出最初的问题，并且将 F_0 分配给均值 $(1/14)\sum F_k$，那么为了完全表达 14 个数值所需的剩下的 13 个 F_k 的值是什么？

第 8 章　两个域

1. 我们可以像习题 6.14 中那样来完成两个高斯函数的卷积，或者使用下面的推导方法。题目中的每个高斯函数的面积均为 $\pi^{1/2}$；由性质：

$$\int_{-\infty}^{\infty}(f*g)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}f\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}g\mathrm{d}x。$$

可知，它们的卷积的面积为 π。（这个性质可用于对卷积进行数值检验（22 页），它是从定积分关系（110 页）推导出来的，根据这一关系，(1) 式的左右两边都等于 $F(0)G(0)$。）因为在卷积运算中，方差具有可加性（129 页），所以所求卷积的方差是 $\exp(-x^2)$ 的方差的 2 倍；因此，结果的宽度增加到 $2^{1/2}$ 倍；再乘以 $\pi^{1/2}/2^{1/2}$ 就得到了面积为 π 的结果。因此

$$\exp(-x^2)*\exp(-x^2)\supset(\pi/2)^{1/2}\exp(-s^2/2)。$$

这种推导过程对于以下两种情况是颇有价值的。(a) 可以用于交叉检验。因为它和积分不同，因此不大可能出现同样的错误。(b) 可以求解部分结果。例如当峰值和面积因为其他因素而固定不变时，可以只求得宽度。在以上的讨论中我们得到了参数；而我们已经知道，高斯函数的卷积仍然是高斯函数。

6. 实际的每日黑子数是可以推出的，其结果如下，从 1900 年 1 月 1 日起：

10，10，5，0，0，0，0，0，0，0，0，0，15，35，30，20，25，15，10，10，10，0，0，10，10，15，25，20，20，15，20，15。

一般来说，连续和的逆会受到某种由严格地周期变化组成的不确定项的影响，其周期等于求和周期的长度，均值为 0。在大多数情况下，有一些外部因素有有助于确定这种求和项的幅度值和形式。在本题中，关键的一点的是，这些数字表示的是太阳黑子数，因此不能为负值。相应地，在任何情况下，如果连续 5 天的连续和为 0，则这一天邻近 5 天的黑子数一定都是 0。根据这一点，在 1900 年 1 月中，就可以得到惟一的解。在其他情况下，我们没有这种可以使用的先验知识，如本题中的太阳黑子数的 5 天周期性。例如，通过猜测连续几个值，我们可以得到一个解，然后通过数字滤波去除 1/5 整数倍附近的频率分量。这是一个很好的优化问题，因为有限的数据使我们不能得到无限窄的滤波器带宽。

10. 所提出的这个定义试图在两个方面拓展等效带宽的适用性。首先，用功率谱 $F(s)F^*(s)$ 的积分代替频谱 $F(s)$ 的积分，这可以消除当 $F(s)$ 与 $F(0)$ 在 s 的某些点处相位相反时发生的抵消现象。其次，考虑到频谱的最大值可能在 $s=0$ 以外的地方出现，因此用 $F_{\max}$ 作为归一化因子。但是，这个定义的量纲不是带宽的量纲，带宽与 s 具有相同的单位，这将会引起一些问题。例如，如果给定 $F(s)$ 的幅度在 s 的所有值上放大 2 倍，通常不应该认为是带宽的变化，但是所提出的定义的值放大了 2 倍。

13. (a) 令 $g(x)$ 是 $f(x)$ 混组后的派生函数，则有 $\int g(x)\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int gg^*\,\mathrm{d}x=$

$\int ff^* \mathrm{d}x$，因此，由自相关带宽的定义，

$$W_{f\star f^*} = \int f\mathrm{d}x \int f^* \mathrm{d}x \Big/ \int ff^* \mathrm{d}x = W_{g\star g^*}。$$

(b) $g(x)$ 的等效带宽 W_g 对 $g(0)$ 是敏感的。因此，

$$W_g = \int g\mathrm{d}x \Big/ g(0) = \int f\mathrm{d}x \Big/ g(0)$$

仅当 $f(0) = g(0)$ 时，$W_f = W_g$。

(c) 波形信号的总能量为$\int ff^* \mathrm{d}x$，这在混组中没有改变。因此，$|F(s)|^2$ 在 $s=0$ 处是不变的。$W_{|F|^2}$ 也是常数，因为 $W_{|F|^2} = [W_{f\star f}]^{-1}$。同样的，$\int |F|^2 \mathrm{d}s$ 也是常数。

15. 如果 $f(x) = \mathrm{e}^{-x}H(x)$，那么对称函数为 $g(x) = \mathrm{e}^{-2|x|}$。因此，$\mathrm{e}^{-|x|}$ 与对称函数除了横坐标扩展了 2 倍以外是相同的。根据这一关系我们可以知道，$\mathrm{e}^{-|x|}$ 的功率谱面积扩大到 2 倍（波形的能量加倍），等效带宽减小到一半，中心值扩大到 4 倍。

18. 根据调制理论，

$$\mathrm{e}^{-\pi x^2}\cos wx \supset \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\pi(s+w/2\pi)^2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\pi(s-w/2\pi)^2},$$

这个变换式由两个单位等效带宽的驼峰组成，而且如果 $w \gg 1$，这两个驼峰之间的间隔就会很宽。所要求的自相关函数的变换式是上式的平方，并且也同样包括两个驼峰：

$$\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2\pi(s+w/2\pi)^2} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2\pi(s-w/2\pi)^2}$$

再加上一个小的交叉乘积项。对变换式进行反变换，我们得到自相关函数应该为：

$$2^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\pi x^2/2}\cos\omega x。$$

26. 考虑一个压力变化：

$$0.01\mathrm{e}^{-\pi(t/T)^2}\cos(2500\mathrm{e}^{t/5})\mathrm{Nm}^{-2},$$

其中 T 为 $10s$。这表示一个强度高低变化的音调，且每 3.5s，音阶上升八度。如果这个音调在 3.5s 间隔内无穷地重复，那么在任意一个给定时刻将会有几个上升两倍的频率分量存在。这听起来就是一个带有谐波（和声）的复杂的音符，随着时间的流逝，音符的定调似乎是升高了。当每个谐波轮流升高并超出人耳可听到的范围时，就有一个子谐波从下面进入人耳，从而获得在强度上持续一段时间的音调连续升高的印象。

29. 因为 $g(x) = f(x) * \Pi(x)$，所以

$$g(x-\frac{1}{2})+g(x-\frac{3}{2})+g(x-\frac{5}{2})+\cdots = f(x)*\left[\Pi(x-\frac{1}{2})+\Pi(x-\frac{3}{2})+\Pi(x-\frac{5}{2})+\cdots\right]$$
$$= f(x)*H(x)。$$

两边求微分，

$$g'(x-\frac{1}{2})+g'(x-\frac{3}{2})+\cdots=f(x)$$

$$\left[\delta'(x-\frac{1}{2})+\delta'(x-\frac{3}{2})+\cdots\right]*g(x)=f(x)。$$

因此，

$$\Pi^{-1}(x)=\delta'(x-\frac{1}{2})+\delta'(x-\frac{3}{2})+\delta'(x-\frac{5}{2})+\cdots$$

我们可以直接验证

$$\Pi(x)*\left[\delta'(x-\frac{1}{2})+\delta'(x-\frac{3}{2})+\cdots\right]=\delta(x)。\qquad(1)$$

因为当 $\mathrm{sinc}s\neq 0$ 时，$(\mathrm{sinc}s)^{-1}G(s)=F(s)$，所以似乎应该有 $\Pi^{-1}(x)\supset(\mathrm{sinc}s)^{-1}$。但是，在 $\mathrm{sinc}s=0$ 处，我们不能用 $\mathrm{sinc}x$ 作分母，因此我们不能得到 $F(s)$ 在 $s=\pm1,\pm2,\cdots$ 处的值。$f(x)$ 中所有和矩形函数的宽度一致的整数周期的任何傅里叶分量都被抑制掉了，在给定的 $g(x)$ 中不存在这些分量，因此不能重建。当计算 $\Pi^{-1}*g(x)$ 时，常会受到具有单位周期任意形状和大小的周期性附加项的不可逆的限制，在很大程度上这就像任意的积分常数一样。

在 s 域中表现出来的不可逆性质，其根源在那些分母为 0 的点上，这提醒了我们，x 域的表达式隐藏了一个细节。重写(1) 式中的有限项，我们得到

$$\Pi(x)*\left[\delta'(x-\frac{1}{2})+\delta'(x-\frac{3}{2})+\cdots+\delta'(x-\frac{n}{2})\right]=\delta(x)-\delta(x-\frac{n}{2}-\frac{1}{2})。$$

对所有的 x，我们发现当 $n\to\infty$ 时负脉冲将会移出我们所考察的 x 范围的右边界。但是，如果在令 $n\to\infty$ 之前我们让等式的两边同时与某些操作数做卷积，我们得到的结果和直接与 $\delta(x)$ 卷积的结果不一样。周期为 1, 1/2, 1/3, … 的正弦是一些例外，它们被负脉冲抵消掉了。

很多情况下，任何周期性分量的参数可以通过先验信息来确定。例如，如果函数 $f(x)$ 在它为 0(比如有限持续期信号的起始和终点）的区间伸展，根据定义，它的任何周期分量都是无始无终的，所以幅度必然为 0。以上讨论不适用于存在误差时的确定信号的重建(Proc. I. R. E., vol. 46, pp. 106-111, 1958)，实际上它决定可以做些什么。

32. 我们知道，

$$\begin{aligned}(1-x^2)(1-x^2/4)(1-x^2/9)&=1-(1+1/4+1/9)x^2+(1/4+1/9+1/36)x^4-x^6/36\\&=1-1.3611x^2+0.0274x^4-0.027x^6,\qquad(1)\end{aligned}$$

但是，

$$\mathrm{sinc}x=1-1.6449x^2+0.8117x^4-0.1908x^6+\cdots$$

x^2 的系数决定了中心曲率(以及傅里叶变换的二阶矩)，正确的值为 $-\pi^2/6$。在无限乘积表达式中，每一个后继项都使中心曲率增大，因此，任何有限项因子都不能得到准确的系数。但是，我们注意到(1) 式中 x^2 的系数可以表示为级数 $\sum_n n^{-2}$，n 趋于无穷时，级数和的极限为 $\pi^2/6$。根据中心极限定理(146 页) 可知，大量形为 $1-ms^2$ 的抛物线项的乘积(并不要求 m 取值相同) 在一定的条件下将趋于高斯函数。在这里，我们得到的是 sinc 函数。

34. 所要求的方差可以表示为

$$\sigma^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-(\pi x/W)^2} \cos 2\pi\nu x \, dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\pi x/W)^2} \cos 2\pi\nu x \, dx}。$$

为了避免计算积分，可以利用波包 $f(x)$ 的傅里叶变换 $F(s)$。那么

$$\sigma^2 = -\frac{F''(0)}{4\pi^2 F(0)}。$$

根据调制理论我们得到

$$F(s) = \frac{1}{2} W e^{-\pi[W(s+\nu)]^2} + \frac{1}{2} W e^{-\pi[W(s-\nu)]^2}$$

以及 $F(0) = We^{-\pi W^2 \nu^2}$。从 $F(s)$ 的草图可知，它包括两个高斯形式的波峰，波峰的宽度为 $1/W$，中心位于 $\pm\nu$(参见图示集)，它在原点处的二阶导数 $F''(0)$，是函数 $\exp(-\pi W^2 s^2)$ 在 $s=\nu$ 处的二阶导数 2 倍。所以，

$$F''(0) = W(4\pi^2 W^2 s^2 - 2\pi) e^{-\pi W^2 \nu^2} \big|_{s=\nu} = W(4\pi\nu^2 - 2\pi) e^{-\pi W^2 \nu^2}。$$

因此，

$$\sigma^2 = -\frac{W(4\pi^2 W^2 \nu^2 - 2\pi) e^{-\pi W^2 \nu^2}}{4\pi^2 W e^{-\pi W^2 \nu^2}} = \frac{1}{2\pi} - W^2 \nu^2。$$

如果 $W\nu > 1/\sqrt{2\pi}$，σ^2 是否为负?是的，当 $W=\nu=1$ 时，$\sigma^2 = -0.841$。

35. 首先我们寻找一种容易的方法来构建函数。

(a) 注意到 $g'(x)$ 可以表示为四个矩形函数的和。

$$\Pi[(x+b)/c] - \Pi[(x-b)/c] - (a^{-1}-1)\Pi[(x+\tfrac{1}{2}a)/a],$$

其中 $b=(1+a)/2$，$c=1-a$。上式的变换式等于 $i2\pi sF(s)$，所以

$$F(s) = (c\,\mathrm{sinc}\,cs \sin 2\pi bs - (1-a)\,\mathrm{sinc}\,as \sin \pi as)/\pi s。$$

(b) $g(x)$ 的二阶导数

$$g''(x) = \delta(x+4) + \delta(x-4) - (a^{-1}-1)[\delta(x+1) + \delta(x-1)] + 4(a^{-1}-1)\delta(x)。$$

因此，$F(s) = [2\cos 2\pi 4s - 2(a^{-1}-1)\cos 2\pi s + 4(a^{-1}-1)]/(-4\pi^2 s^2)$。

(c) 从梯形函数 $(1-a)\Pi[x/(1+a)] * \Pi[x/(1-a)]/(1-a)$ 中减去 $(1-a)\Lambda(x/a)$ 得到另一种表达方式，由此

$$F(s) = (1-a)(1+a)\mathrm{sinc}[(1+a)s] \times \mathrm{sinc}[(1-a)s] - a(1-a)\mathrm{sinc}^2 as。$$

(d) 注意到 $f(x)$ 是两个三角函数的差，即 $f(x) = \Lambda(x) - \Lambda(x/a)$，则有

$$F(s) = \mathrm{sinc}^2 s - a\,\mathrm{sinc}^2 as。$$

最后一个表达式显然是最佳的答案。这些表达式之间的差异是令人吃惊的，虽然它们彼此等价。但是如果考虑到推导和验证的工作量，它们就不等价了。这么做的思想是：在开始时花一些时间来思考不同的方法。

36. (a) 传输线长度应使在线上的往返传输时间为 $\Delta = 0.1\ \mu s$，即 15 m。

(b) 对长度为 L 的远端开路的传输线，其输入阻抗为

$$Z = Z_0 \coth[\sqrt{(r+\mathrm{i}\omega l)(g+\mathrm{i}\omega c)}L],$$

对于无损传输（$r = g = 0$），通常近似地用单位长度的电感 l 和电容 c 来表示

$$Z = -\mathrm{i}Z_0 \cot 2wT,$$

其中 $T = 2vl$，$v = 1/\sqrt{lc}$，是传输线上的波速率（接近于光速），相应的电压传输函数为 $-\mathrm{i}\cot 2wT$。

(c) 冲激响应为

$$I(t) = \delta(t) + 2\delta(t-\Delta) + 2\delta(t-2\Delta) + \cdots$$

一段开路传输线的传输函数是 $I(t)$ 的傅里叶变换。因为 $I(t)$ 不是 t 的奇函数，所以它的傅里叶变换就不是纯虚函数，而一定有实部。这似乎意味着无损电路也会消耗功率，但实际上任何电路都会消耗一些功率。（参阅 Electronics Letters, vol. 34, pp. 1927-1928, 1998.）

37. 根据 $E(x) = \exp(-x)H(x)$，图 8.17 中的第二条曲线可以重新写为 $-[E(x+5) - E(x-5)]$，这是一个有限差分。

第一条曲线不能用这种方法表示成一个长时间间隔上的单波峰函数的有限差分。但是这条曲线具有有限和的形式，因此可以表示为有限差分。函数 $f(x)$ 的有限和 $s(x)$ 为

$$f(x) * \{1\ 1\ 1\ 1\ \cdots\} = f(x) + f(x-a) + f(x-2a) + f(x-3a) + \cdots$$

$s(x)$ 在相同间隔 a 上的有限差分就是原始的 $f(x)$。类似于积分与微分，有限和与有限差分互为逆操作。$\{1\ 1\ 1\ 1\ \cdots\}$ 和 $\{1\ 1\} *$ 两个算子连续作用，就得到了恒等算子，因而，

$$\{1\ 1\ 1\ 1\ \cdots\} * \{1\ \ -1\} = \{1\}。$$

第三个例子可以表示为具有 4 个阶跃（由所给定的四个冲激积分得到）的函数的微分，但是不能表示为有限差分。

第 9 章　波形，频谱，滤波器和线性性

11. (a) 考虑一整天的输入及其相应输出的变化。如果第二天给予系统完全相同的输入，输出也会完全相同，只是延迟了一天的时间。因此系统是时不变的。琼斯没有考虑到下午时系统的状态已经发生了改变，也许中午时有其他人用过了并且给它输入了一个阶跃电压信号。

(b) 系统是非线性的。可以理解，在第二个输入 $V_2(t)$ 作用之前，门开关必须是打开的，以便所有的测试都是在同样的系统初始状态上进行，而且如果需要的话，在两个独立输入（要测试它们的叠加）的和 $V_1(t) + V_2(t)$ 作用之前，要再次打开它。

12. 根据时不变的定义，这个系统是时不变的。我们可以看到叠加原理不成立是因为压力正比于每块平板上的电荷，因此正比于电压的平方。所以电压加倍时，并不能使响应加倍，但是

响应会产生一些变化。因此系统是非线性的。

26. 由微分定理的逆可以得到如下关系，$-i2\pi xf(x) \supset F'(s)$。

27. (a) 就像从图中所见到的那样，函数 $y(x)$ 是严格周期的，周期为 2π，或者也可以说频率为$\frac{1}{2\pi}$。

(b) $y(x)$ 的傅里叶变换谱图 $Y(s)$ 有四根谱线，分别位于 $s=\pm\frac{5}{2\pi}$ 和 $s=\pm\frac{4}{2\pi}$ 处。这是根据 $y(x)$ 的两项的变换分别是 $4.5\delta(s\pm\frac{5}{2\pi})$ 和 $5.5\delta(s\pm\frac{4}{2\pi})$ 而得到的。变换 $Y(s)$ 在频率$\frac{1}{2\pi}$处并没有分量。由此我们可以看出，周期性可以由人的观察得到，但却不能用傅里叶分析得出。这种现象在二维或是三维的晶体结构中尤其显著。

28. 两个函数和的傅里叶变换等于变换的和，因此两个函数的线性组合不可能包含任何两个原函数中没有的频率分量。但是现在的问题是非线性的，这是因为两个分量函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 不是简单地相加；最终的输出由函数 $y(x)=H[y_1(x)+y_2(x)]$ 确定。这里，一条黑线加印在另一条线上，结果仍然是黑线；所得的 $y(x)$ 值是 1，而不是 2。本例中，傅里叶分析将会展现这种可见的周期性。

29. (a) $L_{crit}=W/\sqrt{2\pi}=0.797\,88W$。在 $\exp(-\pi x^2/W^2)$ 的二阶导数为零处，最小值消失。

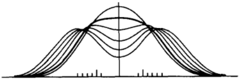


图 9.29　把具有相等宽度 W 且对称的位于由刻度指明的 $\pm\frac{1}{2}L$ 处的两个相同的高斯函数相加。合成曲线的中心曲率当 $L=L_{crit}=0.8W$(粗刻度和粗曲线) 时改变符号。图中显示，间隔为 L_{crit} 的线时平顶的，没有中心最小值。和平顶曲线上下相邻的曲线分别是位于$0.8L_{crit}$ 和 $1.2L_{crit}$ 时的曲线，而最外的曲线是位于 $2L_{crit}$ 时的曲线。

(b) 两个“未分解”的谱线接合时形成的单峰值在形状上不是高斯的；理论上，可以把两个分量分离并得到它们的幅度。但实际上，当观测剖面图是惟一的信息源时，观察者如何能确定“真正的”分布恰好是由两个等强度的谱线构成的呢？为了知道这些，观测者需要掌握某些原本不知道的先验信息。可以采用的一种方法是，观察者可以假设存在少量的具有随机位置和幅度的谱线，并证明不相等的谱线在观测误差范围内是一致的，并将结果用于后面的观测设计。在存在外部误差或仪器误差的情况下，给定一定的似乎合理的误差统计(似然概率)，我们可以建立作为误差水平函数的相等谱线对的可分解的分离。无疑，很难在 L_{crit} 的基础上改善很多。

最后，最初所述的问题的另一种事实是已知有作用的剖面图的确定。事实上，在可以用一个单独的强的窄谱线对一个仪器测试的地方，这有时是一个有效的办法，但是即使如此，仪器的响应基本上是一个受到自身误差限制的一个标准的剖面；我们是否能假设仪器的响应是高

斯的,那么从谱线的中心向外有多余 2 个或 3 个的等宽度的谱线?

30. (a)

$$V(0)=0$$
$$V(1)=0.5$$
$$V(2)=e^{-1}+0.8$$
$$V(3)=e^{-2}+1.6e^{-1}+1$$
$$V(4)=e^{-3}+1.6e^{-2}+2e^{-1}+0.3$$
$$V(5)=e^{-4}+1.6e^{-3}+2e^{-2}+0.6e^{-1}$$
$$V(6)=e^{-5}+1.6e^{-4}+2e^{-3}+0.6e^{-2}$$

(b) 系数与 $V_2(t)$ 在整数时间点上的值完全相同。这正如由如下事实所期望的那样,这个事实是借助冲激符号的补充,离散信号理论是包含在连续时间信号理论的体系中的。

第 10 章 采样和级数

6. 由于因子 s 的存在,$|sF(s)|$ 在有限带宽上的积分同无限区域上的积分会有很大的不同,即使带限区域外的能量 μ 很小。在 x 域中有类似观点,将一个小幅正弦信号加到一个带限函数上,如果正弦信号频率很高,就会严重影响基本斜率。

17. (a) 一个包括有限数量电感、电容和电阻的滤波器,只具有有限个的自然模式,因此它的自然响应可以用有限个常数来表示。

(b) 显然,如果确定了 $Y_i=\alpha_1Y_{i-1}+\alpha_2Y_{i-2}+\cdots+\beta X_i$ 中所用的足够多的系数,那么公式的右端就可以准确地预测输出 Y_i。

35.
```
function[y] = binom(n)
b = ([1 1]); y = 1; count = 1;
while count < n + 1
    y = conv(y,b); count = count + 1;
end
```

36. 是。所以我们看到 Mountararat 的简化愿望仅在一个地方抑制了因子 $1/L$ 却使它在变换域中的两个地方出现。与直接从用相似性定理得到的一样,间隔为 L 的单位冲激串的变换为 III(Ls)。看来采用符号的一个反常规的步骤,使得一个基础理论不适用了,同时也不能节约墨水。

37. 通过内插的方法,用频谱 $S(f)$ 的采样值足以得到其他值。例如,如果采样值关于 $f=0$ 对称分布,我们可以通过

$$S(0)=0.63S(\frac{1}{2}T^{-1})-0.21S(1\frac{1}{2}T^{-1})+\cdots+0.63S(-\frac{1}{2}T^{-1})-0.21S(-1\frac{1}{2}T^{-1})+\cdots$$

得到 $S(0)$。作用于本例中采样点的系数恰好就是中点内插系数。

38. 级数和必须是偶的且以 2π 为周期。在 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 范围之外,级数和一定是 $\frac{1}{2}\pi|\sin x|$。因此基本周期为 π。系数可由从 0 到 2π 上对 $\frac{1}{2}\pi\sin x\cos 2\pi nx$ 积分求出。

39. 和式的极点与 $\cot x$ 的极点一致,而且如果所说的一致性是正确的,零点应落在 $\pm\pi/2$,

$\pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \cdots$ 处，研究 $\sum_{-\infty}^{\infty}(x-k\pi)^{-1}$，看在 $x=\pi/2$ 时，它是否等于零。要检验的级数是

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi/2-k\pi}=\frac{2}{\pi}\sum\frac{1}{1-2k}$$
$$=\frac{2}{\pi}\left[1+\frac{1}{-1}+\frac{1}{-3}+\frac{1}{-5}\cdots+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\right],$$

如果选择成对的项，级数和就可以为零，但也可以是其他值；由于这个原因，我们不能称这个级数是收敛的。

选择 $(x-k\pi)^{-1}$ 与 $(x+k\pi)^{-1}$ 作为一对，对每一对求和可得 $2x/(x^2-k^2\pi^2)$。那么所得的结果 $\cot x=\frac{1}{x}+2x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^2-k^2\pi^2}$，对除 $\cot x$ 极点之外的所有 x 都正确。这种没有缺点的展开来自于对序列的强制求和。

我们对由 $\cot x$ 具有无穷多个无穷间断点这个事实引起的问题有思想准备。如果通过与 $\varepsilon^{-1}\exp(-\pi x^2/\varepsilon^2)$（这里 ε 是一个很小的正数）卷积把它们去除掉，所得的平滑后的函数正如我们希望的那样，和 $\cot x$ 没有区别。因此，所提出的这种一致性有一些优点；它可以和卷积定理一起使用，产生如下正确的结果

$$\varepsilon^{-1}e^{-\pi x^2/\varepsilon^2)}*\cot x\supset e^{-\pi\varepsilon^2 s^2}\text{III}(s)\operatorname{sgn}s。$$

问题是，x^{-1} 与间隔为 π 的单位冲激串卷积使得增加了函数 x^{-1}（其尾部的面积为 $\pm\infty$）的采样点。如果通过预加把值相等、符号相反的项抵消，那么卷积就得到有限项的和；但是从前所学的数学是，对无限项的求和，对各项进行绑定会导致不一致的结果。这里不会有单一的求和结果。

40. 如果不是很明显，由图可以看出 $\sum_k \sin k$ 不收敛，但同时也可以看出部分和会关于 $\frac{1}{2}\cot(\frac{1}{2})°$ 均匀振荡。

对 $1/x$ 以间隔 π 进行复制，求和结果假设为 $\cot x$，可以表示为 $x^{-1}*\pi^{-1}\text{III}(x/\pi)$，其傅里叶变换为 $(-i\pi\operatorname{sgn}s)\text{III}(\pi s)$，它的逆变换成为 $\sum_1^{\infty}2\sin 2kx$。那么通过叠加 $1/x$ 函数所得到的 $\cot x$ 的一个假设表达的结果是 $\cot x=\sum_1^{\infty}2\sin kx$。

和前一个问题一样，对表达式中的因子所提出的变换的合并是一个很客观现实的问题，可以导出非常正确得结果。

第 11 章 离散傅里叶变换和 FFT

首先给出的是在 11 章中间出现的练习 a 到 e 的答案，随后是有编号的习题答案

(a) 作快速傅里叶变换 **fft**([4 2 1 0 0 0 1 2]) 得

{10 6.8284 2 1.1716 2 1.1716 2 6.8284}，

正如所述的那样，它是纯实的。

(b) 对 $4\Lambda(t/4)$ 在 $t=-3,-2,\cdots,3,4$ 上的 8 点采样为

$$\begin{matrix} \{1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0\} \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & & & & & \end{matrix}$$

其中在样本点下面小写的数字是其下标 n，像 t 一样，n 可以取负值。应用 $8-n$ 置换 $-n$ 的移位规则可得到正值的下标 5，6，7 它们位于小写数字的第二行。这时，可以用正值的下标{4 3 2 1 0 1 2 3} 来代替偶函数 $4\Lambda(t/4)$。一般地，对于 N 点序列，移位规则为 $x(-n)\Rightarrow x(N-n)$，其中 n 值满足 $1\leqslant N-n\leqslant N$。

(c) 考虑一个偶函数 $f(t)$，其满足

$f(0)=0$，$f(\pm1)=1$，$f(\pm2)=2$，$f(\pm3)=3$，$f(\pm4)=4$。由置换规则，相应的下标从 $n=1$ 开始的 9 点序列应该为 $\{f(1)\ f(2)\ f(3)\ f(4)\ f(-4)\ f(-3)\ f(-2)\ f(-1)\ f(0)\}=\{1\ 2\ 3\ 4\ 4\ 3\ 2\ 1\ 0\}$。这样的一组序列所对应的连续变量函数有许多。在本例中，最简单的例子是 $f(t)=4.5\{\Pi[(t-\frac{1}{2})/9]-\Lambda(t/4.5)\}$，它的傅里叶变换为 $40.5\operatorname{sinc}9s-20.25\operatorname{sinc}^2 4.5s$。作为更进一步的练习，我们可以画出此傅里叶变换的实部和虚部，并和采样序列的 **fft**() 进行比较。

(d) 所给定的序列表示的是 $\Lambda(t/4)\operatorname{sgn}t$ 在时间 t 的单位间隔上的采样集合。对其应用 **fft**() 可得到{0 −9.6569i −4i −1.6569i 0 1.6569i 4i 9.6569i} 正如我们预期的，它是纯虚的。附加项 $\sin\pi t$ 的存在不会改变在整数位置上的采样值。

(e) 三个离散傅里叶变换是

$X_4(k)=\{4\ 0\ 0\ 0\}$

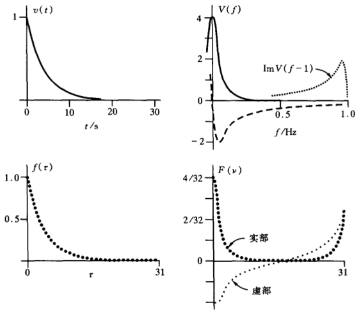
$X_8(k)=\{4\quad 1-2.4142\mathrm{i}\quad 0\quad 1-0.4142\mathrm{i}\quad 0\quad 1+0.4142\mathrm{i}\quad 0\quad 1+2.4142\mathrm{i}\}$

$X_{16}(k)=\{4\quad 3.0137-2.0137\mathrm{i}\quad 1-2.4142\mathrm{i}\quad -0.2483-1.2483\mathrm{i}\quad 0\quad 0.8341+0.1659\mathrm{i}\quad 1-0.4142\mathrm{i}\quad 0.4005-0.5995\mathrm{i}\quad 0\quad 0.4005+0.5995\mathrm{i}\quad 1+0.4142\mathrm{i}\quad 0.8341-0.1659\mathrm{i}\quad 0\quad -0.2483+1.2483\mathrm{i}\quad 1+2.4142\mathrm{i}\quad 3.0137+2.0137\mathrm{i}\}$。

为了比较，$\operatorname{Re}F(s)=4\cos5\pi s\operatorname{sinc}4s$ 和 $\operatorname{Im}F(s)=-4\sin5\pi s\operatorname{sinc}4s$。

10. 用实部和虚部表示变换 $V(f)=4(1+\mathrm{i}8\pi f)^{-1}$，如下图所示。应当注意的是它的虚部比实部衰减得慢(这是因为 $v(t)$ 的奇部是不连续的)。下面也给出了 $F(\nu)$ 的实部和虚部以及 DFT。两者的实部在对应于 $0\leqslant\tau\leqslant16$ 的区间 $0\leqslant f\leqslant0.5$ 上吻合得很好。然而，在 $f=0.5$ 的附近，它们的虚部吻合得不是很好。

如果将采样的间隔取为 1 s，那么 $V(f)$ 的虚部将产生混叠，根据虚部的这种混叠现象可以解释上述的情况。由于当 $f=0.5$ Hz 时，$\operatorname{Im}V(f)$ 仍没有衰减到零，因此 1 s 的采样间隔是不够的。在本例中，图中所包括的复制岛(点虚线)$\operatorname{Im}V(f-1)$ 是 $f=0.5$ 附近 FT 和 DFT 之间的主要差别。一般地，更远的谱包 $\operatorname{Im}V(f-n)$ 作用也比较显著。



13. (a) 离散 Hartley 变换的 M- 文件为

```
function y = dht(f,N)
% Discrete Hartley transform of N-element real vector f
F = fft(f);
y = (real(F) - imag(F))/N;
```

(b) 连续使用两次 **dht** 命令将如所期望的那样得到原序列，只是它的大小只有原来的八分之一。为了解决这个问题，可以在逆变换中去掉因子 $1/N$。逆变换 **idht** 的 M- 文件为

```
function y = idht(f,N)
% Inverse disctete Hartley transform of N-element real vector f
F = fft(f);
y = (real(F)-img(F));
```

14. (a) 取中间元素 5 对应 $x=0$，我们可以看到所给定的元素正是函数 $5(1-|x|/5)$ 在 $x=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 处的值。但是这 9 个元素并没有构成整个无穷区间的采样。

(b) 下标 ν 对应于频率 ν/N（每单位 x 的周期数），其中在本例中 N 为 20。因此在 $\nu=4$ 处的第一个零点对应于频率 4/20，这与期望的 $s=1/5$ 是一致的。DFT 与 FT 一致或许是合情合理的，但是在 $\nu=6$，$s=0.03$，sinc^2 函数的第一个旁瓣出现了最大值，其值为 $25\times0.045\,032=1.125\,8$，而 DFT 所得到的值为 1.527 9。这是由重复的混叠造成的，正如我们在 $\nu=20$ 处所看到的峰值一样。通过给样本插入更多的零值，可以将这些混叠推得更远一些。

ν	0	1	2	3	4	5	6	…	20
20×DFT	25	20.43	10.47	2.43	0	1.00	1.53	…	20.43

s	0	1/20	2/20	3/20	4/20	5/20	6/20	…	1
$25\text{sinc}^2 5s$	25	20.26	10.13	2.25	0	0.81	1.13	…	20.43

15. 序列{1 4 **6** 4 1}在均方根宽度和面积方面与函数 $f(x) = (16/\sqrt{2\pi})\exp(-\frac{1}{2}x^2)$ 匹配。变换 $F(s) = 16\exp(-2\pi s^2)$ 所给出的值大体上与 DFT 是一致的。它们如下所示

ν	0	1	2	3	…	8	…	15	16
$16\times$DFT	16	14.80	11.66	7.65	…	0	…	14.80	16
s	0	1/16	2/16	3/16	…	8/16	…	15/16	1
$16\exp(-2\pi^2 s^2)$	16	14.81	11.75	7.99	…	0.115	…	$5/10^7$	$4/10^8$

我们可以看到，如果通过取采样值的 DFT 来求得傅里叶变换，那么精度将是一个主要关注的议题。通过作图可以把 DFT 的值和 $\delta(x+2)+4\delta(x+1)+6\delta(x)+4\delta(x-1)+\delta(x-2)$ 的变换 $6+8\cos 2\pi s+2\cos 2\pi 2s$ 进行比较，从而看出复制的效果。

16. 普通的卷积和为

{1 12 65 208 429 572 429 0 −429 −572 −429 −208 −65 −12 −1}

圆周卷积和为

{−64 0 64 208 429 572 429 0 −429 −572 −429 −208}。

18. (a) MATLAB 程序如下：

```
f = [1 4 6 4 1];
F = fft(f);
G = zeros(1,10);
G(1:3) = F(1:3);
G(9:10) = F(4:5);
h = ifft(G) * 2
```

(b) 为了弥补 N 值由 10 到 5 的变化，对上述结果乘以 2。

(c) 把第三行改为 `G = zeros(1:30)`，第五行改为 `G(29:30) = F(4:5)`。

(d) 作为比较，MATLAB 的内插为

{.1273 **0** .2970 **0** .5516 **1** 2.4190 **4** 5.4323 **6** 5.4323 **4** 2.4190 **1** .5516 **0** .2970 **0** .1273}。

第 12 章 哈特利变换

10. (a) {0 0 0 0 −2 0 0 0}

原序列中没有直流分量，只包含单一频率分量 0.5，因此序列的 DHT 仅在 $\nu/N = 0.5$，或 $\nu = 4$ 处有值。

(b) 功率谱为{0 0 0 0 4 0 0 0}。由于在 $\nu = 1, 7$ 以及 2,6 和 3,5 处都没有频率分量，故除了在 $\nu = 4$ 处以外，功率谱的值均为零。

11. 如果使用足够多的项，一个方波信号可以由傅里叶级数 $r = r_0 + \sum a_n \cos n\theta$ 来逼进。

cas 函数公式不仅是方波信号的简单而精确的方程式，而且具有直接计算的形式。使用 θ 对 $\pm\frac{1}{4}\pi$ 的模也是很令人感兴趣的。

12. 在傅里叶变换情况下，$\mathscr{F}\mathscr{F}f(x) = f(-x)$ 而且函数是反向的，所以经过四次变换可以恢复原始信号 $f(x)$。从这个变换的互易性质可知哈特利变换也具有循环性。

20. 虽然 $\delta'(t)$ 的无穷积分为零，但是从零到无穷积分却不是零，其绝对值从负无穷到正无穷积分亦不为零。因此，δ 函数的导数并不是一个零函数。当然我们也不希望它是零函数。如果以 $A\delta'(t)$ 的力击打一个重 m 的高尔夫球，将给高尔夫球 $(A/m)\delta(t)$ 的速度，且当 $t>0$ 时，使球产生 (A/m) 的位移。而以一个零函数去击打是产生不出任何东西的。

21. 冲激信号位于 ENE（东北东）。Cas 函数变换的周期为 $(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}} = 2d$。因此 $a = \cos 22.5°/2d$，$b = \sin 22.5°/2d$。

22. 令 $F_{\text{real}} = x$，$F_{\text{imag}} = y$。在坐标系统 (x', y') 中，(x', y') 是相对于 (x, y) 旋转 θ 角度得到的坐标系统，

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$y' = y\cos\theta - x\sin\theta$$

当 $\theta = -\pi/4$ 时，可得

$$\sqrt{2}x' = x - y = F_{\text{real}} - F_{\text{imag}} = H(\nu)$$
$$\sqrt{2}y' = x + y = F_{\text{real}} + F_{\text{imag}} = H(-\nu)。$$

这样 $H(\nu) + \mathrm{i}H(-\nu)$ 可以通过 $F_{\text{real}} + \mathrm{i}F_{\text{imag}}$ 旋转 $-\pi/4$ 的角度，大小乘以$\sqrt{2}$ 得到。

23. 由三角函数和的正切公式可得

$$\begin{aligned}\tan(\phi+\pi/4) &= [\tan(\pi/4)+\tan\phi]/[1-\tan(\pi/4)\tan\phi]\\ &= (1+\tan\phi)/(1-\tan\phi)\\ &= (1+F_{\text{imag}}/F_{\text{real}})/(1-F_{\text{imag}}/F_{\text{real}})\\ &= (F_{\text{real}}+F_{\text{imag}})/(F_{\text{real}}-F_{\text{imag}})\\ &= H(-\nu)/H(\nu)。\end{aligned}$$

24. 令 $a = \cos\theta$，$b = -\sin\theta$，$c = 0$，$d = \sin\theta$，$e = \cos\theta$，$f = 0$。

26. ${}^{\text{II}}F(0)$ 的值应等于序列均值除以$\sqrt{2}$。对于 DCT2 的逆变换没有简单的对比关系。关系为

$$f(0) = 2^{-1/2}\,{}^{\text{II}}F(0) + {}^{\text{II}}F(1)\cos(\pi/2N) + {}^{\text{II}}F(2)\cos(2\pi/2N) + {}^{\text{II}}F(3)\cos(3\pi/2N) + \cdots。$$

序列 DCT1 的首元素值为 $N^{-1/2}\Big[f(0)/\sqrt{2} + f(1) + f(2) + \cdots + f(N-1) + f(N)/\sqrt{2}\Big]$，而且由于 DCT1 是对称的，$f(0)$ 的数值可以进行类似的检验。

第 13 章　傅里叶变换近亲

42. 转换为偶函数 $f(|x|)$ 的傅里叶变换，并计算$\int_{-\infty}^{\infty} f(|x|)\cos 2\pi sx\,\mathrm{d}x$。因为 $f(|x|) =$

$\frac{1}{2}\Pi(x)+\frac{1}{2}(1-4x^2)\Pi(x)$，我们可以用已知的矩形函数的变换加上一个二次冲激来求解

$$F_c(s)=\frac{1}{2}\mathrm{sinc}s+\frac{1}{\pi^2 s^2}(\mathrm{sinc}s-\cos\pi s)。$$

通过注意到 $F_c(0)=5/6$，其等于 $f(|x|)$ 下的面积可以进行验证。

43. 既然你不了解这样处理的目的，就弄懂这个作业而言，有效的方法是列出显示你能力的问题。举个例子，需要考虑计算速度吗？一个月做一次的事听起来不是很紧急，但是在月末的工作结束后不久就有一个公开（出版）的最后期限。所以如果速度很关键，你需要开发一种基于将 365 因式分解为 5×73 的快速运算。$f(\tau)$ 的每天波动值不重要吗？你注意到每月平均值被抑制了；解释你如何处理由周末休假引起的 7 天的分量？选择余弦函数是为了抑制 $f(\tau)$ 的奇部吗？如果存在一个每月的周期（例如引入会计实践）那么月末的趋势将受到抑制。你研究一下改变 τ 的原点的影响。最后说明你如何对变换求逆，作为公开的作业，并说一说你的报告同预测顾问相比有何优势。

44. 通过具有慢变折射指数 n 的非同质媒介的光线会有曲率等于 n 在垂直于光线的方向上的梯度的弯曲。由于光线只是轻微地偏离 z 轴，所以 $\mathrm{d}^2r/\mathrm{d}z^2\approx \mathrm{d}n/\mathrm{d}r=-(2n_0/h^2)r$。我们知道 $\mathrm{d}^2r/\mathrm{d}x^2=-\omega^2 r$ 的解为 $A\cos\omega x+B\sin\omega x$，应用边界条件 $r=0$ 和 $z=0$ 时 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}z=\tan i$ 得出

$$r=\omega^{-1}\tan i\sin\omega x,$$

其中 $\omega=\sqrt{2n_0}/h$ 且它通过 $\omega=\pi/2L$ 与四分之一周期 L 有关。因此 $L=\pi h/2\sqrt{2n_0}$。

第 14 章　拉普拉斯变换

3. (a)
$$\begin{aligned}F(p)&=\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(t)e^{-pt}\mathrm{d}t=\int_{-1/2}^{1/2}e^{-pt}\mathrm{d}t\\&=-p^{-1}[e^{-pt}]_{-1/2}^{1/2}\\&=-p^{-1}[e^{-p/2}-e^{p/2}]\\&=2p^{-1}\sinh(p/2)，对所有\ p。\end{aligned}$$

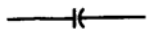
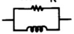
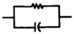
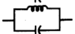
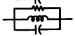
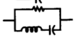
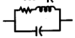
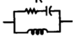
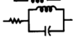
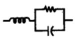
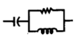
(b) $F(p)=\int_0^1 e^{-pt}\mathrm{d}t=-p^{-1}(e^{-p}-1)$，对所有 p。

(c)
$$\begin{aligned}F(p)&=\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda(t)e^{-pt}\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}(1-|t|)e^{-pt}\mathrm{d}t\\&=\int_{-1}^{0}(1+t)e^{-pt}\mathrm{d}t+\int_0^1(1-t)e^{-pt}\mathrm{d}t\\&=\cdots。\end{aligned}$$

通过简单的积分运算可以得到以上积分的结果，但是如果对(a) 运用卷积定理(311 页) 可得 $F(p)=4p^{-2}\sinh^2(p/2)$，对所有 p。

5. 参见 431 页的表。

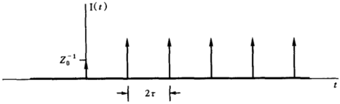
21章习题5的解答

电路	输入	冲激响应	阶跃响应
	R^{-1}	$R^{-1}\delta(t)$	$R^{-1}H(t)$
	$L^{-1}p^{-1}$	$L^{-1}H(t)$	$L^{-1}tH(t)$
	Cp	$C\delta'(t)$	$C\delta(t)$
	$L^{-1}(p + R/L)^{-1}$	$L^{-1}e^{-Rt/L}H(t)$	$L^{-1}(1 - e^{-Rt/L})H(t)$
	$R^{-1}p(p + 1/RC)^{-1}$	$R^{-1}\delta(t) - L^{-1}e^{-Rt/L}H(t)$	$R^{-1}H(t) - R^{-1}(1 - e^{-Rt/L})H(t)$
	$L^{-1}p(p^2 + 1/LC)^{-1}$	$L^{-1}\cos[(LC)^{-1/2}t]H(t)$	$(C/L)^{1/2}\sin[(LC)^{-1/2}t]H(t)$
	$R^{-1} + L^{-1}p^{-1}$	$R^{-1}\delta(t) + L^{-1}H(t)$	$R^{-1}H(t) + L^{-1}tH(t)$
	$R^{-1} + Cp$	$R^{-1}\delta(t) + C\delta'(t)$	$R^{-1}H(t) + C\delta(t)$
	$L^{-1}p^{-1} + Cp$	$L^{-1}H(t) + C\delta'(t)$	$L^{-1}tH(t) + C\delta(t)$
	$R^{-1} + L^{-1}p^{-1} + Cp$	$R^{-1}\delta(t) + L^{-1}H(t) + C\delta'(t)$	$R^{-1}H(t) + L^{-1}tH(t) + C\delta(t)$
	$R^{-1} + L^{-1}p(p^2 + 1/LC)^{-1}$	$R^{-1}\delta(t) + L^{-1}\cos[(LC)^{1/2}t]H(t)$	$R^{-1}H(t) + (C/L)^{1/2}\sin[(LC)^{-1/2}t]H(t)$
	$Cp + L^{-1}(p + R/L)^{-1}$	$C\delta'(t) + L^{-1}e^{-Rt/L}H(t)$	$C\delta(t) + R^{-1}(1 - e^{-Rt/L})H(t)$
	$L^{-1}p^{-1} + R^{-1}p(p + 1/RC)^{-1}$	$L^{-1}H(t) + R^{-1}\delta(t) - L^{-1}e^{-Rt/L}H(t)$	$L^{-1}tH(t) + R^{-1}H(t) - R^{-1}(1 - e^{-Rt/L})H(t)$
	$R^{-1} - R^{-2}C^{-1}p(p^2 + p/RC + 1/LC)^{-1}$	$R^{-1}\delta(t) - R^{-2}C^{-1}(a - b)^{-1}(ae^{-at} - be^{-bt})H(t)$ $a,b = (2RC)^{-1} \mp [(2RC)^{-2} - (LC)^{-1}]^{1/2}$	$R^{-1}H(t) + R^{-2}C^{-1}(a - b)^{-1}(e^{-bt} - e^{-at})H(t)$
	或（等根），$4R^2 = L/C$	$R^{-1}\delta(t) - R^{-2}C^{-1}(1 - ct)e^{-ct}H(t), c = (2RC)^{-1}$	$R^{-1}H(t) - R^{-2}C^{-1}te^{-ct}H(t)$
	$L^{-1}(p + 1/RC)(p^2 + p/RC + 1/LC)^{-1}$	$L^{-1}(b - a)^{-1}[(c - a)e^{-at} - (c - b)e^{-bt}]H(t)$, a, b 同上 , $c = 1/RC$	$L^{-1}(b - a)^{-1}[-a^{-1}(c - a)(1 - e^{-at})$ $+ b^{-1}(c - b)(1 - e^{-bt})]H(t)$
	或（等根），$4R^2 = L/C$	$L^{-1}[1 + (c - d)t]e^{-dt}H(t), c = 1/RC, d = (2RC)^{-1}$	$L^{-1}[cd^{-2}(1 - e^{-dt}) - (c - d)d^{-1}te^{-dt}]H(t)$
	$R^{-1} + (R^2C - L)(R^2LC)^{-1}[p - R(R^2C - L)^{-1}]$ $(p^2 + p/RC + 1/LC)^{-1}$	$R^{-1}\delta(t) + (R^2C - L)(R^2LC)^{-1}(b - a)^{-1}[(c - a)e^{-at}$ $- (c - b)e^{-bt}]H(t), a,b$ 同上 , $c = R(L - R^2C)^{-1}$	$R^{-1}H(t) + (R^2C - L)(R^2LC)^{-1}(b - a)^{-1}$ $[-a^{-1}(c - a)(1 - e^{-at})$ $+ b^{-1}(c - b)(1 - e^{-bt})]H(t)$
	或（等根），$4R^2 = L/C$	$R^{-1}\delta(t) + (R^2C - L)(R^2LC)^{-1}[1 + (c - d)t]e^{-dt}H(t)$, $c = -R(R^2C - L)^{-1}, d = (2RC)^{-1}$	$R^{-1}H(t) + (R^2C - L)(R^2LC)^{-1}[cd^{-2}(1 - e^{-dt})$ $- (c - d)d^{-1}te^{-dt}]H(t)$
	$L^{-1}p(p^2 + pR/L + 1/LC)$	$(2L)^{-1}(a^2 - b^2)^{-1/2}\{[a + (a^2 - b^2)^{1/2}]$ $\exp[-a - (a^2 - b^2)^{1/2}t] - [a - (a^2 - b^2)^{1/2}]$ $\exp[-a + (a^2 - b^2)^{1/2}t]\}H(t)$ $2a = R/L, b^2 = 1/LC$	$(2L)^{-1}(a^2 - b^2)^{-1/2}\{-\exp[-a - (a^2 - b^2)^{1/2}t]$ $+ \exp[-a + (a^2 - b^2)^{1/2}t]\}H(t)$

8. 运用关系式 $\tan ix = i\tanh x$，并注意到阻抗是电抗性的，我们可以把电缆的阻抗表示为 $Z(p) = 75\tanh(10^{-8}p/2\pi) = Z_0\tanh\tau p = Z_0(1-e^{-2\tau p})/(1+e^{-2\tau p})$，其中 $\tau = 10^{-8}/2\pi$ 秒 $= 0.6$ 纳秒是电磁波通过电缆长度所需的时间。显然 12cm 长的电缆是一个合适的长度。

$$\begin{aligned} I(t) &= [Z(p)]^{-1}V(t) = [Z(p)]^{-1}\delta(t) \\ &= \frac{Z_0^{-1}}{1-e^{-2\tau p}}\delta(t) + e^{-2\tau p}\,\frac{Z_0^{-1}}{1-e^{-2\tau p}}\delta(t) \\ &= \frac{Z_0^{-1}}{2\tau}\mathrm{III}\left(\frac{t}{2\tau}\right)H\left(\frac{t}{2\tau}+\frac{1}{2}\right)+\frac{Z_0^{-1}}{2\tau}\mathrm{III}\left(\frac{t-2\tau}{2\tau}\right)H\left(\frac{t-2\tau}{2\tau}+\frac{1}{2}\right)。\end{aligned}$$

其中的一项来自表 14.2，第二项是第一项延时 2 秒（往返回响时间）所得的结果，可通过移位定理求得。最后的结果如下图所示：



电流幅度加倍发生在第一个电流脉冲之后，这是由于反射波的瞬时叠加而引起的。

由于传统表达形式十分庞大，所以只给出本题的运算过程。

10. 通过检查

$$\begin{aligned} I(p) &= \frac{1}{R+1/Cp}\,\frac{p}{p^2+\omega^2} \\ &= R^{-1}\frac{p^2}{(p+\alpha)(p^2+\omega^2)} \qquad \text{其中 } \alpha = 1/RC \\ &= R^{-1}\left[\frac{A}{p+\alpha}+\frac{B}{p+i\omega}+\frac{C}{p-i\omega}\right] \end{aligned}$$

其中

$$A = \alpha^2/(\alpha^2+\omega^2),\ B = \omega/2i(\alpha-i\omega),\ C = -\omega/2i(\alpha+i\omega)$$

这样

$$\begin{aligned} I(t) &= R^{-1}[\alpha^2(\alpha^2+\omega^2)^{-1}e^{-\alpha t} + Be^{-i\omega t} + Ce^{i\omega t}]H(t) \\ &= R^{-1}(\alpha^2+\omega^2)^{-1}[\alpha^2 e^{-\alpha t} + \omega^2\cos\omega t - \omega\alpha\sin\omega t]H(t) \\ &(1+\omega^2C^2R^2)^{-1}[R^{-1}e^{-\alpha t} + R\omega^2C^2\cos\omega t - wC\sin\omega t]H(t)。\end{aligned}$$

13. 假定稳定的直流电流 $I(t) = H(t)$ 在 $t = 0$ 时刻出现于并联的 LC 电路，电路的 $Z(p) = Lp(LCp^2+1)^{-1}$，通过以下表达式可计算电压

$$\begin{aligned} V(t) &= Z(p)H(t) = Z(p)p^{-1}\delta(t) \\ &= C^{-1}(p^2+1/LC)^2\delta(t)。\end{aligned}$$

由拉普拉斯变换表可知

$$V(t) = C^{-1}\omega^{-1}\sin\omega t H(t)。$$

14. 考虑电流 $\sin\omega t H(t)$ 通过一个 LC 串联电路，电路的 $Z(p)=Lp+(Cp)^{-1}$。电压 $V(t)$ 可以用运算符表示为

$$V(t)=[Lp+(Cp)^{-1}]\sin\omega t H(t)。$$

由表 14.2 可得

$$\sin\omega t H(t)=\omega(p^2+\omega^2)^{-1}\delta(t)。$$

因此

$$\begin{aligned}V(t)&=[Lp+(Cp)^{-1}]\omega(p^2+\omega^2)^{-1}\delta(t)\\&=\frac{LCp^2+1}{Cp(p^2+\omega^2)}\omega\delta(t)\\&=L\omega p^{-1}\delta(t)\qquad \text{如果 } \omega^2=1/LC\\&=L\omega H(t)。\end{aligned}$$

这样，通过它，电路中的交流电流与直流电压的出现联系了起来。直流电压完全出现在电容两端，交流电压出现在电感与电容上，但是电路组合的两端没有交流电压。

21. 参见逆积分(308 页)，同一个拉普拉斯变换存在多个与之对应的时域函数的标准解释，并且指出由常数 c 所确定的积分路径与变换的极点有几种十分不同的关系。因此，对于本问题极点位于 $p=2,1$ 和 -1，我们可以选择 $2<c$，$1<c<2$，$-1<c<1$ 或 $c<-1$ 进行积分从而得到不同的结果。

下述定理可提供该问题的另外一个解释，如果对实数 α

$$e^{-\alpha t}H(t)\supset F(p)\qquad -\alpha<\mathrm{Re}p$$

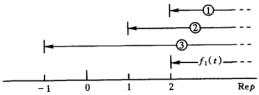
那么

$$-e^{-\alpha t}H(-t)\supset F(p)\qquad \mathrm{Re}p<-\alpha。$$

现在

$$f_1(t)=\left[\frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{6}e^{-t}\right]H(t)\supset\frac{1}{(p-2)(p-1)(p+1)}\qquad 2<\mathrm{Re}p。$$

正如我们从下图所示的三项的收敛域图所看到的那样，收敛域是由包含 e^{2t} 的项所决定。



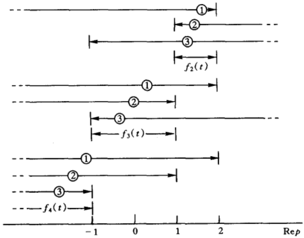
现在，通过所示的那样改变一项或多项，考虑下面的由函数 $f_1(t)$ 衍生所得的函数：

$$f_2(t)=-\frac{1}{3}e^{2t}H(-t)-\frac{1}{2}e^{t}H(t)+\frac{1}{6}e^{-t}H(t)\qquad 1<\mathrm{Re}p<2$$

$$f_3(t)=-\frac{1}{3}e^{2t}H(-t)+\frac{1}{2}e^{t}H(-t)+\frac{1}{6}e^{-t}H(t)\qquad -1<\mathrm{Re}p<1$$

$$f_4(t) = -\frac{1}{3}e^{2t}H(-t) + \frac{1}{2}e^{t}H(-t) - \frac{1}{6}e^{-t}H(-t) \qquad \mathrm{Re}\,p < 1。$$

下图说明了三项公共收敛域的存在区间。



23. 如果在 $v(t)H(t)$ 作用之前电路没有储能，则从 $0- \sim \infty$ 区间的积分等于 $-\infty \sim \infty$ 区间的积分，因为 $-\infty \sim 0-$ 区间的积分值为0。这种情况与双边拉普拉斯变换相同，而且特殊变换的定理与表 14.1 中双边变换的定理一样。和 320 页中的例子一样，没有理由引入表示 $f(0+)$，$f'(0+)$ 等初始状态的项。

但是，如果 $v(t)H(t)$ 引入之前系统已经具有能量，则表达式需要进行调整。初始状态 $f(0-)$，$f'(0-)$，… 的值可以充分描述系统先前的状态。$f'(t)$ 的特定变换可以通过分部积分计算如下。

$$\int_{0-}^{\infty} e^{-pt} f'(t)\,dt = [e^{-pt} f(t)]_{0-}^{\infty} + p\int_{0-}^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$$
$$= -f(0-) + pF_-(p)。$$

类似地

$$\int_{0-}^{\infty} e^{-pt} f''(t)\,dt = [e^{-pt} f'(t)]_{0-}^{\infty} + p\int_{0-}^{\infty} e^{-pt} f'(t)\,dt$$
$$= -f'(0-) - pf(0-) + p^2 F_-(p)。$$

例 与电阻、电容串联的电压源产生电压 $V_0(t)H(t)$，但是就在电压从 0 跃升到 V_0 时刻之前，电流 I_0 流入电路。求后继的电流。

微分方程如下

$$C^{-1}I(t) + RI'(t) = V_0\delta(t)。$$

辅助方程为 $$C^{-1}\bar{I}(p) + R[p\bar{I}(p) - I_0] = V_0。$$

横杠表示特定变换，而且我们已经用了微分定理。求出 $\bar{I}(p)$ 为

$$\bar{I}(p)=\frac{V_0+RI_0}{Rp+C^{-1}}=(V_0R+I_0)\frac{1}{p+R^{-1}C^{-1}}。$$

进行反变换可得　　$I(t)=(V_0/R+I_0)e^{-t/RC}\quad t>0$。

（证明无论积分下限选为 $0-$ 或 $0+$，$e^{-t/RC}$ 的变换都是相同的）

注释　注意到诸如 $I(0+)$ 这样的后初始值是不需要的。给定先前时间的状态和激励求后继响应比给定激励和部分响应求后继响应似乎要自然得多。

25. 对微分方程逐项进行拉普拉斯变换

$$sY(s)+Y(s)=0$$
$$(s+1)Y(s)=0$$
$$Y(s)=0+k\delta(s+1)$$

由于 $Y(s)$ 在 $s+1=0$ 处含有一个强度为任意 k 值的冲激。进行反变换有

$$y(t)=ke^{-t}$$

且 k 的值由 $y(0+)$ 处的初始电导确定。

26. 这个有趣的问题反映了两个哲学观点。首先，我们通过构造如下的辅助方程来处理它

$$_0\bar{I}(p)Lp+{}_0\bar{I}(p)R={}_0\bar{V}(p)。$$

下标零表示单边拉普拉斯变换。因为 $t=0$ 时刻电路是静止的，所以不需要包含 $I(0+)$ 的项。因此，第一个结论是，在传统的初值问题中（320 页），等式右边的初值的出现局限于开关状态在 $t=0$ 发生变化的情况。对于与之实质相同，区别仅在于开关状态变化时间稍后的情况，这些项就是不必要的。可是，我们仍然希望得到解。接下来，我们解出 $_0\bar{I}(p)$

$$_0\bar{I}(p)=\frac{_0\bar{V}(p)}{Lp+R}。$$

考虑 $V(t)=H(t-1)$ 的特殊情况，我们知道解一定是

$$I(t)=R^{-1}(1-e^{-R(t-1)/L})H(t-1)。$$

由于

$$H(t-1)\supset p^{-1}e^{-p}$$

$$_0\bar{I}(p)=\frac{p^{-1}e^{-p}}{Lp+R}=R^{-1}e^{-p}\frac{R/L}{p(p+R/L)}。$$

由 314 页可得　　$I(t)=R^{-1}(1-e^{-(R/L)(t-1)})H(t-1)$。

这就是正确的响应。

如果 $t=0$ 时刻已经有电压作用于电路，求解需要条件 $I(0+)$；但本题的求解不需要类似的 $I(1+)$ 条件。

第二条结论为，为什么当我们求解响应的过程中需要如初始值之类的响应电流的部分信息。在给定电路（或电路微分方程），激励电压，某些情况下还提供 $I(0+)$，$I'(0+)$，$I''(0+)$，…，是否也需要类似信息？换句话说，通过某种方式，我们可以求解下一步发生的情况。书中出

现的非实数的问题，其中一个原因在于书中微分方程的传统边界条件(例如已知高度和抛射角度，求解球的飞行轨迹)未加注意地直接由空域变换到时域。

27. 设 $I(t)=\delta(t)+a\delta(t-1)+a^2\delta(t-2)+\cdots$

则 $$\bar{I}(p)=1+ae^{-p}+a^2e^{-2p}+\cdots=(1-ae^{-p})^{-1}。$$

就频率而言，传递函数 $T(f)$ 由下式给定

$$T(f)=(1-ae^{-i2\pi f})^{-1}。$$

一个电阻与一个有耗非扩散短路传输线并联可以得到这个结果。

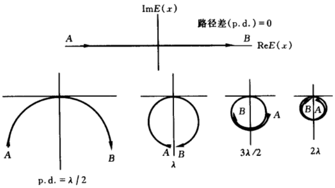
30. 将 $\mathrm{III}(t)H(t)$ 表示为奇函数与偶函数之和：$\mathrm{III}(t)H(t)=\frac{1}{2}\mathrm{III}(t)+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}t$。$\frac{1}{2}\mathrm{III}(t)$ 的拉普拉斯变换是$\frac{1}{2}\mathrm{III}(f)$，它补充了丢失的变换偶部。

第 15 章 天线和光学

1. 用一些诸如半功率方向间的角度等通用测量方法，测得的具有相等波束宽度的两个天线的角度谱的等效宽度可能会十分不同。例如，由于 $P(s)$ 会在符号与 $P(0)$ 相反的方向上，$\int P(s)ds$ 的值对旁瓣的符号很敏感，而旁瓣的符号对波束宽度的概念几乎没有影响。作为一个极端的例子，两个孔径分布$\Pi(x/1000\lambda)$ 和$\Pi(x/1000\lambda)-\Pi(x/10\lambda)$ 十分相似，而且具有相似的波束，但是第二个的角度谱的等效宽度是零。

另一种反对的理由是，可以通过移相移动天线的波束，而根本不改变它的波束宽度(用半峰值点间的 s 的单位来衡量)。而此时，$P(s)$ 的等效宽度会出现变化，因为 $P(0)$ 改变了。

2. 图表就是图 2.10(15 页)以及习题 2.20 和 2.21 的答案中所示的那种图表。由光衍射引起的 Cornu 螺线是这种图形。虽然通常认为函数域和变换域是不同的，但是值得注意的是，这些图的平面可以等效地看作是照度场 E 或角度谱 P 的复平面。向量 AB 是基本向量 $E(x/\lambda)d(x/\lambda)\exp(-i2\pi sx/\lambda)$ 的组合，对特定的方向值 s，它给出了幅度和相位的角度谱，每个图中的弧长是相同的。

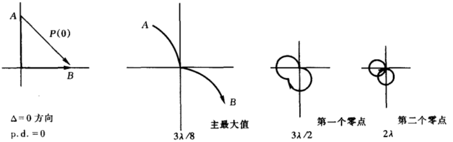


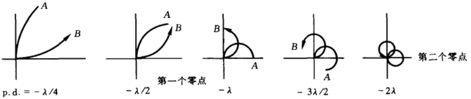
5. 每边的第一个零点位于孔径的端元件的路径差等于 $-\lambda/2$ 的地方，第二个零点处的路径差是 -2λ，第三个零点位于路径差等于 -2.5λ 的地方。在垂直于孔径的方向上(到端元件的

路径差等于 0)，所得的向量 AB 的大小是 AB 弧长的 $2^{-1/2}$ 倍。逐渐离开法线，我们可以形象地看到，结果向上面提到的一边(见 p.d. $=-\lambda/4$) 减小，但向另一边增加。用 $E(\xi)=-\mathrm{i}\Pi(2\xi-\frac{1}{2})+\Pi(2\xi+\frac{1}{2})$ 来表示孔径分布，其中 $\xi=x/w$，w 是全孔径宽度。我们得到角度谱

$$P(s)=(w/\lambda)\left[-\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\pi\sigma}\frac{1}{2}\operatorname{sinc}\sigma+e^{\mathrm{i}\pi\sigma}\frac{1}{2}\operatorname{sinc}\sigma\right]$$

其中 $\sigma=ws/2\lambda$。为了确定主最大值的位置，我们可以解 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}s=0$，它是相当冗长的。或者我们可以通过草图知道 $p.d.=3\lambda/8$ 附近有一个最大值，然后可以计算出大小为 $1.85P(0)$，当然，由对称性，相位是 $-45°$。





7. 通过直接积分我们可以得到 $n=0$ 到 7 的值。在中心极限定理(134 页)条件下所述的粗略的近似可得到 n 较大时的近似为 $(n\pi/2)^{1/2}$。

n	有效波束宽度	$(n\pi/2)^{1/2}$	n	有效波束宽度	$(n\pi/2)^{1/2}$
0	1		4	$8/3=2.67$	2.51
1	$\pi/2=1.57$	1.25	5	$15\pi/16=2.95$	2.80
2	2	1.77	6	$16/5=3.20$	3.06
3	$3\pi/4=2.36$	2.17	7	$35\pi/32=3.44$	3.32

10. 由于天线孔径具有有限范围(如 N 个波长)，它的角度谱在超过 $\frac{1}{2}N$ 的空间频率上(用每单位 s 的周期数度量)上是无效的，而且它的功率辐射方向图不包含高于 N 的空间频率。相应地，在焦距 f 的抛物面反射器的焦平面上形成的射电图像也缺乏细节。在空中的临界空间正弦周期为 N^{-1} rad，在焦平面上的周期为 fN^{-1} m。临界采样间隔为 $\frac{1}{2}fN^{-1}$ m。通常，在抛物面焦点处的收集器要设计得使其波束充满抛物面的边缘在焦点处所对的主体角。圆锥的角度为 $2\arctan(\frac{1}{2}N\lambda/f)$，或近似为 $N\lambda/f$ rad。由焦点收集器可得到的波束宽度约为 fN^{-1} m。这些计算验

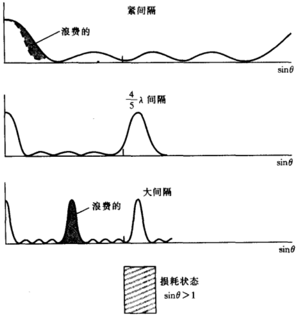
证了焦点收集器的大小实际上可以看作是一个能在焦平面上容纳一个图像单元的器件。

11. 一种方法是建立一个针孔摄像机，即含有一个针孔的不透明材料片，其后有一个照相底版或其他的探测器阵列。

如果光强如此之低，以至于需要一个不合理的低曝光时间，那么可以增大孔的尺寸。如果由于增加孔的尺寸而导致的模糊成为限制的条件，可以通过使用任意分布的几个小孔增加灵敏度。这将得到能组合的微弱图像的叠加。例如，通过对完整图像做自相关。就像使用所有的自相关函数那样，将会损失相位信息。

另一种方法是利用 X 射线在从高的切线方向入射时发生反射这一事实，实际上这使波长变长了。远离顶点和焦点的抛物面环就像一个透镜一样。

16. 地面上垂直于飞机下面的场强与缝隙的间隔无关这句话是正确的（假设缝隙场保持一致）。然而，由此就推出允许将缝隙紧靠在一起是错误的。因为增益最大值不仅与垂直于下面的场强有关，而且还与为了保持它所要求的输入功率有关。结构专家虽然有宽广的知识背景，但是他没有考虑到这一点。因此，对他的话只能给予尊敬，因为一个专家讲了外行话。



天线专家的助手，一个有数学倾向的同事，他所说的功率辐射是通过每个缝隙的功率和是正确的，当然说的是时间平均功率。然而瑞利定理适用于逐时刻的情况，而且在某一时刻通过缝隙的功率在四分之一周期后可以流回来。这就是被产生损耗波但根本不辐射的场所激励的孔径的情况。实际的天线问题涉及一些这种功率流。

为了在保持垂直下面场相同的同时使增益最大化，我们必须使 $\iint 2\pi P_n(\theta,\varphi)\mathrm{d}\Omega$ 最小化。

图中，所有的情况在轴上的辐射都相同。紧间隔的情况出现的是一个胖波束，这意味着有功率在不期望的方向上浪费了。大间隔的情况说明在光栅旁瓣中浪费了一些功率。最优的情况恰好发生在第一个旁瓣从损耗状态（$\sin\theta>1$）过渡到辐射状态时。这种最优的情况是最平的

一个，实际上，它的间隔是 4/5 波长的量级。

18. 考虑半径为 a 的环上的 96 个等间隔二维单位冲激函数。完全相反的一对位于 $(a, 2\pi p/96)$ 和 $(a, \pi + 2\pi p/96)$，其中 $p = 1, 2, \cdots, 48$，它们的角度谱具有余弦波纹的形式，等值线垂直于两个冲激函数的连线或 $2\cos(2\pi aQ/\lambda)$，其中 Q 是垂直于等值线度量的。对 (l, m) 平面上的任一点，$Q = l\cos(2\pi p/96) + m\sin(2\pi p/96)$。把 48 对冲激函数的贡献加起来，我们可以得到 96 个冲激函数的角度谱是

$$\sum_{p=0}^{47} 2\cos\{(2\pi a/\lambda)[l\cos(2\pi p/96) + m\sin(2\pi p/96)]\}。\quad (1)$$

如果累加到 $p = 95$，所得是上述结果的两倍。注意到 $a/\lambda = 214$（而不是 430）。

现在用 q 表示 (l, m) 或角度谱平面中的半径变量，而不是题目中的 r，保留 r 用作天线平面或 (x, y) 平面中的半径变量。

当点数相当大时，点冲激的集合就像一个由 $96(2\pi a/\lambda)^{-1}\delta(r - a/\lambda)$ 确定的强度为 96 的环冲激，其中 r 是天线平面中的无量纲的半径坐标，用波长度量。事实上，这个环冲激可以看作是来自于由 96 个冲激组成的周期角度函数的傅里叶级数 $96(2\pi a/\lambda)^{-1}\delta(r - a/\lambda)(1 + \sum_{1}^{96} 2\cos n\theta)$ 中的第一个常量。从变换对

$$\delta(r - a/\lambda)^2 \supset (2\pi a/\lambda) J_0(2\pi aq/\lambda)$$

我们知道，这个首项变换对是一个 J_0 函数。稍后我们建立更一般的变换对

$$\delta(r - a/\lambda)\cos 96n\theta^2 \supset (2\pi a/\lambda) J_{96n}(2\pi aq/\lambda)\cos 96n\theta,$$

其中 $r = \lambda^{-1}(x^2 + y^2)^{1/2}$，$x$ 和 y 是天线平面中的直角坐标。因此，角度谱正比于

$$J_0(2\pi aq/\lambda) + \sum_{n=1}^{96} 2J_{96n}(2\pi aq/\lambda)\cos 96n\theta。$$

如果我们不处理冲激函数，而是处理角度谱是 $P(q)$ 的阵元，那么前面的阵列因子要乘以 $P(q)$（330 页）。

贝塞尔函数 $2J_{96}(2\pi aq/\lambda)$ 在 $2\pi aq/\lambda = 99.72$ 附近有一个最大值 0.29，而且对较小的参数来说它相当小，大致随 $(2\pi aq/\lambda)^{96}$ 变化。它的第一个零点位于 $2\pi aq/\lambda = 104.72$。在此附近，二次项 J_{198} 绝对可以忽略。在原点附近，两项都是可忽略的。所以衍射方向图以相当高的精度正比于 J_0^2，在 $2\pi aq/\lambda = 100$ 附近，从渐近表达式 $(2/\pi z)^{1/2}$ 计算出的 $J_0(z)$ 的包络大约为 0.08，因此与 $2J_{96}(z)$ 相互配合产生重要的强度变化。

图中给出了相应于 $p = 0, 1, 2$ 的余弦波纹的正的峰值线。显然，因为 J_0 可以定义为阵元数趋于无穷时（见 271 页脚注）的这种和的极限，所以这种波纹的和近似为 J_0 函数。下一个感兴趣的点是 A，在 A 点，许多正的波峰互相增强，同样的在 B，C 点也一样。相似的增强还出现在 96 个更远的点 A'，B' 等，这些点离原点大约 2 倍的距离，可以推广到更高阶。

虽然 A，B 间的中点是波纹波谷的增强点，但是因为 p 的其他值上的波纹往往会补偿那里的波峰，所以在本例中这不是最大强度。即便如此，对计算强度分布来说，(1) 是一个十分好的公式。为了分析在一阶栅栏响应中发生了什么，更直接的办法是考虑 $[J_0(z) +$

$2J_{96}(z)\cos 96\theta]^2$。知道 $J_0(z) \sim (2/\pi z)^{1/2}\cos(z-\pi/4)^{96}$ 是十分有用的，$J_n(z)$ 的第一个最大值在 $z = n + 0.81n^{1/3}$ 附近，相邻零点在 $z = n + 1.86n^{1/3}$ 附近(Abramovitz 和 Stegun，371 页)。

习题 15.18 的附录

为了证明

$$\delta(r - a/\lambda)\cos n\theta^2 \supset (2\pi a/\lambda)\cos n\varphi(-\mathrm{i})^n J_n(2\pi aq/\lambda)$$

我们需要借助基本积分

$$J_n(z) = \frac{\mathrm{i}^{-n}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos n\beta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}z\cos\beta}\mathrm{d}\beta$$

(Abramovitz 和 Stegun，p. 360，no 9.1.21.)

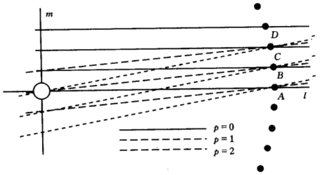
$$\begin{aligned}
F(l,m) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(lx+my)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi qr\cos(\theta-\varphi)} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty}\delta(r - a/\lambda)\cos n\theta\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi qr\cos(\theta-\varphi)}\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\cos n\theta\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi q(a/\lambda)\cos(\theta-\varphi)}(a/\lambda)。
\end{aligned}$$

令 $\beta = \theta - \varphi$，那么

$$\begin{aligned}
F(l,m) &= (a/\lambda)\int_0^{2\pi}\cos[n(\beta+\varphi)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi q(a/\lambda)\cos\beta}\mathrm{d}\beta \\
&= (a/\lambda)\cos n\varphi\int_0^{2\pi}\cos n\beta\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi q(a/\lambda)\cos\beta}\mathrm{d}\beta + \text{零项} \\
&= (2\pi a/\lambda)\cos n\varphi\, \mathrm{i}^n J_n(-2\pi aq/\lambda)。
\end{aligned}$$

作为一个特例，　　$\delta(r - a/\lambda)\cos\theta^2 \supset -\mathrm{i}(2\pi a/\lambda)\cos\varphi J_1(2\pi aq/\lambda)$。

在它自己的平面上旋转 $f(x,y)$，相当于把二维傅里叶变换旋转相同的角度。因此，两边的 cos 可以用 sin 代替。由叠加定理，$\cos\theta$ 可以替换为 $\exp \mathrm{i}\theta$，$\cos\varphi$ 可以替换为 $\exp \mathrm{i}\varphi$。



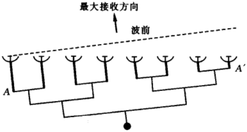
19. 通过如图所示的那样引入额外的传输线长度，天线阵可以正确地定相于一个特定方

向上的点。如果传输线是充气的，使得线中的波束和自由空间中的波束相同，那么，额外的长度（粗线）使得传输线设计具有平行于最大接收方向的波前方向 AA'。这样的阵列在某个时刻只能定位在一个方向上，这是因为由传输线长度引入的沿阵列方向的相位差是固定的。

海床上的压力计阵列也可以用相似的方法通过管道链接在一起，但是如果使用的是独立的压力计，他们可以通过人工引入时延（等于由管道系统的额外长度引入时延）而叠加起来。因此，一个阵列记录系统可以对几个方向(8 个?)进行事后处理。用一个接收器，我们在一个时刻只能注意一个方向。

相似的使用多个接收机的射频系统要求本振频率在观察期上稳定到远小于一个射频周期。在一定的代价下这是可以的。一个更实际的过程是：把天线输出分成几路，而且对许多通过直接耦合形成的两天线组合使用许多接收机。(Proc. IEEE, vol. 61, no. 9, pp. 1249-1257, September 1973).

在开阔的海洋上对海洋行波进行测向，原理上非常容易，但是在靠近海岸的地方，由于反射和折射而使问题变得复杂。波束 C 与水深 h 有关，关系为 $v^2 = (g\lambda/2\pi)\tan(2\pi h/\lambda)$。在深海，1 km 的波行进速度为 39 $\mathrm{ms^{-1}}$（频率为 0.39 Hz）。但是在大陆架上($h = 200$ m)，波的速度会降低，而且，折射会改变波的方向。在更浅的海水中，波的方向几乎垂直于海岸线，而与原始方向无关。海岸的散射和折射进一步混淆了位置。



21. 设 e_j 是第 j 个阵元传送给公共点的瞬时电压。两个射频电压的积包含一个我们感兴趣的稳定的或慢变的分量，以及一个两倍射频频率处的分量。我们用时间平均括号〈 〉表示对它的滤除。干涉仪的响应正比于由两边传送的电压之积的时间平均，或

$$\langle (e_1 + e_2 + \cdots e_{16})(e_{16.5} + e_{32.5}) \rangle$$
$$= \langle (e_1 e_{16.5} + e_2 e_{16.5} + \cdots + e_{16} e_{16.5}) + (e_1 e_{32.5} + e_2 e_{32.5} + \cdots + e_{16} e_{32.5}) \rangle。$$

32 项中的每一项都是两元干涉仪的响应，因此 $\langle e_i,\ e_j \rangle$ 项是间隔 $(j-i)a/\lambda$ 的两元干涉仪的响应，其中 λ 是波长，a 是用与 λ 相同的单位表示的 x 的单位。设 $\psi = \pi a s/\lambda$，其中 $s = \sin\theta$，与 326 页相同。那么

$$\langle e_i e_j \rangle \propto \cos[(j-i)\Psi],$$

与从两个间隔 $(j-i)a$ 的窄带天线的角度谱直接推出的一样。因此，总的响应为

$$(\cos\psi + \cos 3\psi + \cdots + \cos 5\psi) + (\cos 33\psi + \cdots + \cos 63\psi)。$$

我们把这个表达式看作一个傅里叶级数；通用的公式为

$$2\sum_{n=1,3,5\cdots}^{N-1} \cos n\Psi = \frac{\sin N\Psi}{\sin\Psi} \qquad (N\ 为偶数) \tag{1}$$

对 $N=64$，半响应的宽度为 $\Delta\Psi=0.059$ 或 $\Delta s=0.019\lambda/a$。

长度为 $47a/\lambda$ 的单个天线的功率响应为 $\text{sinc}^2(48as/\lambda)$；由于 $\text{sinc}^2 0.44=0.5$，所以半响应宽度为 $\Delta s=0.018\lambda/a$。因此值得注意的是，干涉仪的波束宽度与传统阵列的波束宽度相似，大约是其一半。这个事实与干涉仪的电平传输函数有关，它与传统天线对低空间频率的重点强调相反。

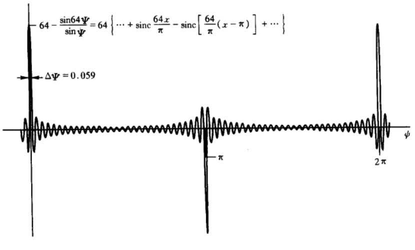


图 21.15.21　18 元阵列的方向图

题中所述的天线阵在 9.107 cm 的波长，83.68 波长的间隔上得到了证实，所达到的波束宽度为 52 弧秒(arcseconds)(Astrophys. J., vol. 138, pp. 305-309, 1963)。这是一个天线首次达到人眼的分辨率。这种突破基于一种新技术，即均衡传输线的长度以达到测地学的精度，约为 $1/10^5$(IRE Trans. Ant. Prop., vol. AP-9, pp. 22-30; 75-81, 1961)。

190 页(以及图 10.12) 的傅里叶级数方法可以应用于当前的周期函数。

$$2\sum_{n=1,3,5\cdots}^{N-1}\cos nx\supset\sum_{n=1,3,5\cdots}^{N-1}[\delta(s+n/2\pi)+\delta(s-n/2\pi)]$$
$$=\pi\text{III}\left[\pi\left(s-\frac{1}{2}\pi\right)\right]\Pi(\pi s/N)。$$

由逆移位定理，注意到

$$e^{ix}\text{III}(x/\pi)\supset\pi\text{III}\left[\pi\left(s-\frac{1}{2}\pi\right)\right],$$

而且，在 $x=m\pi$ 处，$e^{ix}=(-1)^m$，$\text{III}(x/\pi)$ 的冲激也出现在这里，我们知道

$$[e^{ix}\text{III}(x/\pi)]*[(N/\pi)\text{sinc}(Nx/\pi)]=(-1)^m N\sum_{m=-\infty}^{\infty}\text{sinc}[(N/\pi)(x-m\pi)] \qquad (2)$$

通过卷积定理变换成(2)。形式(2) 是一组交替符号的窄 sinc 函数，是紧凑形式(1) 的一种替换品。通过把 $2\cos nx=e^{ix}+e^{-ix}$ 代入(1) 并对所得几何级数的 N 项求和可以推出(2)。

24. (a) 设 $E(x/\lambda,\ y/\lambda)$ 表示孔径分布，其傅里叶变换为 $P(l,m)$，并设(R,S) 是相对于$(x/\lambda,\ y/\lambda)$，在同一平面中逆时针旋转一个角度 α 的一个坐标系统。设 $g_\alpha(R)=\int_{-\infty}^{\infty}E(x/\lambda,y/\lambda)\mathrm{d}S$。$g_\alpha(R)$ 的一维傅里叶变换是一个 α 方向上通过 $P(l,m)$ 的一个横截面(剖面)。让我们比较由 $g_0(R)$ 和 $g_{\pi/2}(R)$ 的傅里叶变换得到的主剖面：

$$P(l,0)=\sqrt{3}\,\mathrm{sinc}^2 l \tag{1}$$

$$P(0,m)=\frac{\sqrt{3}}{2}[\mathrm{sinc}^2\sigma+(\mathrm{i}\pi\sigma)^{-1}(1-\cos\pi\sigma\,\mathrm{sinc}\sigma)] \tag{2}$$

其中 $\sigma=(\sqrt{3}/2)m$。令 $P(l_0,0)=|P(0,m_0)|=0.707$。那么我们可得 $l_0=0.502$ 以及 $m_0=0.492$。因此，半功率围线是十分圆的(1% 内的圆)。尽管孔径是三角形状的，半功率围线内的围线甚至更圆。显然，$P(l,m)$ 的中心曲率与方向不是强相关的。

(b) 根据二阶矩定理(273 页)，二维变换的中心曲率正比于原函数的二阶矩。所以，我们可以通过分析三角形孔径的二阶矩来研究原点附近的 $P(l,m)$ 的性质。如果我们把问题转化为力学问题，问题就是一个三角叶片相对于位于三角平面上且在一个方向 α 上通过其质心的轴的惯性矩问题。一个浅盘的惯性矩 I_α 与轴的位置 α 角有关，如果在极坐标中做出 I_α 对 α 的图形，结果是一个中心椭圆。[如果从惯性主轴度量 α，关系为 $I_\alpha=I_{xx}\cos^2\alpha+I_{yy}\sin^2\alpha$。] 只有具有三个对称轴的椭圆(这也是一个等边三角形的要求)是一个圆。因此，三角形的惯性矩或二阶矩与方向无关。相应地，$P(l,m)$ 的中心曲率确实与方向无关。这是理解为什么围绕原点的围线近似是圆的一种方法。

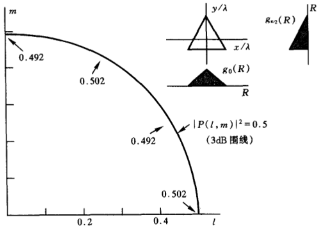


图 21.15.24　三角形孔径方向图的 3dB 围线近似是圆的

在远离原点的地方，方向图 $|P(l,m)|^2$ 相对于角度一定是周期的，周期为 60°，也即它是六重对称的。其原因是在通过波束轴的任何平面上，功率辐射方向图都是一个偶函数。从图 1，我们可以看出和圆的小偏差是间隔 60° 的六瓣形式。图中的数字表示的是半径距离。

(c) 由(1)，我们知道 $P(l,0)$ 的零点位于 $l=\pm1,\pm2$，等。但由(2)，我们可知，在 m 轴上没

有零点，因为在那些点上实部是零而虚部非零，而且在点 $m=0$ 虚部为零实部非零。因此 $|P(0,m)|^2$（它是实部和虚部的平方和）根本就没有零点。所以，我们可以说主波束附近没有零值围线。（这并不是说没有零值围线。但是此刻，我们不能说 l 轴上的零点是否是孤立的点，或者是在闭环上，或者是在趋于无穷的轴上。）

26. 阵元间的间隔为 L_λ 的孔径分布是

$$\left[\delta(x_\lambda+\frac{1}{2}L_\lambda)+\delta(x_\lambda-\frac{1}{2}L_\lambda)\right]*E_0(x_\lambda),$$

所以场辐射方向图正比于 $\sin\pi L_\lambda s$ 乘以一个单元阵的宽带角度谱。功率方向图的最里边的最大值位于 $s=\pm\frac{1}{2}L_\lambda$。对于 s 为 $0.5''=2.4\times10^{-6}$ 弧度意味着 $L_\lambda=2.1\times10^5$。在波长 $\lambda=10\ \mu\text{m}$ 处，干涉仪的基线长度近似为 4 m。这个方案在自然杂志上推出(Nature, vol274, p780-781, 1978)并用于观察恒星 Betegeuse 的最近一次环绕。它太暗了以至于用普通的天体摄影术不能看到它。(Nature, vo395, pp251-253, 1998)

27. (a) 整个宽度是 10 个波长。

(b) $E(\xi)$ 的傅里叶变换是 $(20/\pi^2s^2)(\text{sinc}10s-\cos10\pi s)$。

(c) 对 $P(s)$ 列表可知最小值 -0.0865 位于 $s=0.01835$，对应的电平为 $20\log0.0865=21\text{dB}$。

第 16 章　在统计学中的应用

3. 如果你购买了 10 000 个普通的 1% 精度的 100 Ω 电阻，你能合理地期望它们的平均阻值在 99 ～ 101 Ω 之间。你几乎不能期望制造商在测试其 1% 产品时控制各种气象因素（温度、湿度、触点清洁度、技术人员的监督、仪表的绝对校准等）以使它的电阻测量与国家科技局的要求一致从而好于 1%。如果你的 10 000 个 1% 电阻的平均阻值是 100.1 Ω，而且串联电阻的总阻值是 1 001 000 Ω，那么这是不合理的。如果你从相同的原始批次中重复购买许多次，阻值的散布程度的确可能不超过万分之一；但是均值和绝对标准值的不一致可能会超过万分之一。

8. 一个正的概率分布 $P(x)$ 可以表示为 $|f(x)|^2$。设 $f(x)$ 的傅里叶变换为 $F(t)$。那么，如果 $\phi(t)$ 是 $P(x)$ 的傅里叶变换，

$$P(x)\supset\phi(t);$$

由自相关定理(97 页)可得

$$\phi(t)=F(t)\star F(t)。$$

把以上关系总结如下：

$$f(x)\supset F(t)$$
$$|f(x)|^2\ \text{或}\ P(x)\supset F\star F\ \text{或}\ \phi(t)。$$

一个特例是

$$\text{sech}\pi x\supset\text{sech}\pi t$$
$$\text{sech}^2\pi x\supset 2t\,\text{cosech}\pi t$$

因此 $2t\operatorname{cosech}\pi x$ 是 $\operatorname{sech}\pi t$ 的自相关函数。它也是 $\operatorname{sech}[\pi(t-1)]$ 的自相关函数，是 $\mathscr{F}\{\operatorname{sech}x\operatorname{sgn}x\}$ 的自相关函数，更一般地它是 $\mathscr{F}\{\operatorname{sech}x e^{i\theta(x)}\}$ 的自相关函数，其中 $\theta(x)$ 是随机相位，这是由 $f(x)$ 不是惟一定义的这个事实引起的。

10. 虽然在卷积情况下方差可以相加，但是二阶原点矩一般是不可加的。然而，当对概率分布函数进行卷积时，二阶中心矩和方差是一样的(因为概率分布的积分是 1)。因此，既然没有理由认为三阶矩通常是可加的，我们考虑三阶中心矩。

设概率分布 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的均值位于 $x=0$。那么 $F(0)=G(0)=1$ 且 $F'(0)=G'(0)=0$，其中 F 和 G 是 f 和 g 的傅里叶变换。$f(x)$ 的三阶矩是

$$\langle x^3\rangle_f=\int_{-\infty}^{\infty}x^3f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{(-\mathrm{i}2\pi)^3}F'''(0)$$

且

$$\begin{aligned}\langle x^3\rangle_{f*g}&=\int_{-\infty}^{\infty}x^3(f*g)\mathrm{d}x=\frac{1}{(-\mathrm{i}2\pi)^3}(FG)'''\Big|_0\\&=\frac{1}{(-\mathrm{i}2\pi)^3}[F'''G+3F''G'+3F'G''+FG''']_0\\&=\frac{1}{(-\mathrm{i}2\pi)^3}[F'''(0)+G'''(0)]=\langle x^3\rangle_f+\langle x^3\rangle_g。\end{aligned}$$

更进一步的问题：四阶中心矩是可加的吗？(否)。

我们可以证明

$$\langle x^4\rangle_{f*g}=\langle x^4\rangle_f+6\langle x^2\rangle_f\langle x^2\rangle_g+\langle x^4\rangle_g。$$

四阶累量 $\langle x^4\rangle-3\langle x^2\rangle^2$ 是可加的；事实上，这是累量的定义特性。

13. 就像 n 是一个连续变量一样，用冲激符号写出泊松分布。为

$$\left[\delta(x)+x\delta(x-1)+\frac{x^2}{2!}\delta(x-2)+\cdots\right]e^{-x}。$$

对其取傅里叶变换得到特征函数，

$$\begin{aligned}\phi(t)&=\left[1+xe^{it}+\frac{x^2}{2!}e^{2it}+\cdots\right]e^{-x}\\&=\exp(xe^{it})e^{-x}\\&=\exp(xe^{it}-x)。\end{aligned}$$

16. 设 $P_1(R)\mathrm{d}R$ 是 $R\pm\frac{1}{2}\mathrm{d}R$ 内的电阻个数，$P_2(G)\mathrm{d}G$ 是 $G\pm\frac{1}{2}\mathrm{d}G$ 内的电导的个数。当 $R=1/G$ 时，这两个个数应当相等。在此情况下，$|\mathrm{d}R|=G^{-2}|\mathrm{d}G|$。因此，由

$$P_1(R)\mathrm{d}R=P_2(G)\mathrm{d}G$$

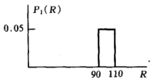
我们得到

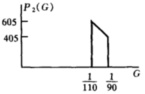
$$P_2(G)=P_1(R)\left|\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}G}\right|$$

$$= G^{-2}P_1(R)$$

$$= 0.05G^{-2}\Pi\left(\frac{1}{20}G - 5\right)。$$

如图所示 $P_2(G)$ 决不是平顶的。





第 17 章　随机波形和噪声

1. 设 $x(t)$ 具有高斯幅度分布，零均值，且功率谱为 $W(f)$。一长段 $x(t)\Pi(t/T) = g(t)$ 的峰-峰值为

$$\max[g(t)] - \min[g(t)]$$

标准差 σ 为

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[g(t)]^2\mathrm{d}t。$$

随着 $T\to\infty$，第一个表达式无限增大，而第二个不会无限增大。因此，要研究的事情是如何在这两个如此不同的表达式之间找到一个因子 5。

一种方法是计算作为段持续期 T 的函数的峰-峰值。$g(t)$ 超过 2.5σ 的概率是 $\frac{1}{161}$。因此，从 $g(t) < -2.5\sigma$ 的一个波谷开始，我们可以期望在一个峰值 $g(t) > 2.5\sigma$ 出现之前，过去 200 个"周期"的量级。"周期"表示一个时间周期 $(\Delta f)^{-1}$，其中 Δf（有效独立值的出现率），可以通过功率谱的自相关宽度（369 页）来计算。

参考正态分布偏离均值的概率表，通过四舍五入，我们有

(峰-峰值)/σ	4	5	6	7
"周期"数	50	200	1000	6000

这表明在几百个周期长的段上，用 5σ 规则可以达到的精度将好于 ±20%。用于观察（和应用经验法则）的记录似乎不是十分长。长于 50 个周期的记录将会获得好于 20% 的精度。对少于 50 个独立值的短记录，精度将会下降，但在这些情况中并没有要求对 σ 的估计必须好于 20%。所以 5σ 规则是有意义的。

由本讨论可以进一步提出如下问题：

(a) 求因子（峰-峰值）$/\sigma$ 的精确值，该因子是"周期"数 N 的函数。

(b) 找一个估计 N 的快速方法，该方法不要求确定样本的完整功率谱，但是需要对峰值和过零点进行计数。

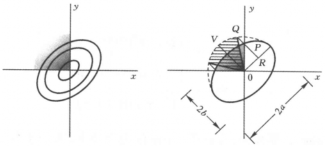
(c) 峰-峰值是否能作为一个稳定的统计量，用这个统计量可以说明第二高的最大值和第二低的最小值之间的区别。

2. 考虑一个信号波形 $H\exp(-\pi t^2)$，其半峰值宽度是 0.94，且在半峰值处的斜率是 $1.47H$。设 σ_n 是均方根噪声。测量宽度的过程是，首先在给定的记录上找到半峰值点，然后测量它们之间的时间间隔。由于斜率的原因，一个垂直误差 σ_n 将变为水平误差或定时误差 $\sigma_n/1.47H$。由两个时间(每个时间都有自己的独立误差)相减得到的宽度上的误差使得宽度相差 $2^{\frac{1}{2}}\sigma_n/1.47H$。让这个式子等于 0.94 的 5% 可得 $H/\sigma_n = 20$。这看起来是合理的。更精确的测量过程是首先通过把记录与另一个高斯波形卷积以减小 σ_n，然后对增加的宽度进行校正。在这个过程的理论中，由于半峰值定时误差要进行对比，因此有必要增加因子 $2^{\frac{1}{2}}$。

4. (a) 所期望的每秒上过零数 ν 等于 x_t 的值是负的并且 x_{t+1} 的值是正的概率。设 $p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是 x_t 在 $x\pm\frac{1}{2}\mathrm{d}x$ 内并且 x_{t+1} 在 $y\pm\frac{1}{2}\mathrm{d}y$ 内的概率。令 $\sigma^2=\langle x_t^2\rangle=\langle x_{t+1}^2\rangle$。两个连续值之间的相关系数为 $\gamma_1=\langle x_t x_{t+1}\rangle/\sigma^2$。由统计学理论，我们知道 $p(x,y)$ 是一个二维正态分布

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2(1-\gamma_1^2)^{1/2}}\exp[-(x^2-2xy+y^2)/2\sigma^2(1-\gamma_1^2)]$$

左图中的一些围线表示的就是这个函数。



所以 v 等于左图中 $p(x,y)$ 的阴影部分，即

$$\nu=\int_0^\infty \mathrm{d}y\int_{-\infty}^0 p(x,y)\mathrm{d}x。$$

由于 $p(x,y)$ 的围线是相似的，而且同样地位于同心椭圆上。通过注意到积分等于右图中椭圆面积的阴影部分可以简化这个积分。椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{2}-\gamma_1 xy+\frac{y^2}{2}=常数。$$

椭圆的轴位于 $\pm 45°$，代入 $y=\pm x$ 可得到长半轴和短半轴：

$$a^2=\frac{1}{1-\gamma_1},\ b^2=\frac{1}{1+\gamma_1},\ a^2/b^2=(1+\gamma_1)/(1-\gamma_1)。$$

把椭圆在西北—东南方向上扩大一个因子 a/b，使其变成一个圆；但保持面积不变。所以 ν 等

于圆的有阴影线的部分的面积：

$$\begin{aligned}\nu &= 2V\hat{O}Q/2\pi \\ \cos 2\pi\nu &= \cos 2V\hat{O}Q \\ &= \cos^2 V\hat{O}Q - \sin^2 V\hat{O}Q \\ &= \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\ (\text{因为}\ \cot V\hat{O}Q = PQ/OR = PQ/RP = a/b) \\ &= \gamma_1。\end{aligned}$$

所以 $\nu = (2\pi)^{-1}\arccos\gamma_1$。

当两个连续项之间不相关时($\gamma_1 = 0$)，所求的每秒上过零数是 0.25；即，上过零间的平均周期是 4 秒。

(b) $\{\gamma_1\}$ 的二阶差分的中值是$(\gamma_1 - \gamma_0) - (\gamma_0 - \gamma_1)$ 或者 $2(\gamma_1 - 1)$(通过归一化 $\gamma_0 = 1$)。因此，对 γ_1 的认知可以确定$\{\gamma_1\}$ 的中心二阶差分，反之亦然。假设$\{I_t\}$ 的特征定义了一条光滑曲线，当 γ_1 近似等于一时，二阶差分近似为光滑曲线的曲率 $F''(0)$。现在

$$\gamma_1 = \cos 2\pi\nu \doteq 1 - 2\pi^2\nu^2 + \cdots$$

因此当 $\gamma_1 \doteq 1$ 时，

$$(2\pi\nu)^2 = 2(1-\gamma_1) = -F''(0)。$$

设 SS^* 是由非归一化的$[\{I_t\}\star\{I_t\}]$(其中心曲率是 $F''(0)\int SS^*\,\mathrm{d}f$) 所定义的光滑曲线的傅里叶变换。那么

$$\int f^2 SS^*\,\mathrm{d}f = -(2\pi)^{-2}F''(0)\int SS^*\,\mathrm{d}f。$$

所以

$$\nu^2 = \overline{f^2 SS^*} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 S(f)S^*(f)\mathrm{d}f}{\int_{-\infty}^{\infty} S(f)S^*(f)\mathrm{d}f}。$$

例如，如果 $SS^* = \mathrm{sinc}^2 f$，那么分子中的积分不存在。这个功率谱相当于在一个有限的时间间隔上取滑动和。我们总想说“通过一串积分器的白噪声，每秒钟具有无数的过零点。”事实上，如果我们继续对离散序列进行连续求和，这个矛盾就不会出现。于是，我们或许满足于看到如果把 f 的范围限制在输入信号的频谱范围内，那么分子中的积分不存在。(由于输出不会受到没有输入的频带内的传输函数的影响，因此用这种方法限制积分的范围是合理的。) 现在，如果我们施加一个直到相当高的频率都具有平坦功率谱的噪声输入，那么输出将会是相当平滑的，但是过零点在如下意义上将保持平滑，如果我们把上限频率加倍，输出零点与输入零点依然保持同样的比率。如果我们输入无穷多个零(“实的白噪声”)，将会输出无穷多个零。这是对滤波器部分的不合理的响应。然而使用在高频处衰减更快的滤波器(或者如果我们容许一个非零的上升时间，使用符合基本要求的滤波器) 过零点将逐步减小到一定的范围，随着平坦输入谱的频率上限无限增加，每单位时间的过零点将趋于一个有限值。

(c) 最大值出现在导数的上过零处。导数的功率谱是波形功率谱的$(2\pi f)^2$ 倍。所以，每秒的最大值数为

$$\frac{\int f^4 SS^* \mathrm{d}f}{\int f^2 SS^* \mathrm{d}f}。$$

分子中的积分表明极大值比上过零点多很多，而且它的确可以是无穷的，而上过零数是有限的。这可以沿前面部分中所指明的思路来处理。但是，即使我们选择功率谱以 f^{-20} 速度衰减的滤波器，仍然会有一些高阶导数的无限大的数，这恰好与无限多个极大值是矛盾的。通常，我们有可能通过以下两种方法克服这些困难。(a) 不要求比我们在输入端描述得更多的输出。(b) 不需要描述物理可实现范围外的冲激响应。

5. (a) 序列{1 5 10 10 5 1} 的方差 σ^2 是 1.25 秒，序列的相邻值之间的间隔为 1 秒。因为 $\exp(-t^2/2\sigma^2) \supset (2\pi)^{1/2}\sigma\exp(-2\pi^2\sigma^2 f^2)$(104 页习题 1(i))，因此与这个序列卷积的作用就像一个高斯传输函数 $32(2\pi)^{1/2}\sigma\exp(-2\pi^2\sigma^2 f^2)$。功率传输函数正比于 $\exp(-4\pi^2\sigma^2 f^2) = \exp(-f^2/2f_0^2)$，其中 $f_0^2 = (4\pi^2\sigma^2)^{-1}$。因此 $f_0 = 0.142\text{Hz}$。

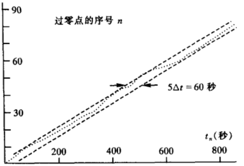
(b) 图 21.17.5 记录的总持续期为 860 秒，通过计数可得总的上过零数为 82。因此所测得的上过零频率 ν 为每秒 0.095 个上过零。因为无论用手或计算机在有噪声的采样上测量 ν 都是切实可行的，所以结果的精度是有意义的。首先，我们与习题 16.4 的理论进行对比。所期望的相关系数 γ_1 可以由{1 5 10 10 5 1} 在单位移位处的自相关确定：

$$\gamma_1 = (5\times1+10\times5+10\times10+5\times10+1\times5) \div (1+25+100+100+25+1) = 0.833。$$

那么

$$\nu = (2\pi)^{-1}\arccos 0.833 = 0.093\text{s}^{-1}。$$

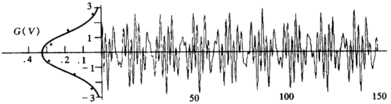
这种一致程度(2% 以内) 给人十分深刻的印象。通过作出每个过零点的序号 n 对它的出现时刻 t_n 的图，可以对精度进行经验性研究从而得到对可能要求的记录长度的感性认识。使用习题 17.1 的方法，我们从趋势值 $\nu^{-1}n$ 中读出 t_n 的均方根误差 Δt 为 12 秒。那么，$\Delta\nu = (\Delta t/t_{\max})\nu$ 是 ν 的均方根误差，且 $\Delta\nu/\nu = 12/860 = 1.4\%$。这个粗糙的计算表明在没有先验知识(比如本例中的谱) 的情况下，如何能够经验地达到精度的一般量级。



8. 这里，我们取一个波形 $x(t)$ 并显示地用 $\mathrm{sgn}[x(t)]$ 代替它。因此，已削信号的自相关与习题 17.7 中 $x(t)$ 和的 ψ 系数是一样的。

9. 下图显示的是 $V(t) = \cos t + \cos et + \cos \pi t$ 从 $t = 0$ 到 $t = 150$ 的图形，作图的间隔为

$t = 0.25$。总的特性无疑使人想起低通噪声。与 k 无关，$\cos kt$ 的幅度分布是 $P(V) = \pi^{-1}(1 - V^2)^{-1/2}\Pi(V/2)$，而且，由于这三项是不相关的，我们希望三个这种变量的和的幅度分布为 $[P(V)]^{*3}$。$P(V)$ 的方差，即 $V^2 = \int_{-1}^{1} V^2 P(V)\mathrm{d}V$ 等于0.5。因此，$[P(V)]^{*3}$ 的方差等于1.5。由中心极限定理，我们希望 $[P(V)]^{*3}$ 可以用 $(2\pi)^{-1/2}(1.5)^{-1/2}\exp(-V^2/3) = G(V)$，$G(V)$ 图左边所示的代替 $[P(V)]^{*3}$ 的曲线，$[P(V)]^{*3}$ 更难计算一些。图中还给出了每个幅度范围内的 $V(t)$ 的值所占的实际比例。这种一致是合理的，但是很显然，要得到一个足够平滑的分布以至不能分辨 $G(V)$ 和一些不同的光滑曲线，$V(t)$ 需要更长的采样点。有 59 个上过零。由方差 $(2\pi)^{-2}[(1 + e^2 + \pi^2)/3] = 0.154$，我们希望每单位 t 有 $(0.154)^{1/2} = 0.392$ 个上过零，或者在 $[0, 150]$ 内共有 59 个上过零。因此，在一定的意义下，波形模拟了随机噪声。即使是在图中所示的采样比较短的情况，都能很容易地揭示出这种特殊的谱。但是随机噪声可以有任意谱。这个波形不能通过任何展现角频率 1，e 或 π 附近的窄带中的相干性测试。



10. $\langle V_1 V_2^* \rangle$ 的实部可以用两个瞬时电压乘积的时间平均来表示，而虚部可以再把两个电压作用于另一个乘法器和积分器之前引入一个 $\frac{1}{4}$ 周期的相移来得到。设 $F(l,m)$ 为远横向平面上 (l,m) 方向上的场向量。方向 (l,m) 上的温度 $T(l,m)$ 正比于 $\langle FF^* \rangle$。设 $E(x/\lambda, y/\lambda)$ 为接收平面上的相关电场分布，它也垂直于天线波束的方向。如果场是稳定的交变场，E 和 F 将是一对二维傅里叶变换对，而且当 F 随时间波动时，如果通过使用延迟线（延迟等于两个平面间的传播时间）调节 E 的方法保证传播时间的容差，那么就会出现这种情况。因此

$$E(x/\lambda,\ y/\lambda) \propto \iint F(l,m)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(lx/\lambda+my/\lambda)}\,\mathrm{d}l\mathrm{d}m。$$

E 的空间自相关变换成 FF^*；

$$\iint E^*(x'/\lambda,\ y'/\lambda)E(x'/\lambda - x/\lambda,\ y'/\lambda - y/\lambda)\mathrm{d}(x'/\lambda)\mathrm{d}(y'/\lambda)$$

$$\propto \iint F(l,m)F^*(l,m)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(lx/\lambda+my/\lambda)}\,\mathrm{d}l\mathrm{d}m。$$

左边的表达式可以写作 $\langle E_1 E_2^* \rangle_{\text{spatial}}$，其中 E_1 是相对于原点的场强，原点相对于 E_2 是可移动的，E_2 的原点是固定的。（考虑一个瞬时固定的方向图，用相当于它本身的一个量 $(x/\lambda, y/\lambda)$ 替换它，相乘并积分。）对两边取时间平均，

$$\langle\langle E_1 E_2^* \rangle_{\text{spatial}}\rangle \propto {}^2\mathscr{F}\{FF^*\} \propto {}^2\mathscr{F}\{T\} = \overline{T}。$$

在接收平面中不同点的场具有相同的统计特性，但细节不同，这种情况下（一个远的恒定源就是这种情况），在一个时刻的空间平均与一对点的时间平均有相同的结果。因此，左边的时间平

均是充分的。这样

$$\langle E_1 E_2^* \rangle \propto \overline{T}$$

而且，如果两边在它们的原点处均归一化到零，那么

$$\Gamma = \frac{\langle E_1 E_2^* \rangle}{\langle E_1 E_1^* \rangle}$$

$$\Gamma(x/\lambda, y/\lambda) = \frac{\langle E_1 E_2^* \rangle}{\langle E_1 E_1^* \rangle} = \frac{\overline{T}(l,m)}{\overline{T}(0,0)}。$$

11. 功率传输函数为 $\exp(-f^2/2B^2)$ 的接收滤波器的带宽 Δf 为 $\Delta f = \frac{1}{2}W_{R\star R}$(369 页)。$\exp(-f^2/2B^2)$ 的等效宽度 W_R 是 $(2\pi)^{1/2}B$(44 页)。因为在卷积条件下，方差是可加的(149 页)所以 $W_{R\star R} = 2^{1/2}W_R$ 且 $\Delta f = 1.77B$。平滑滤波器的积分时间是 $(2\pi)^{-1/2}b^{-1}$(表 17.1)。因此

$$K = \frac{\text{均方根波动}}{\text{平均偏差}} = (\tau\Delta f)^{-1/2} = (2b/B)^{1/2}。$$

在 $B = 10^4\,\text{Hz}$ 且 $b = 10^2\,\text{Hz}$ 时，$K = 0.14$。这个灵敏度是所要求的 1% 的精度的 14 倍。积分时间 $(2\pi)^{-1/2}b^{-1}$ 是 4 ms。由于灵敏度随 τ 的平方根提高，所以必须在 $14^2 \times 4\ \text{ms} = 0.8\ \text{s}$ 长的时间上积分。为了证实已经发生了变化，变化必须达到 2 ～ 3 倍的均方根误差。这要花费几秒钟。

用所述的方案不能检测到发生时间短于 1 秒的 1% 量级的增益波动(除非是在相当长的时间上的系统波动)，而且了解模拟生成噪声的现象可能并不重要。然而，在一些场合，这种增益波动可能是有害的，通过同一噪声源激励的三个放大器的比较或使用单频放大器可以揭示这种情况。

13. 我们的得到的谱的形式为 $S(f)\Pi(f/2f_c)$，但是没有详细说明 $S(f)$。自相关函数 $\langle x(t)x(t+\tau)\rangle$ 是功率谱 $SS^*\Pi(f/2f_c)$ 的傅里叶变换，因此是

$$\overline{SS}^* * (2f_c \operatorname{sinc} 2f_c t)。$$

问题是在采样间隔 $0.5f_c$ 处，这是否为零。现在，函数 $(2f_c \operatorname{sinc} 2f_c\tau)$ 在 $t = 0.5f_c$ 处本身是零，但是如果我们把这个函数和一些其他的函数进行卷积，一般情况下零将移位。因此，临界采样通常是相关的。

如果 $\overline{SS}^* = \delta(t)$，即如果 $SS^*(f)$ 是一个平的功率谱，那么相关系数为零。

有效独立采样的平均间隔一定是 $SS^*\Pi(f/2f_c)$ 的自相关的等效宽度的倒数，因为 368 页到 370 页的理论说明这就是其平方根控制噪声功率测量精度增加的量。

14. 设天线孔径上的平均场强是 E_m，但是设场强稍微偏离均值一个小数 ϵ，ϵ 是 (x,y) 平面中位置的函数。那么场强是 $(1+\epsilon)E_m$。在向前方发射的每单位立体角的功率是 $\iint(1+\epsilon)E_m(1+\epsilon^*)E_m^*\,dx\,dy$，它比无误差时轴上的发射功率下降了一个因子

$$\zeta = \frac{\text{孔径面积}}{\iint(1+\epsilon)(1+\epsilon^*)\,dx\,dy}。$$

显然，这两种情况下的总辐射功率是一样的。如果误差 ϵ 完全是由量 δ 的小的波前波纹引起的，

则没有幅度变化，且 $\varepsilon = \mathrm{i}\delta$ 及

$$\zeta = \frac{\text{孔径面积}}{\iint (1+|\varepsilon|^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{1}{1+\langle\delta^2\rangle},$$

其中 $\langle\delta^2\rangle = \iint \delta^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y/(\text{孔径面积})$。

如果孔径分布不是均匀的，即使没有误差，就像抛物面反射器的例子那样（因为边缘远离焦点，而且远离焦点处喇叭天线的波束最大值），我们引入方向因子 $\mathscr{D}$ 的概念。对抛物面天线，$\mathscr{D}$ 的值约为 0.6，对一个矩形喇叭天线约为 0.8。它表示的是相对于被均匀激励的同样尺寸的孔径面积 $\mathscr{A}$ 的功率衰减。在这个例子中，偏离均值的小数是实的而且不是十分小，

$$\mathscr{D} = \frac{1}{\mathscr{A}^{-1}\iint (1+\varepsilon)(1+\varepsilon^*)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{1}{1+\text{方差}\,\varepsilon}。$$

现在，如果我们通过引入使总误差为 ε' 的小的波纹来干扰激励，我们有

$$\zeta = \frac{1+\text{方差}\,\varepsilon}{1+\text{方差}\,\varepsilon'}。$$

令 $\varepsilon' = \varepsilon + \mathrm{i}\delta$，我们得

$$\zeta = \frac{1+\text{方差}\,\varepsilon}{1+\text{方差}\,\varepsilon+\text{方差}\,\delta} = \frac{1}{1+\text{方差}\,\delta} = \frac{1}{1+\delta^2}。$$

假设 $\delta(x,y)$ 与 $\varepsilon(x,y)$ 不相关，即方差 $(\varepsilon\delta) = 0$。

15. 设 N 个天线位于 (x_n, y_n)，其中 n 从 1 到 N。那么作为方向余弦 (l,m) 函数的角度谱是（333 页）

$$P(l,m) = N^{-1}\sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(lx_n+my_n)}$$

其中，因子是归一化因子使 $P(0,0)=1$。现在，我们把 x_n 和 y_n 看作随机变量，把 $P(l,m)$ 看作随机变量的和，并使用中心极限定理。或者，在区域 G 上加一个 M^2 格点的精细的栅格。在任何格点 (x_i, y_i) 上有天线的概率为 N/M^2，没有天线的概率为 $1-N/M^2$。如果在每个点上，有用幅度 a_i 激励的天线，那么我们有

$$P(l,m) = \left[\sum a_i\right]^{-1}\sum_{i=1}^{M^2} a_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(lx_i+my_i)}$$

现在的问题是 a_i 的概率分布为

$$\Pr(a_i) = (1-N/M^2)\delta(a_i) + (N/M^2)\delta(a_i-1)。$$

用尖括号表示集合平均

$$\langle P(l,m)\rangle = \left\langle \left[\sum a_i\right]^{-1}\sum_{i=1}^{M^2} a_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(lx_i+my_i)}\right\rangle$$

因子 $\sum a_i$ 在集合内会有些波动，但是在平均上等于 N。把它提到括号外，并注意到 $\langle a_i \rangle = N/M^2$，我们得

$$\langle P(l,m) \rangle \approx N^{-1} \sum_{i=1}^{M^2} \langle a_i \rangle \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(lx_i+my_i)}$$
$$= M^{-2} \sum_{i=1}^{M^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(lx_i+my_i)}$$

如果区域 G 内充满天线，这就是精确的方向图。作为用 N 个天线达到 M^2 个天线的分辨率的优点的交换所付出的代价是灵敏度减小了一个因子 N/M^2。

第 18 章　热传导和热扩散

1. 通过改变 t 的符号可以得到灌浇或弥散(模糊) 而不是消失或扩散的控制方程；因此

$$\partial^2 V/\partial x^2 = - rc\partial V/\partial t。$$

我们是否能够通过卷积得到早期的温度分布是一个相当有趣的问题，因为一般情况下，卷积都是加宽和平滑一个分布，而此处要把一个分布变窄或锐化。在一般的扩散中，相当于低通滤波的传输函数 $\exp(-4\pi^2 ts^2/rc)$ 是适用的。这里，使用 $\exp(4\pi^2 ts^2/rc)$ 是合适的，当我们追溯过去时，它具有逐渐增加的高通滤波的作用。任何空间温度分布的高斯分量都将转换成一个有限时间前的一点的热存储。一般情况下，我们可以通过取傅里叶变换把一个传输函数转换成一个对应的 x 的函数。在这种情况下，傅里叶积分的转换有一个严重的问题，但是它可以用下面的方法来解决。注意到

$$\exp(4\pi^2 ts^2/rc) = 1 + 4\pi^2 ts^2/rc + (4\pi^2 ts^2/rc)^2/2 + \cdots,$$

逐项变换得

$$\delta(x) - (t/rc)\delta''(x) + (t/rc)^2\delta''''(x) - \cdots,$$

这就是所要求的逆卷积函数。作为一个特例，如果我们希望把时钟拨回一点，只考虑前两项。那么，我们发现，由于

$$[\delta(x) - (t/rc)\delta''(x)] * V(x) = V(x) - (t/rc)V''(x),$$

通过减去一个正比于二阶导数的小分布可以纠正当前的温度分布 $V(x)$。几个试验很快就说明我们的确有所要求的窄化和锐化的卷积过程。

3. 均衡就是要对由信号波形的傅里叶分量中的相关幅度和相位失调所引起的传输系统失真进行补偿。这种补偿可以通过均衡滤波器进行，例如，均衡滤波器可以通过把低频抬高到相对高的频率以补偿它们在传输中的衰减。反扩散可以看作是对由于时间的误差(推移) 而引起的空间温度分布是真的补偿。这个类比是相当贴切的，分布的失真可以通过对空间频率的简单操作进行补偿，虽然在本例重要处理的是高频。还有一个类似的地方是，在两种情况下，完全的恢复(重建) 都会受到噪声的限制。因此，温度分布的高空间频率分量的幅度将迅速变小，所以需要大的恢复因子；但是如果空间频率处的幅度已衰减到空间噪声或者测量误差的水平，那么使用大的理论因子是不明智的。一般情况下，逆扩散与均衡的不同在于其不要求相位补偿且只

要求形如 $\exp ks^2$ 的补偿因子。

4. 如果 1 厘米的辐射照射到月亮上，其中一部分将反射或散射回去，一部分将传入里面，并在最初的几厘米左右被吸收掉，这与局部的电导率及介电常数有关。相反地，离开月球的辐射起源于地下层，它所遭受的衰减与它出现时原点的深度有关。原点深度处的强度正比于那里的温度。从 383 页，角频率为 ω 的正弦温度变化的渗透深度 d 由 $\exp(-\alpha d)=1/e$ 给出，其中 $\alpha=\mathrm{Re}\gamma=(\omega cr/2)^{-1/2}$；频率越低，渗透越深。因此，在月球的一定深度以下，在基频处的温度变化是正弦的，因为谐波已经消失了。已发射的微波辐射是一定深度范围内的在频率 ω 上的贡献的加权和。基频的表面幅度在 100K 左右，但是在深度 x 处要修正一个因子 $\exp(-\gamma x)$。这不仅产生了一个衰减因子 $\exp(-\alpha x)$，而且还产生了一个相位因子 $\exp(-j\beta x)$。由于在本例中 $\alpha=\beta$，所以由一个与幅度衰减一个奈培相关的一个弧度的相位延迟。这就是为什么微波满月要晚 $\frac{1}{8}$ 个月。

5. 在一个电路中，$rI^2/2$ 总是正的，而且它对时间的积分（表示能量的损耗）一定是单调增的。在热传导中，一个封闭系统的熵总是单调增的。但是，找不到与熵类似的东西；例如，熵可以在某些地方减小，但电路的能量消耗却不能减小。因此，把 rI^2 解释为单位长度的热阻和热流的平方的乘积一定具有一些其它的意义。当然，它有一定的数学意义，适用于任何时变量的平方对时间的积分，但是它不具有任何明确的热力学意义。同样地，电容中的储能 $CV^2/2$ 在电路理论中也扮演着重要的角色，但是热容乘以温度的平方在热传导理论中不是一个有用的概念。（例如：当一个未充电的电容 C 跨接在一个已充电至 V 伏的相同的电容（所包含的能量为 $CV^2/2$）上时，电容两端的电压下降到 $V/2$，两个电容中的储能为 $C(V/2)^2/2+C(V/2)^2/2$，它只是初始能量的一半。这提醒我们，无论用多么粗的连线，总要损失一半的能量，即使是在连线电阻趋于零的极限情况下。这是一个大难题。但是，在热力学中，一个冷的薄铜盘面对面地贴在一个相同的热盘子上，我们很容易理解温度将下降到一半，即使它的方程和电路情况下的方程相同，我们也很难认为这是一个问题。）

6. 直棒的一段 $\mathrm{d}x$ 的热容为 $c\mathrm{d}x$，如果进入本段的热量为 $\mathrm{d}q$，那么温度升高 $\mathrm{d}V$ 将是 $\mathrm{d}q/c\mathrm{d}x$。那么，由定义，本段的熵增将是 $c\mathrm{d}x\mathrm{d}V/V$，而且，如果温度 V 从一个初始值 V_0 上升到 t 时刻的 V_t，那么熵增将是

$$\int_{V_0}^{V_t} c\mathrm{d}x\mathrm{d}V/V = c\mathrm{d}x\ \ln(V_t/V_0)。$$

整个直棒的熵增将是

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} c\ln(V_t/V_0)\mathrm{d}x = c\int \ln V_t(x)\mathrm{d}x - c\int \ln V_0(x)\mathrm{d}x。$$

最后一个积分与初始状态有关，但是是不随时间变化的常数。

积分 $\int \ln V_t(x)\mathrm{d}x$ 在图像的电传输中很常见。在那种解释中，x 是一个二元向量，而表示强度的 V_t 是矢变量的标函数。通过与热力学的类比，把这个积分称为图像的熵，但这种相似只是表面的。有一点误解的术语是"分贝积分"。术语图像熵也适用于 $\int V\ln V\mathrm{d}x$（原因是，它与统计力学中的表达式 $\int p\ln p\mathrm{d}p$ 是相似的）。不用说，任何一种形式的图像"熵"都不具有随时间的推移

而增加的这种有意义的性质。

7. 由于流星的移动速度大约是每秒 40 km，其整个的尾迹在 80 km 的高度可以有 10 km 长，它的形成非常迅速。我们可以认为离子的尾迹随时间的推移作柱面扩散。如果在 t 的每个值上，电子密度 N 是 r 的高斯函数，(高斯函数的) 宽度正比于 $t^{1/2}$，那么如果电子数保持不变，则峰值密度一定随 t^{-1} 减小。(在一维扩散中，这个因子是 $t^{-1/2}$。)

一般的扩散方程(375 页) 是

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}=\frac{1}{k}\frac{\partial N}{\partial t}$$

在圆柱对称条件下，可化为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 N}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}=\frac{1}{K}\frac{\partial V}{\partial t}。$$

通过把 $N=(\alpha/4\pi Kt)\exp(-r^2/4Kt)$ 代入这个微分方程，我们可以验证这个方程有一个解。

当每立方米的电子密度 N 由 $N=f^2/81$ 给定时，在频率 f(单位 MHz) 处的折射率是零。为了求 r 的最大值，我们可以通过 $4\pi KN/\alpha=t^{-1}\exp(-r^2/4Kt)$ 对 t 求微分并设 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t=0$，但是如果用 $4\pi KN/\alpha=u\exp(-r^2u/4K)$ 对 u 求微分并设 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}u=0$ 会更简单一些；因此有

$$\begin{aligned}0&=u(\mathrm{d}/\mathrm{d}u)(-r^2u/4K)\exp(\ )+\exp(\ )\\&=-(u/4K)[r^2+2r(\mathrm{d}r/\mathrm{d}u)u]\exp(\ )+\exp(\ )。\end{aligned}$$

令 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}u=0$，可得 $0=-ur^2/4K+1$ 或者

$$r^2/4Kt=1。$$

因此，最大半径出现在 $t=\alpha/4\pi eKN$，且最大半径是$(\alpha/\pi eN)^{1/2}$，当 $N=f^2/81$ 时

$$(81\alpha/\pi ef^2)^{1/2}=3.07\alpha^{1/2}/f。$$

当中心电子密度 $\alpha/4\pi Kt$ 衰减到 $f^2/81$，即当 $t=81\alpha/4\pi Kf^2=6.4\alpha/Kf^2$ 时，零折射率的圆柱减小到零半径。

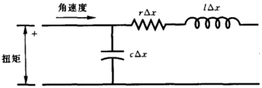
在此之后，电子柱就不再是一个陡峭的有界反射器，但是其继续按习题 18.8 中的原理反射。

8. 从无线发射机发出的位于$R+x$和$R+x+\mathrm{d}x$范围内的所有电子(数量为$\int N(r)\mathrm{d}y$)，联合产生出正比于$\exp[\mathrm{i}2k(R+x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$的回波场强，其中的相位因子考虑了总路径长度 $2(R+x)$ 和一个已被吸收进比例常数的与范围有关的幅度因子。在包括尾迹的 x 值上进行积分，在合适的时候吸收相位因子 $\exp(vkR)$，我们也可以得到总的回场波正比于$\iint N(r)\exp(\mathrm{i}2kx)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。我们把$\int N(r)\mathrm{d}y=N_A(x)$ 看作一个 Abel 变换，把整个场的表达式看作一个一维傅里叶变换。如果所有的电子被限制在轴上，固定 k，我们可以知道这个积分的最大值(139 页) 可以达到$\int N_A(x)\mathrm{d}x=\iint N(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\alpha$。因此，随着圆柱的膨胀，功率衰减因子为$\left|\alpha^{-1}\iint N(r)\exp(\mathrm{i}2kx)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|^2$。吸收的因子不影响这个结论。

现在，由于波数 k 正比于频率，我们知道傅里叶变换 $T(k)$ 是描述电离柱频率响应的传输

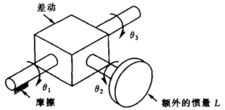
函数。因此，量 $N_A(x)$ 可以看作是由电场的一个偶发冲激引起的冲激响应。它给出了反射场的空间波形。

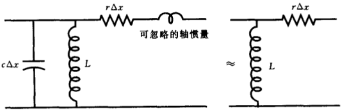
9. 虽然很难提出严格连续的系统，但是可以建立一个图 18.8 离散电路的相似系统。想象一个在粘性媒体中转动的驱动轴，媒体每单位长度施加一个扭力阻 r。($r\Delta x$ 的单位是每单位角速度一个扭矩。) 设每单位长度的惯性矩为 l，每单位长度的扭力柔量为 c。那么长度为 Δx 的等效电路将如图所示。现在，借助于如图所示的在轴中插入一个差动齿轮的方法，在每一段上引入一个额外的惯量。那么等效电路需要再增加一个电感 L，其中 L 等于增加的惯性矩(指轴)。差分的性质是 $\theta_3 = \theta_1 - \theta_2$。现在，假设轴惯量是可以忽略的($l\Delta x\omega \ll r\Delta x$)，当角速度固定($\omega = 0$) 或仅是慢变化时满足这个条件。



除此之外，设

$$L\omega \ll 1/\omega c\,\Delta x$$





这意味着流过电感 L 的电流远多于流过 $c\Delta x$ 的电流。在这种情况下，两个并联元件的组合等效为一个电感。这个新条件与第一个类似，对足够小的 ω，这两个条件都满足。当然，我们或者可以假设扭力柔量是可忽略的。如图 18.8 所示，我们可以得到一个串联电阻、并联电感电路。这和机械图解之间存在一个对偶关系(想象一个由螺旋钟头弹簧悬挂的巨大的粘性非弹性螺距轴)。把这些系统转换成一个连续系统的不可能性是显然的，有可能可以证明，不存在这样的连续扭力系统。

然而，可以设想一个同轴传输线形式的连续电气系统，其每单位长度的感抗与内导体的串联电阻相比可以忽略。通过在线中填充等离子体且工作在一定的频率(低于等离子频率) 可以引入并联电感，使得两个导体间由自由电子运载的对流电流高于与导体间电容有关的位移电流。

13. (a) 当线性性和时不变条件满足时，对正弦激励的响应是正弦的。在地表下几英尺只能发生传导，所以我们不需要考虑从表面通过辐射进行的热传输，它是非线性的，而且不用考虑由对流引起的热排放，它十分复杂。因为热阻率和比热可以看作常数（与温度无关），所以在小的温度范围内，非线性并不重要。（我们可以注意，温度变化的范围只是适度的，而且温度不会降到水的冰点以下。在水的冰点以下，土壤常数会有重大变化。）时不变是一个独立的问题，因为经常发生的是土壤在冬天是湿的在夏天是干的，但实际上，在几英尺的深度，很难注意到每年正弦曲线的失真。

(b) 特征热阻抗 $Z_0 = (r/\mathrm{j}\omega c)^{1/2}$ 有一个 45° 的相角。因此，热流比温度变化滞后八分之一年，所以热流最大在 $t = 0$ 后四分之一年，可以用 $I(t) - I_0\cos(\omega t - \pi/2)$ 来表示。因此 $\alpha = -\pi/2$。

(c) 对正弦时间变化，扩散方程

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = rc\,\frac{\partial\theta}{\partial t}$$

变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} = \mathrm{j}\omega rc\theta$$

其中 θ 是温度矢量（即 $\theta(t) = \mathrm{Re}\theta e^{\mathrm{j}\omega t}$）。解 $\theta = \theta_0\exp[-(\mathrm{j}\omega rc)^{1/2}x]$ 说明幅度随深度的衰减正比于 $\omega^{1/2}$。所以，每日的变化不能穿透很深，而且在此之下，简单的每年变化起主要作用。

14. 考虑一个传送力矩和角动的驱动轴。它是一个连续的物理系统，而且是一维的，它的状态只用 x 的函数就可以完全表达，其中 x 是沿轴的距离。合适的一对函数或许是力矩 $T(x)$ 和角速度 $\Omega(x)$。设每单位长度的扭力柔量是 c；这意味着，如果一段长为 $\mathrm{d}x$ 的轴固定其一端，那么 $c\mathrm{d}x$ 是角位移对作用力矩的比。设每单位长度的扭力阻是 $r(x)$；这意味着如果在段长为 $\mathrm{d}x$ 的轴的活动段上存在一个固定的力矩，那么 $r\mathrm{d}x$ 是力矩对伴随固定角速度之比。不再需要其他参数来描述驱动轴（例如，它没有惯性）。方程为

$$\partial T/\partial x = -r\Omega \quad 及\ \partial\Omega/\partial x = -c\partial T/\partial t。$$

因此，分别消去 Ω 和 T，

$$\partial^2 T/\partial x^2 = rc\partial T/\partial t \quad 及 \quad \partial^2\Omega/\partial x^2 = rc\partial\Omega/\partial t。$$

因为惯性是零，所以能够在实际中出现这种无惯性驱动轴的实际例子是很重要的，但事实上，我们不要求没有质量，只是惯性阻抗与扭力阻相比应是可忽略的。因此，如果每单位长度的惯性矩是 l，那么我们应该寻找 $l\omega \ll r$ 的情况。通过稳定旋转非常容易满足这个条件，且可以与仅是角速度慢变取得很好的一致。（记住，对 Ω 不随时间变化，$\omega = 0$。）一个例子是与墙上的洞接触的转动的钻头。本例的对偶是一个惯性很重要但没有外部摩擦和可忽略扭力硬度的旋转的轴。第二个参数是粘性扭力传导率。（设想一个吹玻璃工在一个过热的白热玻璃管的末端拉制成一个瓶，它是如此的热使得粘性角度流超过扭力弹性偏转。）

15. 考虑一个截面积为 A 的垂直圆柱。那么对垂直热流，每米的热阻为 $r = 1/kA$ 热欧每米，每米的热容是 $c = psA$ 热法拉每米（376 页）。如果 x 是从表面向下测量，且表面温度矢量是 $\mathbf{V}(0)$，那么表面下的温度 $\mathbf{V}(x)$ 由 $\mathbf{V}(x) = \mathbf{V}(0)\exp(-\gamma x)$ 给出，其中传播常量 $\gamma = (\mathrm{i}\omega cr)^{1/2}$，且 ω 是向量所指的角频率（383 页）。把传播常量分成一个衰减常量 α 和一个相位常量 β，我们有

$\gamma = \alpha + i\beta = (\omega c r/2)^{1/2} + i(\omega c r/2)^{1/2}$ 以及 $\boldsymbol{V}(x) = \exp(-\alpha x)\boldsymbol{V}(0)\exp i\beta$。本例中 $x = 1\text{m}$，$\omega = 2\pi/86\ 000$ 弧度每秒，以及 $rc = ps/k = 2.1\times10^{6}\ \text{s m}^{-2}$，衰减因子为

$$\exp(-\alpha x) = \exp[-(\omega c r/2)^{1/2}] = \exp(-8.5) = 2\times10^{-4}。$$

因此，表面温度变化的 24 小时分量减小 8.5 奈培，一个因子 2×10^{-4}（且由于 $\alpha=\beta$，其相位滞后 8.5 弧度或接近 33 小时）。表面温度不是正弦变化的但是具有谐波。它们被衰减的更多，致使每下降 1 米，温度更接近正弦。对大多实际的目的来说，1 米似乎比所需的更深。对每年的温度变化，衰减因子是 $\exp(-8.5/365^{1/2}) = \exp(-0.45) = 0.64$，所以季节变化衰减得不多，且滞后为 0.64 弧度或近似为一个月。

第 19 章　动态谱和小波

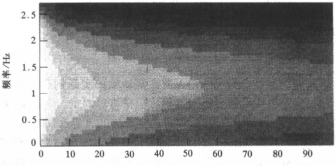
3. 满足叙述的一个表达式是

$$(t - t^2)\cos(200t + 400t^2 - 267t^3)。$$

4. (a) 取火车停止时刻的时间为 $t = 0$，那么火车接近的速度为 $\boldsymbol{v} = -gt$。多普勒频移为 $550 + 550(\boldsymbol{v}/c) = 550(1 - gt/c)$，其中 c 是声速。综合得到相应的相位 $550(t - gt^2/2c)$。因此 $s(t) = \cos[550(t - gt^2/2c)]$。

5. (a) 对所有实信号，平均频率是零。(b) 标准离差类似于线质的回转半径，相当于 $|S(f)|^2 = 0.5\times10^{-5}e^{-\pi[10^5(f+60)]^2} + 0.5\times10^{-5}e^{-\pi[10^5(f-60)]^2}$，而且对这样的一个窄带信号，它接近于 60Hz。确切的值是 $[60^2 + (10^{-5}/2.506\ 6)^2]^{1/2}$。因子 2.506 6 是等效带宽和标准离差之比。

6. 由于第一个过零点位于 $t = 2.405/2\pi$，所以要处理的最低频率可以判定是一个周期 4 倍的 $2.405/2\pi$ 或者 0.65Hz。开始时，选择 $\Delta f = 0.08\text{Hz}$ 及 $\Delta t = 1\text{s}$ 是一个好的组合。但是，在 $J_0(2\pi t)$ 的图中肉眼可见的周期的加长并没有显示在时频图上，周期的加长可以从过零点间隔的表中得到证实。David Choil 给出的图正如我们所期望的那样显示了随时间的流逝幅度的减小。



7. Haar 小波可以用两个矩形函数来表达，但也可以用 $-\text{rect}x\text{sgn}x$ 右移半个单位来表达。$-\text{rect}x\text{sgn}x$ 的变换是 $-\text{sinc}s * (-i/\pi s)$，这是一个卷积表示的 $-i\text{sinc}s$ 的希尔伯特变换，已知为 $i(\pi s)^{-1}(1-\cos\pi s)$。考虑到可以通过乘以 $\exp(-i\pi s)$ 进行右移，可得 $F(s) = (\pi s)^{-1}(1 - \cos\pi s)(\sin\pi s + i\cos\pi s)$。

第 22 章

傅里叶变换图示集

在下面整个的傅里叶变换对图表中，x 的函数在左边，右边是 $-\mathrm{i}$ 傅里叶变换，它是由

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi s x} \mathrm{d}x$$

确定的 s 的函数。

坐标轴上的小刻度表示变量在此处取单位值，虚数量用虚线或细线表示，冲激用长度等于冲激强度的箭头表示。

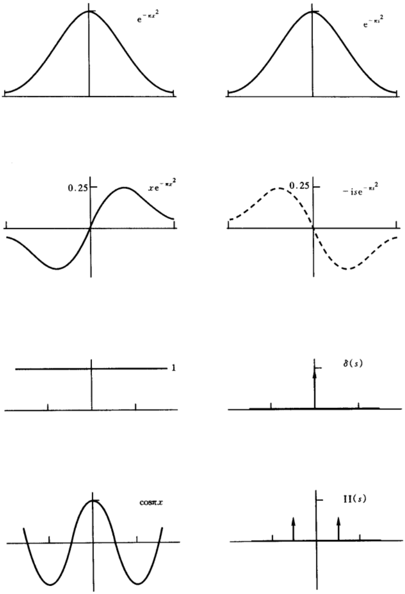
表中的大多数函数 $f(t)$ 不是偶对称的就是奇对称的，这部分是由于用两条曲线表示一个复数谱不太方便（一条表示实部，一条表示虚部）。因此，大部分的傅里叶变换也是 Hartley 变换。最后给出了一些非对称函数的 Hartley 变换 $H(s)$；从给定的傅里叶变换 $F(s)=\mathscr{R}(s)+\mathrm{i}\mathscr{I}(s)$，使用 $H(s)=\mathscr{R}(s)-\mathscr{I}(s)$ 可以很容易地生成其他 Hartley 变换的例子。在这些例子中，所有的有关谱的信息都包含在一条曲线中。

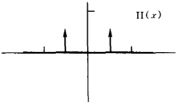
这个图示集包括了大多数最常见的变换对，无论函数是用图形方式还是解析方式给出，本图示集对查找函数的变换都很有帮助。当然，有许多不常见的变换需要在已出版的一些表①中查找。

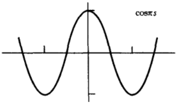
这个图示集还有许多其他的用处，比如对计算的数值进行检验或者可以通过浏览它获得灵感。通过验证 $F(0)$ 等于 $f(x)$ 下的面积和/或 $f(0)$ 等于 $F(s)$ 下的面积，我们至少可以近似地验证变换。如果通过了这个快速测试，仍然有可能出现符号错误；通过对 $f(x)$ 的一阶矩的符号和 $F(s)$ 在原点处的斜率进行比较可以检测这一点；两者的符号应该是相反的。相应的检验也可以用于由离散采样生成的变换对；当首次使用一个打包的程序时，这些检验对确保采样间隔 Δx 和 Δs 的一致性，对确定它是正变换还是反变换（反变换有一个乘数 N^{-1}），对关注 2π

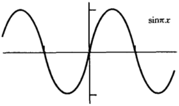
① G. A. Campbell and R. M. Foster, Fourier Integrals for Practical Application, John Wiley & Sons, New York, 1948; A. Erdelyi (ed.), Tables of Integral Transforms, McGraw-Hill Book Company, New York, 1954.

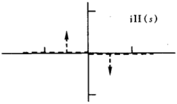
能带来什么样的规范，对验证它是使用－i的正变换等都是必要的。

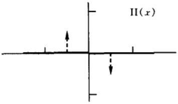


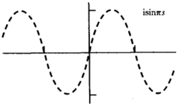

II(x)

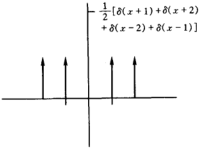

cosπs

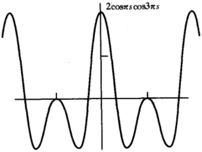

sinπx

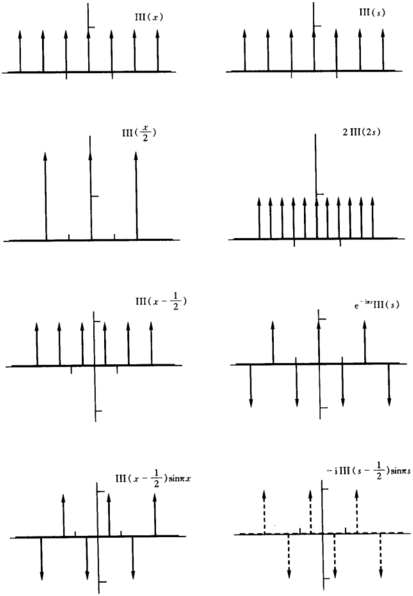

iII(s)

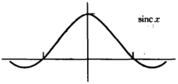

II(x)

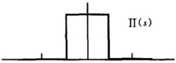

isinπs

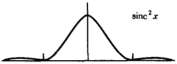

1/2[δ(x+1)+δ(x+2)
+δ(x−2)+δ(x−1)]

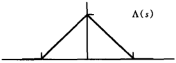

2cosπs cos3πs

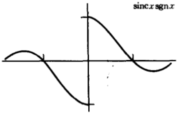

III(x)
III(s)
III(x/2)
2III(2s)
III(x − 1/2)
e^{−iπs}III(s)
III(x − 1/2)sinπx
−iIII(s − 1/2)sinπs

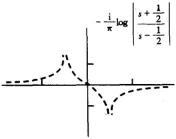

sinc x

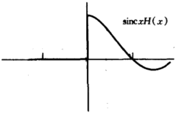

$\Pi(s)$

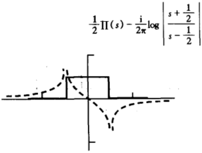

$\operatorname{sinc}^2 x$

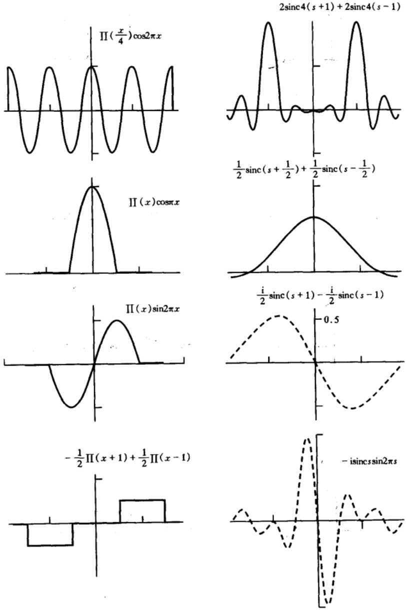

$\Lambda(s)$

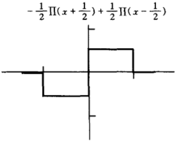

sinc x sgn x

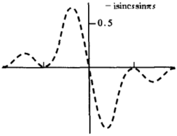

$-\frac{i}{\pi}\log\left|\frac{s+\frac{1}{2}}{s-\frac{1}{2}}\right|$

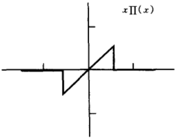

sinc $xH(x)$

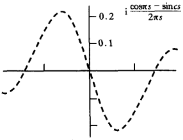

$\frac{1}{2}\Pi(s)-\frac{i}{2\pi}\log\left|\frac{s+\frac{1}{2}}{s-\frac{1}{2}}\right|$

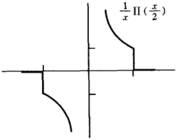

Π(x/4)cos2πx
2sinc4(s+1)+2sinc4(s−1)
Π(x)cosπx
1/2 sinc(s+1/2)+1/2 sinc(s−1/2)
Π(x)sin2πx
i/2 sinc(s+1)−i/2 sinc(s−1)
0.5
−1/2 Π(x+1)+1/2 Π(x−1)
−isincssin2πs

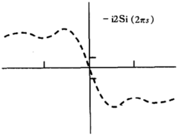

$-\frac{1}{2}\Pi(x+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\Pi(x-\frac{1}{2})$

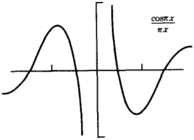

$-\mathrm{i}\,\mathrm{sinc}\,s\,\sin\pi s$
0.5

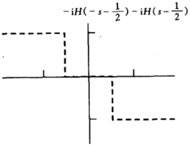

$x\Pi(x)$

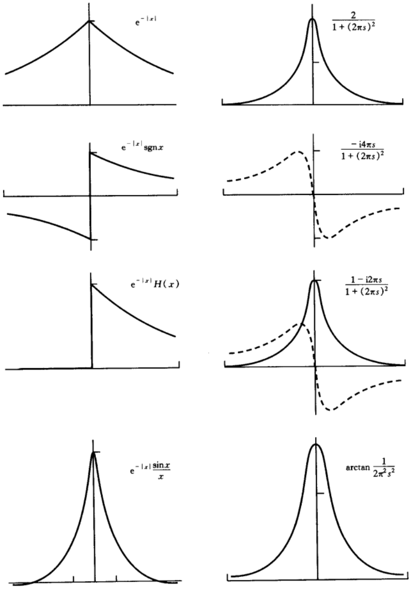

0.2
0.1
$\mathrm{i}\frac{\cos\pi s-\mathrm{sinc}\,s}{2\pi s}$

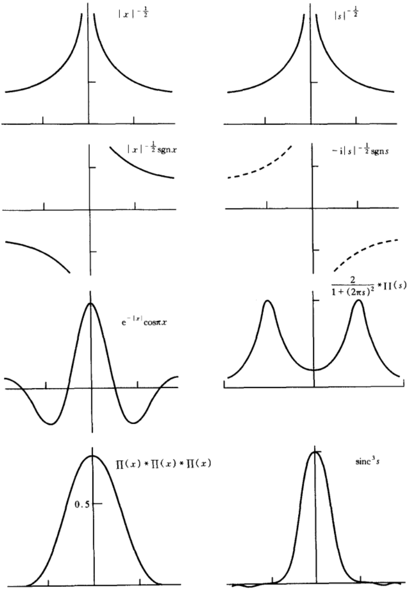

$\frac{1}{x}\Pi(\frac{x}{2})$


$-\mathrm{i}2\mathrm{Si}\,(2\pi s)$

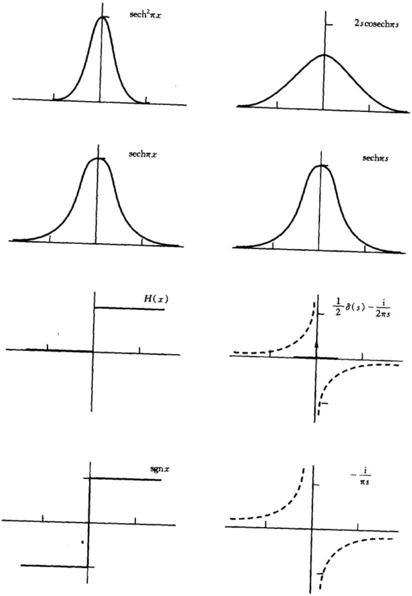

$\frac{\cos\pi x}{\pi x}$

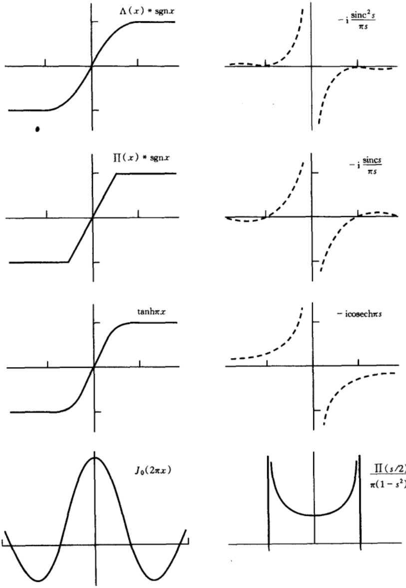

$-\mathrm{i}H(-s-\frac{1}{2})-\mathrm{i}H(s-\frac{1}{2})$


$e^{-|x|}$
$\frac{2}{1+(2\pi s)^2}$
$e^{-|x|}\operatorname{sgn} x$
$\frac{-i4\pi s}{1+(2\pi s)^2}$
$e^{-|x|}H(x)$
$\frac{1-i2\pi s}{1+(2\pi s)^2}$
$e^{-|x|}\frac{\sin x}{x}$
$\arctan\frac{1}{2\pi^2 s^2}$

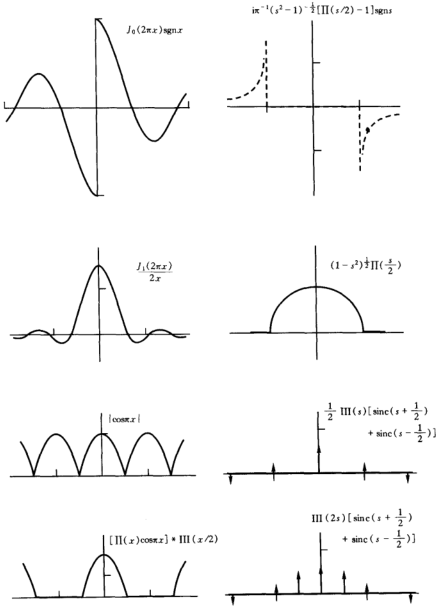


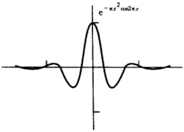
$|x|^{-\frac{1}{2}}$
$|s|^{-\frac{1}{2}}$
$|x|^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sgn}x$
$-i|s|^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sgn}s$
$e^{-|x|}\cos\pi x$
$\frac{2}{1+(2\pi s)^2} * \Pi(s)$
$\Pi(x) * \Pi(x) * \Pi(x)$
0.5
$\operatorname{sinc}^3 s$

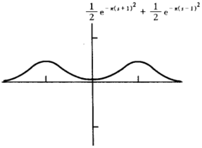

$\mathrm{sech}^2\pi x$
$2s\,\mathrm{cosech}\pi s$
$\mathrm{sech}\pi x$
$\mathrm{sech}\pi s$
$H(x)$
$\frac{1}{2}\delta(s)-\frac{i}{2\pi s}$
$\mathrm{sgn}x$
$-\frac{i}{\pi s}$

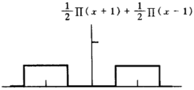


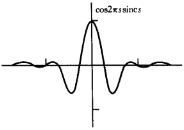
Λ(x) * sgnx
− i sinc²s/πs
Π(x) * sgnx
− i sincs/πs
tanhπx
− icosechπs
J₀(2πx)
Π(s/2)/π(1 − s²)^½

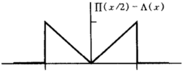

$i\pi^{-1}(s^2-1)^{-\frac{1}{2}}[\Pi(s/2)-1]\mathrm{sgn}\,s$
$J_0(2\pi x)\mathrm{sgn}\,x$
$\frac{J_1(2\pi x)}{2x}$
$(1-s^2)^{\frac{1}{2}}\Pi(\frac{s}{2})$
$|\cos\pi x|$
$\frac{1}{2}\,\mathrm{III}(s)[\mathrm{sinc}(s+\frac{1}{2}) + \mathrm{sinc}(s-\frac{1}{2})]$
$[\Pi(x)\cos\pi x] * \mathrm{III}(x/2)$
$\mathrm{III}(2s)[\mathrm{sinc}(s+\frac{1}{2}) + \mathrm{sinc}(s-\frac{1}{2})]$

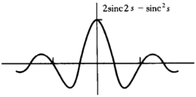

e^{-πx²}cos2πx

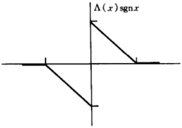

1/2 e^{-π(s+1)²} + 1/2 e^{-π(s-1)²}

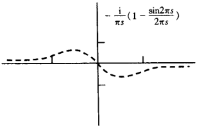

1/2 Π(x+1) + 1/2 Π(x-1)

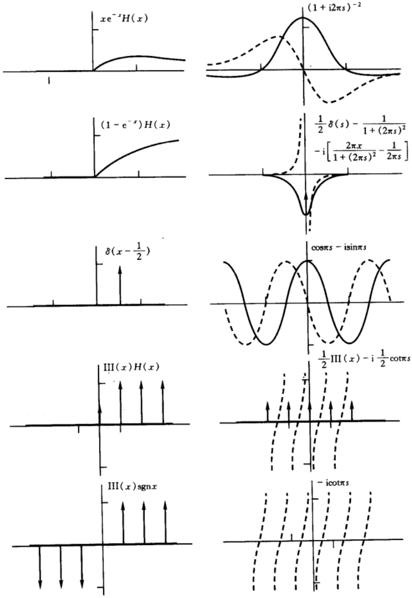

cos2πs sincs

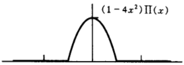

Π(x/2) - Λ(x)

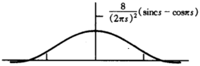

2sinc2s - sinc²s

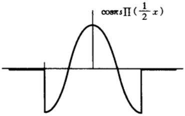

Λ(x)sgnx

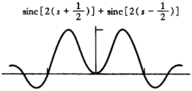

-i/(πs)(1 - sin2πs/(2πs))

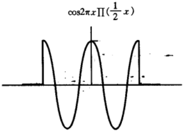

xe^{-x}H(x)
(1 + i2πs)^{-2}
(1 - e^{-x})H(x)
1/2 δ(s) - 1/(1 + (2πs)^2)
- i[2πx/(1 + (2πs)^2) - 1/(2πs)]
δ(x - 1/2)
cosπs - isinπs
III(x)H(x)
1/2 III(x) - i 1/2 cotπs
III(x)sgnx
- icotπs

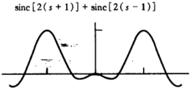

$(1-4x^2)\Pi(x)$

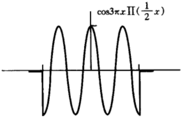

$\frac{8}{(2\pi s)^2}(\operatorname{sinc}s-\cos\pi s)$

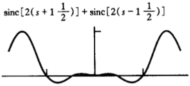

$\cos\pi s\Pi(\frac{1}{2}x)$

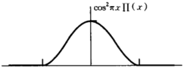

$\operatorname{sinc}[2(s+\frac{1}{2})]+\operatorname{sinc}[2(s-\frac{1}{2})]$

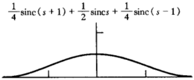

$\cos 2\pi x\Pi(\frac{1}{2}x)$

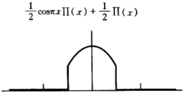

$\operatorname{sinc}[2(s+1)]+\operatorname{sinc}[2(s-1)]$

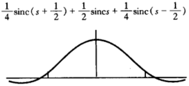

$\cos 3\pi x\Pi(\frac{1}{2}x)$

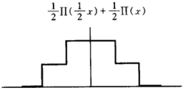

$\operatorname{sinc}[2(s+1\frac{1}{2})]+\operatorname{sinc}[2(s-1\frac{1}{2})]$

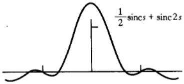

$\cos^2\pi x\,\Pi(x)$

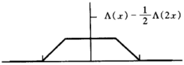

$\frac{1}{4}\operatorname{sinc}(s+1)+\frac{1}{2}\operatorname{sinc}s+\frac{1}{4}\operatorname{sinc}(s-1)$

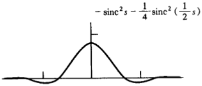

$\frac{1}{2}\cos\pi x\,\Pi(x)+\frac{1}{2}\Pi(x)$

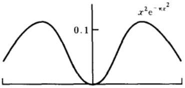

$\frac{1}{4}\operatorname{sinc}(s+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\operatorname{sinc}s+\frac{1}{4}\operatorname{sinc}(s-\frac{1}{2})$

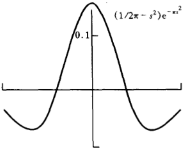

$\frac{1}{2}\Pi(\frac{1}{2}x)+\frac{1}{2}\Pi(x)$

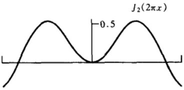

$\frac{1}{2}\operatorname{sinc}s+\operatorname{sinc}2s$

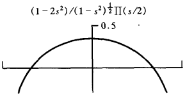

$\Lambda(x)-\frac{1}{2}\Lambda(2x)$

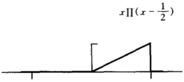

$-\operatorname{sinc}^2 s-\frac{1}{4}\operatorname{sinc}^2(\frac{1}{2}s)$

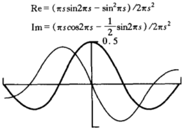

$x^2e^{-\pi x^2}$
0.1

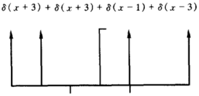

$(1/2\pi - s^2)e^{-\pi s^2}$
0.1

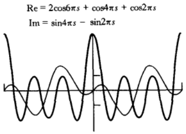

$J_2(2\pi x)$
0.5

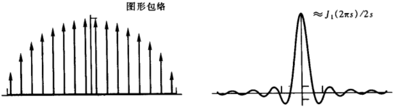

$(1-2s^2)/(1-s^2)^{\frac{1}{2}}\Pi(s/2)$
0.5

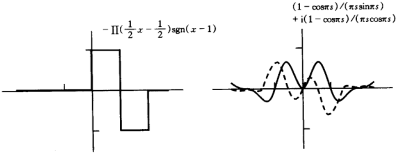

$x\Pi(x-\frac{1}{2})$


$\mathrm{Re} = (\pi s\sin 2\pi s - \sin^2\pi s)/2\pi s^2$
$\mathrm{Im} = (\pi s\cos 2\pi s - \frac{1}{2}\sin 2\pi s)/2\pi s^2$
0.5


$\delta(x+3)+\delta(x+3)+\delta(x-1)+\delta(x-3)$

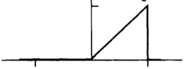

$\mathrm{Re} = 2\cos 6\pi s + \cos 4\pi s + \cos 2\pi s$
$\mathrm{Im} = \sin 4\pi s - \sin 2\pi s$


图形包络
≈ $J_1(2\pi s)/2s$

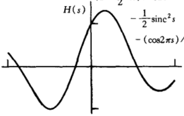

$-\Pi(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})\mathrm{sgn}(x-1)$
$(1-\cos\pi s)/(\pi s\sin\pi s)$
$+\,\mathrm{i}(1-\cos\pi s)/(\pi s\cos\pi s)$

一些非对称函数的 Hartley 变换

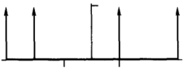
$x\Pi(x-\frac{1}{2})$



$(1+\frac{1}{2}\pi s)\mathrm{sinc}2s-\frac{1}{2}\mathrm{sinc}^2 s-(\cos 2\pi s)/2\pi s$

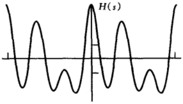


$\delta(x+3)+\delta(x+2)+\delta(x-1)+\delta(x-3)$

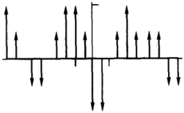


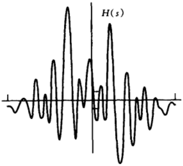
$2\cos 6\pi s+\mathrm{cas}(-4\pi s)+\mathrm{cas}2\pi s$

其中 $\mathrm{cas}s=\cos s+\sin s$

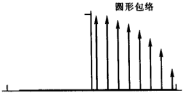


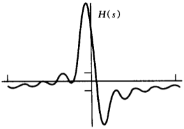
相关冲激序列





圆形包络

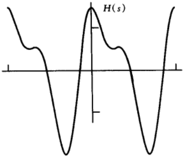




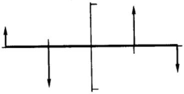
$\frac{1}{2}\delta(x+2)+\delta(x-1)$



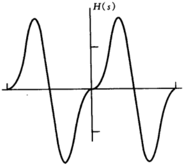
$\frac{1}{2}\text{cas}(-4\pi s)+\text{cas}(2\pi s)$



$\frac{1}{2}\delta(x+2)-\delta(x+1)+\delta(x-1)-\frac{1}{2}\delta(x-2)$



$2\sin 2\pi s-\sin 4\pi s$



第 23 章

约瑟夫·傅里叶生平

巴伦·琼-巴普蒂斯特-约瑟夫·傅里叶(Baron Jean-Baptiste-Joseph Fourier,1768 年 3 月 21 日～1830 年 5 月 16 日),生于法国欧塞尔(Auxerre)一个贫困的生活环境中,他提出了用单个解析表达式来表达一个任意函数(即使函数是分段用不同的解析表达式定义的函数,如阶梯波形)的思想。尽管这个思想在当时遇到了反对,但后来对数学、科学与工程领域的许多进展起到了核心的作用。现在,它是电气工程的核心课程。傅里叶在研究固体(包括土壤)中的热流问题时发现了他的思想。

莱昂哈德·欧拉(Leonhard Euler, 1707～1783)在傅里叶之前发表了公式

$$\frac{1}{2}x=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots$$

所以你或许会有这样的疑问,为什么没有用欧拉来命名傅里叶级数呢?

傅里叶专注于热学研究,对来宾来说他的房间相当热,极不舒服,而他还穿着很厚的衣服。这些怪癖可以追溯到他在埃及的 3 年,1798 年他和 165 位学者在拿破仑远征治理埃及时进入埃及。

在远征之前,傅里叶是一个率真的数学教授,但现在他担任着埃及研究院书记的管理职责,埃及研究院是一个在 Beys 宫殿的女居处集会的科学机构。这段时间,傅里叶继续研究方程理论,但是他在管理方面的能力使得他所担负的政治和外交任务取得了成功。我们应当记得当拿破仑在巴勒斯坦与叙利亚人战斗,击退土耳其人的入侵,驱逐逃亡的 Mameluke 首领 Murad Bey 的同时,在地理学、考古学、医学、农学、自然历史等方面进行了雄心勃勃的研究,但是所有这些都没有他的舰队的支持,因为在尼罗河战役中,他的舰队登陆后立即就被 Nelson 消灭了。

在 1801 年军事投降前不久,法国科学家出海后很快就被英国舰队司令 Sidney Smith 连同它们的资料一起俘虏了。然而,依照那个时代的绅士精神,Smith 把人送上了岸,保留了文

档资料和收藏品，最终把除 Rosetta stone 外的资料亲自移交给了巴黎，Rosetta stone 是埃及象形文字的关键，它现在矗立在大英博物馆以纪念拿破仑发起的埃及古物学研究和他的军事失败。

线性问题之父，英国著名的物理学家托马斯・杨(1773～1829)建立了光的横波特性，解释了极化，并提出了用于表现光目标的傅里叶分析的双针孔干涉仪。但很少有人知道，他和傅里叶对埃及古物学有着共同的兴趣。他对 Rosetta stone 进行了研究，推出了古埃及文稿起源于象形文字的解释，而且还分离和标识了辅音符号。

1802 年，傅里叶在巴黎的 Ecole 理工大学担任他原先的分析教授位置以后不久，就被拿破仑任命为 Isere 的行政长官。他在 Grenoble 的职责包括征税、征兵、执法和执行巴黎的指示并写出报告。他抚平了 1789 年革命所留下的创伤，排干了 80 000 平方公里的含有毒气的沼泽，修建了通向 Torino 的道路的法国部分。

尽管有行政任务，到 1807 年，傅里叶已经写出了他的热传导理论，它所依赖的本质思想是把温度分布分解成空间正弦分量；但拉普拉斯和拉格朗日对此表示的怀疑阻碍了它的出版。Biot 和泊松也提出了批评。虽然如此，Institut 为 1811 年的数学奖设立了固体中的热传播这个主题，奖项颁给了傅里叶并提到了缺乏普遍性和严格性。出版进一步延迟到 1815 年的事实说明使当时的大数学家接受傅里叶分析是很不容易的。

的确，需要用傅里叶积分来正确表达一个直棒中的一维热分布。傅里叶通过考虑一个环(即，把直棒弯成一个圆)中的热流，避免了这种复杂性。在这种方法中，温度分布一定是空间周期的。实际上这并没有失去一般性，因为可以假设圆环的周长远大于一个有实际意义的导热直棒的长度。在从傅里叶级数表达开始，再通过极限过渡到傅里叶积分的这种教材中，傅里叶的这种思想是很熟悉的。

1814 年，当拿破仑退位并出发向南通过 Grenoble 前往 Elba(这条路线现在称为拿破仑路线)时，傅里叶陷入了困境。他对旧主人的招待将威胁到他在新国王(路易十八)手下的位置，在任何情况下，路易十八都不喜欢昔日皇帝的旧幕僚。在傅里叶的影响下，拿破仑改变了行程而傅里叶则保住了工作。但是拿破仑次年在法国复辟，这次向北行军经过 Grenoble 时，他辞退了处处躲避的傅里叶。然而，三天后傅里叶被任命为里昂 Rhone 地区的行政长官，驻扎在里昂，如此经历了两次政体的变换。当然，仅过了 100 天，国王(路易十八)重新控制了国家，拿破仑去了南大西洋，再也没有回来。傅里叶结束了他在地方政府的任职，到巴黎开始了科学和科学管理的生活，在 1817 年当选为 Academie des Sciences，1823 年当选为高级文官，1826 年当选为 Academie Francaise。他终身未婚。

开始时，我们提到了欧拉公式。这个公式对 $-\pi<x<\pi$ 是正确的，但对其他的 x 是不正确的。RHS 是锯齿周期函数 $(x/2)\Pi(x/2\pi) * (2\pi)^{-1}\text{III}(x/2\pi)$ 的傅里叶级数。1808 ～ 1809 年左右，傅里叶写到："当 x 的值在 π 和 2π 之间时，方程就不再成立了。然而，方程的右边仍然是一个收敛的级数，但和不等于 $x/2$。欧拉其实是理解这个方程的，只是没有给出注释。"(引自 J. Herivel, Joseph Fourier, the Man and Physicist, Clarendon Press, Oxford, 1975, p. 319)